ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Astronomie. Mémoire sur les éclipses de soleil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 349-371

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__349_0>

ASTRONOMIE.

Mémoire sur les éclipses de soleil ;

Par M. le professeur KRAMP, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg.

(*Deuxième partie.*) (*)

62. L'ÉQUATION différentielle complète, entre dy, dz, dt, nous fait voir que tous les problèmes concernant les éclipses, dans lesquels le moment d'une plus grande phase, ou d'une phase quelconque, de grandeur donnée est au nombre des inconnues, ne sauraient admettre aucune solution directe, attendu qu'ils mènent à des équations très-compliquées, et de plus éminemment transcendantes. La solution directe est restreinte aux cas où le temps est au nombre des quantités données, ce qui permet de supposer dt=o. La question de déterminer l'instant de la plus grande phase, pour un endroit dont la position géographique est connue, ne peut être résolu qu'en employant les fausses positions. Nous allons en donner un exemple, en déterminant l'instant de la plus grande phase, pour l'observatoire de Berlin.

Nous avons déterminé la distance des centres pour les trois momens de $9^h.30'$, $9^h.45'$, $10^h.0'$, temps vrai à Paris, égale à 461, 122, 376. On pourra les représenter par un trinôme, tel que $A+Bt+Ct^2$;

(*) Voyez la page 133 de ce volume.

en comptant le temps t depuis $9^h.30'$, et en prenant un quart d'heure ou $15'$ pour unité de temps; de manière que

pour $t =$ 0 , 1 , 2 ,

on ait la distance $= 461$, 122 , 376 ;

ce qui donne $A = 461$, $2B = -1271$, $2C = 593$. La moindre distance répondra à $t = -\frac{B}{2C} = \frac{1271}{1186} = 16'.4''$. Le milieu de l'éclipse arrivera donc à $9^h.46'.4''$, temps de Paris; ce qui équivaut à $10^h.30'.12''$, temps de Berlin. La moindre distance des centres sera $A - \frac{B^2}{4C}$; ce qui, dans le cas actuel, fait $120''$ ou $2'$ de degré.

On aura une approximation encore plus parfaite, en comprenant dans cette interpolation les cinq ordonnées 876 , 461 , 122 , 376 , 756 , qui répondent aux époques $9^h,15'$, $9^h.30'$, $9^h.45'$, $10^h.0'$, $10^h.15'$. En designant par t le temps exprimé en quart d'heures, et compté depuis $9^h.45'$, tant en avant qu'en arrière, on trouve la distance des centres égale à

$$732 - 280t + 2025t^2 + 25t^3 - 246t^4 \; ;$$

en conséquence, le temps t auquel appartient la moindre distance des centres, sera la racine de l'équation

$$0 = -280 + 4050t + 75t^2 - 984t^3 \; ;$$

Elle donne $t = \frac{28}{405}$ d'un quart d'heure, ou $\frac{28}{27}$ d'une minute; ou enfin $1'.2''$. Le milieu de l'éclipse arrivera donc à $9^h.46'2''$, temps vrai de *Paris*, équivalant à $10^h.30'.10''$, temps vrai de *Berlin*; ce qui ne diffère que de *deux secondes* de l'approximation déjà employée. Le temps t de nos formules, depuis le n.° 39, sera donc $0,4418$; et, si l'on emploie cette fonction numérique pour déterminer les coordonnées, on trouvera les trois rapports $q : r$, $q' : r'$, $y : z$, rigoureusement égaux entre eux.

63. *PROBLÈME VIII. On demande la position géographique du lieu où l'éclipse doit paraître centrale dans un instant donné?*

64. *Solution.* L'instant donné fera connaître les deux coordonnées q', r', moyennant les formules $q'=M+mt$, $r'=N+nt$. La condition d'une éclipse centrale donne $q=0$, $r=0$: on aura donc (8), en supprimant x dans $A-x$, ce que la nature du problème nous permet de faire, $y=\frac{Bq'}{A-B}$, $z=\frac{Br'}{A-B}$, et ensuite $x=\sqrt{c^2-y^2-z^2}$. Nous avons donné les valeurs numériques de M, N, m, n, en secondes d'un cercle dont le rayon était la distance A du centre de la terre à celui du soleil, savoir : (40)

$$M=-5207'', \quad m=+8210'',$$
$$N=+3562, \quad n=-804''.$$

Il faudra exprimer de même le rayon C de la terre, lequel par conséquent deviendra égal à 8″,7345 qui constitue (44) la parallaxe horizontale du soleil.

65. Le commencement et la fin de l'éclipse centrale sont marqués par les deux limites extrêmes au-delà desquelles la coordonnée x n'a plus de valeur réelle. On aura donc, pour ces deux instans, $c^2=y^2+z^2$. Ainsi, en faisant, pour abréger, $\frac{A}{B}-1=h$, ce qui rend $h=413,1056$ (44), on aura l'équation $h^2c^2=(M+mt)^2+(N+nt)^2$; ou bien

$$(m^2+n^2)t^2+2(Mm+Nn)t+(M^2+N^2)=h^2c^2.$$

Donc, si, pour abréger, on fait

$$R^2=(m^2+n^2)h^2c^2-(Mn-Nm)^2;$$

que de plus on désigne par t le commencement de l'éclipse, par t' sa fin, et qu'on en fasse autant pour les coordonnées y et z qui s'y rapportent, on aura

$$t=-\frac{(Mm+Nn)+R}{m^2+n^2}, \quad t'=-\frac{(Mm+Nn)-R}{m^2+n^2};$$

$$hy=+\frac{n(Mn-Nm)-mR}{m^2+n^2}, \quad hy'=+\frac{n(Mn-Nm)+mR}{m^2+n^2};$$

$$hz = -\frac{m(Mn - Nm) + nR}{m^2 + n^2}, \quad hz' = -\frac{m(Mn - Nm) - nR}{m^2 + n^2}.$$

Il en résulte que $ny - mz$, aussi bien que $ny' - mz'$, est égal à $\frac{Mn - Nm}{h}$.

66. Les quatre dernières formules font connaître les coordonnées y et z, en parties décimales de la parallaxe horizontale; et, pour les réduire en parties décimales du rayon de la terre, il faut encore les diviser par 8,7345. Le temps t est compté depuis huit heures du matin, ayant pour unité l'intervalle de quatre heures.

67. Dans l'éclipse de 1816, on trouve

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= +68050516, \\ ch\sqrt{m^2 + n^2} &= +29765611, \\ Mm + Nn &= -45613318, \\ Mn - Nn &= -25057592, \\ R &= +16062648; \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} t &= +0{,}434246; & t' &= +0{,}906326; \\ y &= -0{,}4550212; & y' &= +0{,}6191160; \\ z &= +0{,}8904171; & z' &= +0{,}7852276; \end{aligned}$$

ce qui fixe le commencement de l'éclipse à $9^h.44'.13''$, et sa fin à $11^h.37'.3''$, temps vrai de Paris; d'où résulte, pour sa durée totale, $1^h.52'.50''$.

68. Des coordonnées x, y, z, dont la première est *zéro*, il faut passer aux coordonnées X, Y, Z, moyennant les formules du n.° 28, lesquelles deviennent ici

$$\begin{aligned} X &= -y\,\mathrm{Sin.}\alpha, \\ Y &= +y\,\mathrm{Cos.}\varepsilon\,\mathrm{Cos.}\alpha - z\,\mathrm{Sin.}\varepsilon; \\ Z &= +y\,\mathrm{Sin.}\varepsilon\,\mathrm{Cos.}\alpha + z\,\mathrm{Cos.}\varepsilon. \end{aligned}$$

Les longitudes α et α', calculées d'après les formules du n.° 36; savoir

$$\alpha=180°+56°.54'.35''+607''t\ ,$$

donnent, pour les deux époques du commencement et de la fin de l'éclipse,

$$\alpha=180°+56°.58'.54''\ ;$$
$$\alpha'=180°+57°.\ 3'.41''\ :$$

On en tire, pour le commencement et pour la fin de l'éclipse,

$$X=-0{,}3816174\ ;\quad X'=+0{,}5196770\ ;$$
$$Y=-0{,}1270458\ ;\quad Y'=-0{,}6215034\ ;$$
$$Z=+0{,}9155471\ ;\quad Z'=+0{,}5862338\ .$$

69. Des coordonnées X, Y, Z et X', Y', Z'; on passe aux latitudes λ, λ', ainsi qu'aux angles horaires μ, μ', à l'aide des formules $\text{Sin.}\lambda=Z$, $\text{Sin.}\lambda'=Z'$, $\text{Tang.}\mu=\frac{Y}{X}$; $\text{Tang.}\mu'=\frac{Y'}{X'}$; d'où il résulte

$$\lambda=\ 66°.43'.17''\ ;\quad \lambda'=\ 35°.53'.24''\ ;$$
$$\mu=198°.24'.48''\ ;\quad \mu'=129°.54'.\ 4''\ .$$

L'expression de l'angle horaire μ, compté depuis huit heures du matin, en prenant l'intervalle de quatre heures pour unité de temps, est (45) $\mu=174°.36'.36''+216626''t+D$. On aura donc, pour le le cas actuel,

$$\mu=200°.19'.57''+D\ ;$$
$$\mu'=228°.44'.44''+D'\ :$$

70. On aura donc, pour les latitudes,

$$\lambda=65°.47'\ ;\quad \lambda'=35°.3'\ ;$$

Pour les angles horaires, il faudra prendre,

$$\mu=180°+18°.24'.48''\ ,\qquad \mu'=180°+129°.54'.4''\ ;$$

donc

$D = -1°.55'.9''$; $D' = 81°.9'.24''$:

Le commencement de l'éclipse centrale aura donc lieu, à près de deux degrés, à l'occident de Paris, sous la latitude de 65°.47'; et sa fin à 81° environ, à l'orient de Paris, sous la latitude de 35°.3'.

71. En poursuivant la courbe de l'éclipse centrale, de quart d'heure en quart d'heure, on trouvera

Commencem.t	$X = -0,3816174$,	$Y = -0,1270458$,	$Z = +0,9155471$
$9^h.45'$	$-0,4243338$,	$-0,0996840$,	$+0,8832180$
10 . 0	$-0,4597629$,	$-0,4836834$,	$+0,7447607$
10 .15	$-0,3983856$,	$-0,6310864$,	$+0,6655960$
10 .30	$-0,3059972$,	$-0,7347272$,	$+0,6054293$
10 .45	$-0,1912901$,	$-0,8068382$,	$+0,5589459$
11 . 0	$-0,0554173$,	$-0,8490128$,	$+0,5254575$
11 .15	$+0,1068099$,	$-0,8549988$,	$+0,5076834$
11 .30	$+0,3135564$,	$-0,7956789$,	$+0,5182441$
fin.	$+0,5196770$,	$-0,6215034$,	$+0,5862338$

72. De ces coordonnées on passera aux latitudes λ, aux angles horaires μ, et de là aux différences de méridiens D. On aura, de quart d'heure en quart d'heure, les angles qui suivent,

Commencem.t	$\lambda = 66°.17'.0''$,	$\mu = 198°.24'.48''$,	$D = -1°.55'.9''$
$9^h.45'$	62 . 1 .59 ,	205 .12 . 3 ,	+ 4 .15 .54
10 . 0	48 . 8 .19 ,	226 .27 . 8 ,	+21 .45 .20
10 .15	41 .43 .41 ,	237 .44 .13 ,	+29 .16 .46
10 .30	37 .15 .37 ,	247 .23 .22 ,	+35 .10 .16
10 .45	33 .58 .58 ,	256 .39 .44 ,	+40 .40 .59
11 . 0	31 .41 .56 ,	266 .45 .56 ;	+46 .31 .32
11 .15	30 .30 .35 ,	277 . 7 .15 ;	+53 .37 .12
11 .30	31 .12 .52 ,	291 .30 .29 ,	+64 .14 .47
fin........	35 .53 .42 ,	309 .54 . 4 ,	+81 . 9 .24

La courbe tracée d'après ces données sera conforme à celle des *Ephémérides* de *Berlin*. (Année 1816.)

73. *PROBLÈME IX. Déterminer la position géographique du point du globe d'où l'on peut voir, dans un instant donné, quelque plus grande phase d'une grandeur donnée?*

74. *Solution.* Le but du problème est de tracer sur le globe les courbes des plus grandes phases, ainsi que des attouchemens des bords du soleil et de la lune qui indiquent les progrès successifs de l'éclipse. Les quantités données du problème sont les coordonnées q', r' du centre de la lune, vu géocentriquement sur le disque solaire, et qui sont des fonctions connues du temps t, et de plus f, distance apparente des centres au moment de la plus grande phase. Les inconnues sont les coordonnées q, r du centre de la lune, vu sur le disque solaire, d'un point de la surface du globe dont on demande les coordonnées x, y, z.

75. Les cinq équations seront; savoir, les deux premières (8)

$$A(A-B)y=(A-x)Bq'-Aq(B-x)\;;$$
$$A(A-B)z=(A-x)Br'-Ar(B-x)\;;$$

la troisième

$$x^2+y^2+z^2=c^2\;;$$

équation de la sphère; et la quatrième

$$q^2+r^2=f^2\;;$$

qui exprime la relation entre la distance des centres et les coordonnées. La cinquième résulte de l'égalité des rapports $q:r$, $q':r'$, $y:z$, qui indiquent l'époque du milieu de l'éclipse ou celle de la plus grande phase.

76. Cette égalité nous permet de supposer

$$q=mq'\;,\quad y=nq'\;;$$
$$r=mr'\;,\quad z=nr'\;.$$

Faisant de plus, pour abréger, $p^2=q'^2+r'^2$; ce qui rend p égal à la distance apparente des centres du soleil et de la lune, vus géocentriquement; et ce qui en fait ainsi une quantité entièrement connue, ainsi que le facteur $m=\frac{f}{p}$; il ne reste plus que les deux inconnues n et x, pour lesquelles nous avons les deux équations

$$nA(A-B)p=AB(p-f)+(Af-Bp)x\,;$$
$$c^2=x^2+n^2p^2\,.$$

77. Voici les formules qui contienneut la solution finale du problème. Faites

$$P=AB(p-f)\,,$$
$$Q=A(A-B)\,,$$
$$R=Af-Bp\,,$$
$$\Pi^2=c^2(Q^2+R^2)-P^2\,;$$

et alors les coordonnées inconnues du problème; savoir, x, y, z seront exprimées comme il suit :

$$x=-\frac{PR-Q\Pi}{Q^2+R^2}\,;$$
$$y=+\frac{PQ+R\Pi}{Q^2+R^2}\cdot\frac{q'}{p}\,;$$
$$z=+\frac{PQ+R\Pi}{Q^2+R^2}\cdot\frac{r'}{p}\,.$$

On a d'ailleurs

$$q=\frac{fq'}{p}\,,\qquad r=\frac{fr'}{p}\,;$$

ainsi, le problème est résolu.

78. Le commencement et la fin d'une plus grande phase de grandeur donnée, et telle que la distance apparente des centres soit $f=\sqrt{q^2+r^2}$, est encore indiqué par les deux limites au-delà desquelles l'ordonnée x n'a plus de valeur réelle. On aura, dans ce cas, $PR=Q\Pi$; d'où l'on tire

$$p=\sqrt{q'^2+r'^2}=\sqrt{(M+mt)^2+(N+nt)^2}=hc+f\,.$$

On aura de plus

$y=$

$$y=\frac{Pq'}{Qp}=\frac{cq'}{p}=\frac{B(p-f)q}{(A-B)p}=\frac{(p-f)q}{hp};$$

$$z=\frac{Pr'}{Qp}=\frac{cr'}{p}=\frac{B(p-f)r}{(A-B)p}=\frac{(p-f)r}{hp};$$

en conservant la notation $h=\frac{A}{B}-1$; ce qui, dans le cas actuel (44), rend $h=413{,}1056$. La solution (17) sera applicable au problème plus général que nous traitons, en remplaçant simplement h par $hc+f$.

79. Le quarré que nous avons désigné par R^2 (65) deviendra ainsi $(hc+f)^2(m^2+n^2)-(Mn-Nm)^2$; et, à l'aide du radical R, on déterminera, par les formules qui suivent, les inconnues t, y, z, de même que t', y', z', dont les unes se rapportent au commencement et les autres à la fin de la plus grande phase. Les temps seront exprimés en parties décimales de l'intervalle de quatre heures; et les coordonnées en parties décimales du rayon du globe terrestre.

$$t=-\frac{(Mm+Nn)+R}{m^2+n^2}, \qquad t'=-\frac{(Mm+Nn)+R}{m^2+n^2},$$

$$\frac{y}{c}=+\frac{n(Mn-Nm)-mR}{(hc+f)(m^2+n^2)}, \qquad \frac{y'}{c}=+\frac{n(Mn-Nm)+mR}{(hc+f)(m^2+n^2)},$$

$$\frac{z}{c}=-\frac{m(Mn-Nm)+nR}{(hc+f)(m^2+n^2)}; \qquad \frac{z'}{c}=-\frac{m(Mn-Nm)-nR}{(hc+f)(m^2+n^2)}.$$

80. La grandeur de l'éclipse, ou la largeur de la partie éclipsée du soleil, est égale à la somme des deux demi-diamètres moins la distance des centres ou, dans le cas actuel, à $1960''-f$. On l'exprime ordinairement en *douzièmes* du diamètre entier du soleil, dont chacun prend le nom de *doigt* ; si on en exprime le nombre par n, on aura $f=1960''-\frac{1947''}{12}n$, ou $f=1960-162{,}25$. Le produit hc étant $3608''$, on aura la table qui suit :

o doigts	, $f=1960''$	, $hc+f=5568''$
III	1473	, ... 5081
VI	987	, ... 4595
IX	500	, ... 4108
XII.	13	, ... 3621
—IX	474	, ... 3134

81. Passant de là au radical R, et aux temps t et t', qui indiquent le commencement et la fin de la phase, on aura cette autre table

o doigts. . . .	$R=38504793$,	$t=0{,}2510409$;	$t'=1{,}3830624$;
III	33610097, . .	0,3233365, . .	1,3111352;
VI	28441820, . .	0,3992842, . .	1,2351873;
IX	22814787, . .	0,4819732, . .	1,1524983;
XII.	16259486, . .	0,5783032, . .	1,0561684,
—IX	6364441, . .	0,7237105; . .	0,9107610:

82. Le radical R s'évanouit, et les deux valeurs de t qui se rapportent au commencement et à la fin de la plus grande phase se confondent en une seule, lorsque $hc+f=\frac{Mn-Nm}{\sqrt{m^2+n^2}}$; ce qui fait $hc+f=3038$. On en tire $f=-570$. Otant cette quantité de la somme des deux demi-diamètres apparens qui est 1960, on aura la largeur de la partie éclipsée égale à 1390; et, si l'on compare cette largeur au diamètre apparent du soleil, qui est 1947, on trouvera que la phase est, dans ce moment, de 8 doigts 34'; chaque doigt étant supposé, selon l'usage, divisé en 60'.

83. Les coordonnées y et z de chaque point de la courbe de la plus grande phase, au lever ou au coucher du soleil, se trouvent, à l'aide des formules (79), qui deviennent, pour le cas particulier de l'éclipse de 1816,

$$y=\frac{2453874-R}{(hc+f)8288,735}, \quad y'=\frac{2453874+R}{(hc+f)8288,735},$$

$$z=\frac{255874167+R}{(hc+f)84639,945}, \quad z'=\frac{255874167-R}{(hc+f)84639,945}.$$

On aura ainsi, pour la branche occidentale,

o doigts	$y=-0,7809997$	$z=0,6245312$
III	$-0,7396425$	$0,6729998$
VI	$-0,6823358$	$0,7310387$
IX	$-0,5979688$	$0,8015192$
XII	$-0,4599799$	$0,8879292$
—IX	$-0,1505402$	$0,9886037$
Coïncidence	$-0,0974631$	$0,9952392$;

et pour la branche orientale,

o doigts	$y=0,8873201$	$z=0,4611537$
III	$0,8561515$	$0,5167247$
VI	$0,8111929$	$0,5847784$
IX	$0,7421019$	$0,6072869$
XII	$0,6234979$	$0,7818249$
—IX	$0,3394676$	$0,9406176$
Coïncidence	$-0,0974631$	$0,9952392$.

84. Le moment de coïncidence est celui où, par la position géographique du lieu, le moment du lever et celui du coucher du soleil sont confondus ensemble, ce qui ne peut arriver que dans quelque point de l'une des deux zônes glaciales. Le temps t qui indique ce moment, compté depuis huit heures du matin, temps vrai de Paris, en fraction de l'intervalle de quatre heures est exprimé par $t=t'=-\frac{Mm+Nn}{m^2+n^2}$; ce qui, dans l'exemple actuel fait 0,67028.

ou $2^h.40'.52''$. Ce moment arrivera donc à $10^h.40'.52''$, temps vrai de *Paris*, ou $11^h.28'$, temps vrai de Berlin. Les coordonnées de cet endroit seront

$$y=y'=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\,;\quad z=z'=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\,,$$

ce qui fait, dans l'exemple actuel

$$y=y'=-0{,}0974631\,,\quad z=z'=+0{,}9952392\,;$$

85. Des coordonnées y, z, on passera aux coordonnées X, Y, Z, moyennant les formules

$$X=-y\,\mathrm{Sin.}\alpha\,,$$
$$Y=+y\,\mathrm{Cos.}\varepsilon\,\mathrm{Cos.}\alpha-z\,\mathrm{Sin.}\varepsilon\,;$$
$$Z=+y\,\mathrm{Sin.}\varepsilon\,\mathrm{Cos.}\alpha+z\,\mathrm{Cos.}\varepsilon\,.$$

La longitude α est égale à $180°+56°.54'.33''+607''t$; et on trouve les valeurs numériques de t déjà calculées (81). On a ainsi

o doigts.	$X=-0{,}6546446$,	$Y=+0{,}1420239$,	$Z=+0{,}7424754$;
III	$-0{,}6200787$,	$+0{,}1024262$,	$+0{,}7778471$;
VI	$-0{,}5721055$,	$+0{,}0500345$,	$+0{,}8186517$,
IX	$-0{,}5014467$,	$-0{,}0203208$,	$+0{,}8649496$,
XII.	$-0{,}3858032$,	$-0{,}1237846$,	$+0{,}9142386$,
—IX	$-0{,}1262989$,	$-0{,}3184869$,	$+0{,}9394753$,
Coïncidence.	$-0{,}0817834$,	$-0{,}3476458$,	$+0{,}9340527$,
—IX	$+0{,}2849049$,	$-0{,}5438384$,	$+0{,}7893480$,
XII.	$+0{,}5234290$,	$-0{,}6220665$,	$+0{,}5822844$,
IX	$+0{,}6231110$,	$-0{,}6366098$,	$+0{,}4543796$,
VI.	$+0{,}6812303$,	$-0{,}6358336$,	$+0{,}3610662$,
III.	$+0{,}7190900$,	$-0{,}6319792$,	$+0{,}2889810$,
o	$+0{,}7453713$,	$-0{,}6252237$,	$+0{,}2313369$.

86. On a de plus (31) $\mathrm{Sin.}\lambda=z$; $\mathrm{Tang.}\mu=\frac{Y}{X}$. Ces deux for-

mules feront connaître, pour chacune de ces plus grandes phases, la latitude λ, et l'angle horaire μ, où elle peut être observée. De ce dernier angle on parvient à la différence D des méridiens, moyennant la formule (45). On trouve

o doigts,	$\lambda=47°.56'.34''$,	$\mu=167°.45'.34''$,	$D=-21°.57'.24''$,
III	51 . 3 .50,	170 .37 .14,	−23 .26 .45,
VI	54 .57 . 0,	175 . 0 . 7,	−23 .38 .11,
IX	59 .52 .37,	182 .19 .12,	−21 .17 .32,
XII	66 . 5 .52,	197 .47 .20,	−11 .37 .11,
−IX	69 .57 .49,	248 .22 . 7,	+30 .12 .37,
Coïncidence	69 . 4 .32,	256 .45 .43,	+32 .58 .33,
−IX	52 . 7 .28,	297 .38 .57,	+68 .14 . 7,
XII	35 .36 .41,	310 . 4 .42,	+71 .54 .43,
IX	27 . 1 .30,	314 .23 .10,	+70 .25 .33,
VI	21 . 9 .56,	316 .55 .45,	+67 .59 .35;
III	16 .47 .49,	318 .41 .21,	+64 .10 .59,
o	13 .22 .33,	320 . 0 .35,	+62 .10 .32,

87. La courbe des plus grandes phases qui peuvent avoir lieu au lever et au coucher du soleil, commencera donc, dans sa branche occidentale, située dans l'océan atlantique, à quelques degrés au-dessus des Isles Açores; elle suivra la direction du premier méridien, jusqu'à la latitude de l'Isle d'Islande; elle traversera cette Isle; elle passera au nord du continent de la Scandinavie, traversera la mer blanche à l'est d'Archangel, traversera ensuite tout le continent de l'asie, du nord au sud, et passera à l'ouest de *Diu.* Sa branche orientale sera terminée dans l'océan Indien, près des Isles Lakedives.

88. Le point de la courbe où la branche orientale se réunit à l'occidentale, et qu'on peut considérer comme constituant le sommet de cette courbe, ou comme celui de tous ses points qui approche le plus du pôle boréal, est celui où le soleil, pendant son mou-

vement diurne, ne fait qu'effleurer l'horizon, et où par conséquent les deux momens du lever et du coucher de cet astre coïncident ensemble. Ce point diffère de celui où le radical R s'évanouit, et que nous avons déterminé (84) par les deux coordonnées

$$y=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad z=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Pour déterminer sa position, pour laquelle la latitude λ, ainsi que son sinus, ou la coordonnée Z devient un *minimum*, il faut prendre l'expression de cette coordonnée ou

$$Z=y\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+z\text{Cos.}\varepsilon$$

et en égaler à zéro la différentielle, prise en regardant $p=hc+f$ comme la variable du problème. Cette ligne est fonction du temps t; la longitude α du soleil en dépend aussi; et la solution rigoureuse du problème exigerait qu'on eût égard à cette variation. Mais, comme alors on aurait à faire à une équation finale entièrement transcendente; comme d'ailleurs cette longitude, dans l'intervalle de deux ou de trois heures, ne varie effectivement que de quelques minutes, quantité que la nature du problème nous permet de négliger, nous assignerons à cette longitude, pour valeur constante et moyenne, celle qu'elle a au moment où le radical R s'évanouit, et qui a lieu à $11^h.25'$, temps vrai de Berlin; on aura ainsi $\alpha=57^\circ.2'.51''$.

89. Faisons, pour abréger, $\frac{\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha}{\text{Cos}\,\varepsilon}$ ou $\text{Tang.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha=t$; et considérons ce produit comme la tangente d'un nouvel angle φ; tellement que $\text{Tang.}\varphi=\text{Tang.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha$. Alors, égalant à zéro (88) la différentielle de Z, on aura l'équation fort simple $0=tdy+dz$, qui, après avoir été duement développée, conduit à la formule finale

$$hc+f=p=\frac{Mn-Nm}{m\text{Cos.}\varphi-n\text{Sin.}\varphi}.$$

Dans l'éclipse de 1816, on trouve $\varphi=-13^\circ.7'.4''$; d'où il résulte $hc+f=p=3065''$. Et, comme $hc=3608''$, on aura f, ou la distance des centres dans ce même moment, égale à 543″. Cela donne, pour la largeur de la partie éclipsée, 1417″, et pour la grandeur de l'éclipse 8 doigts 44′.

90. *PROBLÈME X. On demande de tracer, sur la surface du globe, la courbe des plus grandes phases, vues dans un même instant, des différens points de cette surface?*

91. *Solution.* Le moment de ces observations, étant le même pour tous, est supposé donné; les coordonnées q', r', de même que la racine de la somme de leurs quarrés, que nous avons désignée par p, et qui est la distance apparente des centres du soleil et de la lune, vue de celui de la terre, et de plus la longitude α du soleil, au moment de toutes ces observations, seront les quantités connues du problème. Les inconnues sont au nombre de cinq : ce sont les coordonnées q, r, du centre de la lune, vu sur le disque du soleil, des différens endroits de la terre, dont les coordonnées sont x, y, z. Le problème, en effet, ne diffère du précédent que par les moyens approximatifs que sa nature nous permet d'employer.

92. La nature des plus grandes phases nous permet de faire encore

$$q=mq', \quad y=nq',$$
$$r=mr', \quad z=nr'.$$

On aura ainsi $c^2=x^2+n^2p^2$, et $f=mp$, ce qui fait encore de m une quantité entièrement connue. D'ailleurs, en supprimant x dans $B-x$, et à plus forte raison dans $A-x$, l'autre équation deviendra $hnp=p-f$; d'où il résulte

$$n=\frac{p-f}{hp}; \quad y=\frac{(p-f)q'}{hp}; \quad z=\frac{(p-f)r'}{hp};$$

et enfin

$$x^2=c^2-\frac{(p-f)^2}{h^2}=\frac{(hc+f-p)(hc-f+p)}{h^2}.$$

On a d'ailleurs

$$q=\frac{fq'}{p}; \quad r=\frac{fr'}{p};$$

ainsi le problème est approximativement résolu. D'ailleurs, comme les coordonnées q' et r' sont ici des quantités constantes, la proportion $y : z = q' : r'$ nous fait voir que la projection de la courbe demandée, sur le plan mené par le centre de la terre, perpendiculairement au rayon dirigé vers le centre du soleil, est une ligne droite qui passe par le centre de la terre, et qu'ainsi la courbe elle-même est un grand cercle du globe terrestre.

93. Pour montrer l'application de nos formules, essayons de déterminer les points du globe où l'on pourra observer toutes les plus grandes phases qui devront avoir lieu au moment du midi vrai, *temps de Berlin*, équivalant à $11^h.15'.52''$, temps vrai de Paris. Ce temps, compté depuis huit heures du matin, et exprimé en parties décimales de l'intervalle de quatre heures, donnera $t=0,816111$; d'où il résulte

$$q' = M + mt = +1493'',27 \;;$$
$$r' = N + nt = +2905,85 \;;$$

et par conséquent $p = \ldots\ldots +3267,08$.

La quantité $p-f$ doit être regardée comme variable, parce qu'elle dépend de la grandeur de la phase. Tirant les f, ou les distances apparentes des deux centres, des formules (80), on aura la table suivante :

o doigts. . . . . $p-f=$	$1307''$,
III.	1794,
VI.	2281,
IX.	2767,
XII	3254,
—IX.	3741.

On a d'ailleurs $h=413,1056$; donc

$$hp = 1349649 \,,$$
$$\frac{q'}{chp} = 0,0001266716 \,,$$
$$\frac{r'}{chp} = 0,0002464984 \,.$$

Il en résulte la table suivante des coordonnées x, y, z, désignant la position géographique des endroits qu'on demande,

o doigts. . .	$x=0,932083$, . .	$y=0,1655699$, . .	$z=0,3221931$,
III.	0,867668, ...	0,2272273, ...	0,4421762,
VI.	0,774934, ...	0,2888847, ...	0,5621593,
IX.	0,641718, ...	0,3505421, ...	0,6821424;
XII	0,431904, ...	0,4121995, ...	0,8021255,
—IX	Imaginaire	0,4738569, ...	0,9221086.

94. A l'aide des formules déjà connues; savoir:

$$X=x\text{Cos.}\alpha \quad -y\text{Sin.}\alpha\ ,$$

$$Y=x\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha+y\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha-z\text{Sin.}\varepsilon\ ,$$

$$Z=x\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha+y\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+z\text{Cos.}\varepsilon\ ,$$

on passera de là aux coordonnées X, Y, Z. On aura, au moment demandé, qui est celui du midi vrai de *Berlin*,

$$\text{Long. du soleil } =\alpha=180^\circ+57^\circ.2'.50''\ ;$$

d'où on conclura

o doigts . .	$X=-0,3680712$,	$Y=-0,9283573$,	$Z=-0,0517300$,
III	$-0,2812956$,	$-0,9573141$,	$+0,0665001$,
VI	$-0,1791135$,	$-0,9644726$,	$+0,1941914$,
IX	$-0,0549145$,	$-0,9404805$,	$+0,3354086$,
XII.	$-0,1109516$,	$-0,8575093$,	$+0,5022183$.

95. De là il n'y a qu'un pas à faire pour déterminer la latitude λ, l'angle horaire μ et la distance D des méridiens, pour les endroits qu'on demande, et par lesquels notre courbe doit passer, D étant comptée depuis le méridien de Paris. On trouve

o doigts.	$\lambda = -\ 2^\circ.57'.57''$,	$\mu = 248^\circ.22'.22''$,	$D = 24^\circ.39'.15''$;
III.	$+\ 3.48.46$,	$253.37.30$,	$29.54.23$,
VI.	$+11.11.51$,	$259.28.45$,	$35.45.38$,
IX.	$+19.35.50$,	$266.30.30$,	$42.47.23$,
XII	$+30.\ 8.48$,	$277.22.20$,	$53.39.13$.

96. La courbe se termine vers le nord, au point qui est indiqué par $x=0$, au-delà duquel cette limite n'a plus que des valeurs imaginaires. On a alors $p-f=ch$, ou $f=p-3608''$; et, comme $p=3267''$, il en résulte $f=-341''$. La largeur de la partie éclipsée sera donc $1960''-341''=1619''$; ce qui donne, pour la grandeur de l'éclipse, la fraction $\frac{1619}{1947}$ ou 10 doigts environ. Les coordonnées y et z de l'endroit du globe qui est le dernier de tous ceux où l'on puisse voir quelque plus grande phase d'éclipse, qui sera ici celle de dix doigts, au moment du midi vrai de Berlin, deviendront dans ce cas $y=\dfrac{cq'}{p}$, $z=\dfrac{cr'}{p}$; on aura de plus, pour les coordonnées X, Y, Z, les formules suivantes :

$$pX=-cq'\text{Sin.}\alpha\ ,$$

$$pY=+cq'\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha-cr'\text{Sin.}\varepsilon\ ,$$

$$pZ=+cq'\,\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+cr'\text{Cos.}\varepsilon\ ,$$

d'où il résulte

$$\text{Sin.}\lambda=\frac{q'\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+r'\text{Cos.}\varepsilon}{p}\ ;\quad \text{Tang.}\mu=\frac{q'\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha-r'\text{Sin.}\varepsilon}{p\text{Sin.}\alpha}\ .$$

ce qui donne finalement

$$\lambda=\ 45^\circ.47'.58''\ ,$$

$$\mu=315.29.45\ ,$$

$$D=\ 91.44.38\ ,$$

à l'orient de Paris.

97. En appliquant au *Problème IX* la méthode approximative qui a été employée ici, et en supprimant x dans $B-x$, et, à plus forte raison, dans $A-x$, l'équation $nA(A-B)p=AB(p-f)+(Af-Bp)x$ deviendra $nhp=p-f$; ce qui donne

$$n=\frac{p-f}{hp}; \quad \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{p-f}{h}\cdot\dfrac{q'}{p}, \quad q=\dfrac{fq'}{p}, \\ z=\dfrac{p-f}{h}\cdot\dfrac{r'}{p}, \quad r=\dfrac{fr'}{p}; \end{array}\right.$$

et on a de plus

$$y^2+z^2=\frac{(p-f)^2}{h^2}, \quad x^2=\frac{(ch+p-f)(ch-p+f)}{h^2}.$$

98. *PROBLÈME XI. Connaissant la latitude du lieu et l'heure de la plus grande phase, on demande la longitude du premier et la quantité de l'autre?*

99. *Solution.* DIONIS DU SÉJOUR (*Mém. de l'acad. des sciences de Paris*, 1765, pag. 306), a attaché quelque importance à ce problème qui, sans aucun emploi de nouveaux principes, se résout facilement à l'aide de nos formules. Le temps étant donné, la longitude α du soleil devra être considérée comme donnée aussi. Il faut en dire autant des lignes q', r', coordonnées du centre de la lune, vu géocentriquement sur le disque solaire, ainsi que de la ligne p, distance géocentrique des centres du soleil et de la lune, égale à $\sqrt{q'^2+r'^2}$.

100. On a de plus les deux équations

$$f^2=q^2+r^2, \quad c^2=x^2+y^2+z^2;$$

qui ne renferment que des quantités inconnues, à l'exception du seul rayon c de la terre. Il faudra d'ailleurs (8) se rappeler (8) les deux équations

$$A(A-B)y=(A-x)Bq'-(B-x)Aq;$$
$$A(A-B)z=(A-x)Br'-(B-x)Ar.$$

101. La condition de la plus grande phase donne $q:r=q':r'=y:z$. Il en résulte

$$q=\frac{fq'}{p}\ ,\quad y=\frac{q'}{p}\sqrt{c^2-x^2}\ ,$$
$$r=\frac{fr'}{r}\ ,\quad z=\frac{r'}{p}\sqrt{c^2-x^2}\ .$$

substituant ces valeurs dans les deux dernières équations (100), on obtiendra celle-ci :

$$A(A-B)\sqrt{c^2-x^2}=(A-x)Bp-(B-x)Af\ ;$$

elle ne renferme plus que les deux seules inconnues f et x.

102. On a de plus les équations déjà connues

$$X=c\,\text{Cos.}\lambda\,\text{Cos.}\mu\ ,$$
$$Y=c\,\text{Cos.}\lambda\,\text{Sin.}\mu\ ,$$
$$Z=c\,\text{Sin.}\lambda\ ;$$

de même que celles-ci :

$$X=x\,\text{Cos.}\alpha\qquad -y\,\text{Sin.}\alpha\ ;$$
$$Y=x\,\text{Cos.}\varepsilon\,\text{Sin.}\alpha+y\,\text{Cos.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha-z\,\text{Sin.}\varepsilon\ ,$$
$$Z=x\,\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Sin.}\alpha+y\,\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha+z\,\text{Cos.}\varepsilon\ .$$

Substituant dans les trois dernières les valeurs de y et z (101), elles deviendront

$$cp\,\text{Cos.}\lambda\,\text{Cos.}\mu=px\,\text{Cos.}\alpha\qquad -q'\,\text{Sin.}\alpha\sqrt{c^2-x^2}\ ,$$
$$cp\,\text{Cos.}\lambda\,\text{Cos.}\mu=px\,\text{Cos.}\varepsilon\,\text{Sin.}\alpha+(q'\,\text{Cos.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha-r'\,\text{Sin.}\varepsilon)\sqrt{c^2-x^2}\ ,$$
$$cp\,\text{Sin.}\lambda\qquad =px\,\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Sin.}\alpha+(q'\,\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha+r'\,\text{Cos.}\varepsilon)\sqrt{c^2-x^2}\ .$$

103. Comme la latitude du lieu est au nombre des quantités connues, la troisième de ces équations ne renfermera que la seule inconnue x. Il faudra donc résoudre cette équation ; mais, pour présenter l'inconnue x sous la forme la plus simple, faisons, pour abréger,

$$A = q'\,\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha + r'\,\text{Cos.}\varepsilon\;;$$

$$B = p\;\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Sin.}\alpha\;,$$

$$C = p\;\text{Sin.}\lambda\;;$$

et enfin, $R^2 = A^2 + B^2 - C^2$. On aura alors

$$(A^2+B^2)x = (BC - AR)c\;,$$

$$(A^2+B^2)\sqrt{c^2-x^2} = (AC+BR)c\;.$$

On pourra remarquer que

$$A^2+C^2 = (q'\,\text{Sin.}\varepsilon + r'\,\text{Cos.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha)^2 + r'^2\,\text{Sin.}^2\alpha\;;$$

104. De la coordonnée x en passera facilement aux deux autres y, z (101). On aura de même la distance des centres f, qu'on tirera de l'équation

$$A(A-B)\sqrt{c^2-x^2} = (A-x)Bp - (B-x)Af\;.$$

En supprimant ici x, dans $A-x$ et $B-y$, ce que la nature du problème nous permet de faire, on aura, pour valeur suffisamment approchée de f, celle qui suit :

$$f = p - h\sqrt{c^2-x^2} = p - \frac{h(AC+BR)}{A^2+B^2}\;;$$

105. Reste donc à déterminer l'angle horaire μ, duquel dépend ensuite la longitude du lieu. En reprenant les trois équations (102), et en divisant la seconde par la première, on trouvera

$$\text{Tang.}\mu = \frac{p\,r'\,\text{Cos.}\varepsilon\,\text{Sin.}\alpha + (q'\,\text{Cos.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha - r'\,\text{Sin.}\varepsilon)\sqrt{c^2-x^2}}{px\,\text{Cos.}\alpha - q'\,\text{Sin.}\alpha\sqrt{c^2-x^2}}\;;$$

106. Pour présenter encore les deux termes de cette fraction sous la forme la plus simple, employons les nouvelles notations a, b, c, pour designer les quantités qui suivent

$$a = q'\,\text{Cos.}\varepsilon - r'\,\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha\;;$$

$$b = q'\,\text{Sin.}\varepsilon + r'\,\text{Cos.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha\ ,$$

$$c = \qquad + r'\,\text{Sin.}\alpha\ ;$$

d'où il résulte

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2\ ,$$

$$a^2 + b^2 = q'^2 + r'^2\,\text{Cos.}^2\alpha\ ,$$

$$b^2 + c^2 = A^2 + B^2\ .$$

En conséquence

$$R^2 = b^2 + c^2 - p^2\,\text{Sin.}^2\lambda = p^2\,\text{Cos.}^2\lambda - a^2 = (b^2 + c^2)\,\text{Cos.}^2\lambda - a^2\,\text{Sin.}^2\lambda.$$

107. A l'aide de ces notations, l'angle horaire μ pourra être déterminé, à l'aide de l'une des trois formules qui suivent :

$$\text{Tang.}\mu = -\frac{ab\,\text{Sin.}\lambda - cR}{ac\,\text{Sin.}\lambda + bR}\ ,$$

$$\text{Sin.}\mu = -\frac{ab\,\text{Sin.}\lambda - cR}{(b^2 + c^2)\,\text{Cos.}\lambda}\ ,$$

$$\text{Cos.}\mu = +\frac{ac\,\text{Sin.}\lambda + bR}{(b^2 + c^2)\,\text{Cos.}\lambda}\ .$$

Le problème sera résolu.

108. *EXEMPLE. On demande, sous la latitude de* 50°, *la position de l'endroit où l'on verra le milieu de l'éclipse au moment du midi vrai de Berlin, qui répond à* $11^h.15'.52''$, *temps vrai de Paris?*

109. On trouvera ici (93), $t = 0{,}816111$, compté depuis huit heures du matin; d'où il résulte

$$q' = M + mt = +1493'',27\ , \qquad p = +3267'',08\ .$$

$$r' = N + nt = +2905'',85\ ,$$

La longitude du soleil sera, au même instant, en vertu des formules connues, $\alpha = 180° + 57°.2'.50''$.

110. On tire de ces données les valeurs numériques suivantes des quantités que nous avons désignées par A, B, C, R (103)

$$A=+2342,15\ ,\quad A^2+B^2=6677192\ ,$$
$$B=-1091,57\ ,\quad R^2=\ 413534\ ,$$
$$C=+2502,73\ ,\quad R=\quad 643\ ,\ 066\ .$$

111. Passant de là à celles que nous avons désignées par a , b , c (106), on trouvera

$$a=+1999,155\ ,$$
$$b=-\ 855,353\ ,\qquad b^2+c^2=6677174\ ,$$
$$c=-2438,354\ ,\qquad a\,\mathrm{Sin.}\lambda=1531,442\ :$$

La latitude $\lambda=50^\circ$, en vertu de l'énoncé du problème.

112. Il en résulte pour Tang.μ les deux valeurs

$$\mathrm{Log.Tang.}\mu=8,4463652\ ;\quad \text{donc}\quad \mu=\ 1^\circ.36'.\ 3''\ ;$$
$$\text{ou Log.Tang.}\mu=0,2120112\ ;\quad \text{ou}\quad \mu=58^\circ.27'.40''\ .$$

Il faudra s'attacher à la seconde des deux valeurs qui, augmentée de 180° , deviendra $\mu=238^\circ.27'.40''$.

113. Le même angle horaire est, en vertu de la formule générale, $\mu=174^\circ.36'.36''+216626''t+D$; ce qui fait, dans le cas actuel, $\mu=223^\circ.43'.7''+D$. La différence des méridiens deviendra ainsi $D=14^\circ.44'.33''$. L'endroit demandé sera donc à près de 15 degrés à l'orient de Paris, sous la latitude boréale de 50°. C'est à très-peu près le méridien de BRESLAU en Silésie. L'éclipse de soleil, au moment du midi vrai à Berlin, sera donc totale à l'endroit qu'on vient de déterminer, et qui se trouve à un degré au nord de Breslau.