ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Solution des deux problèmes proposés à la page 200 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 340-347

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__340_0>

Solution des deux problèmes proposés à la page 200 de ce volume ;

Par M. J. B. Durrande.

I. Deux figures planes, tracées sur deux plans différens, et d'un seul côté de chacun de ces plans seulement, peuvent être égales de deux manières que, dans une multitude de circonstances, on est obligé de bien distinguer. Il peut arriver, en effet, que, pour faire coïncider les deux figures, il faille appliquer les deux plans l'un sur l'autre de manière que ces figures soient toutes deux en dessus ou toutes deux en dessous, ou, ce qui revient au même, de manière que l'*endroit* de l'une soit appliqué contre l'*envers* de l'autre ; ou bien il peut se faire que, pour les faire coïncider, il faille au contraire appliquer les deux plans où elles sont tracées l'un contre l'autre de telle sorte que les deux figures soient l'une et l'autre en dedans ou l'une et l'autre en dehors de ces deux plans. Une gravure et la planche d'où on l'a tirée sont dans le dernier de ces deux cas : deux épreuves d'une même gravure sont dans le premier.

Pour distinguer ces deux cas par des dénominations différentes, nous dirons que deux figures égales, tracées sur un même plan, sont *identiques*, lorsqu'il suffira de faire glisser ou tourner l'une d'elles sur ce plan, sans le quitter, pour l'amener à couvrir exactement l'autre. Nous dirons au contraire que deux figures égales, tracées sur un même plan sont *symétriques*, lorsqu'on ne pourra les amener à coïncider qu'en renversant préalablement l'une d'elles, de manière que la face qu'elle montrait d'abord extérieurement soit appliquée contre le plan. Il est aisé de voir, 1.° que deux figures identiques ou symétriques par rapport à une troisième sont identiques entre elles ; 2.° mais que si, de deux figures, l'une est identique et l'autre symétrique par rapport à une troisième, elles seront symetriques l'une à l'autre.

Il importe de remarquer qu'il y a des figures égales qui sont à la fois identiques et symétriques l'une à l'autre : ce sont celles qu'une droite partage en deux parties égales symétriquement disposées par rapport à elle ; de telle sorte que cette droite soit perpendiculaire sur le milieu de toute droite qui joindra deux points homologues des deux parties ; c'est, par exemple, le cas du *triangle isocèle*, et c'est encore le cas d'un quadrilatère formé de deux triangles isocèles, opposés base à base. Le dessein géométral de la façade d'un édifice tout-à-fait régulier est également dans ce cas : l'épreuve d'un tel dessein ne diffère aucunement de la planche d'où elle est tirée. Nous dirons à l'avenir qu'une figure est *symétrique par rapport à elle-même*, lorsqu'elle se trouvera dans ce cas.

Il importe encore de remarquer que, si l'on décompose deux polygones égaux en triangles, par des diagonales homologues ; suivant que les polygones seront identiques on symétriques, les triangles homologues seront eux-mêmes identiques ou symétriques.

D'après cette dernière remarque le premier des deux problèmes proposés peut être réduit à ce qui suit :

PROBLÈME. Décomposer un triangle donné quelconque en parties symétriques par rapport à elles-mêmes ?

Solution. Du centre du cercle inscrit au triangle soient abaissées des perpendiculaires sur ses côtés ; ces perpendiculaires seront égales, et les pieds de deux quelconques seront également distants du sommet de l'angle sur les côtés duquel elles tomberont.

Ces perpendiculaires diviseront donc le triangle en trois quadrilatères dont chacun sera formé de deux triangles isocèles, opposés base à base, et qui conséquemment seront symétriques à eux-mêmes ; le problème sera donc complètement résolu.

Lorsque le triangle dont il s'agit est rectangle, le problème peut être fort simplement résolu, en joignant le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypothénuse par une droite qui divise le triangle en deux triangles isocèles, et conséquemment symétriques par rapport à eux-mêmes.

Si le triangle est acutangle; en joignant le centre du cercle circonscrit aux trois sommets par des droites; ces droites le diviseront en trois triangles isocèles, et conséquemment symétriques par rapport à eux-mêmes.

Si enfin le triangle est obtusangle; la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle obtus sur le côté opposé le divisera en deux triangles rectangles dont chacun pourra ensuite être ultérieurement divisé en deux triangles isocèles et conséquemment symétriques par rapport à eux-memes. On aura donc en tout quatre de ces triangles.

Mais la première solution que nous avons donnée a l'avantage de s'appliquer uniformément et sans distinction à tous les cas.

On voit, par ce qui précède, que, deux polygones symétriques, chacun de m côtés, étant donnés, on peut toujours décomposer l'un d'eux en $3(m-2)$ parties au plus qui, différemment disposées entre elles, forment un polygone identique avec l'autre.

II. Étendons présentement cette théorie aux figures tracées sur une sphère; elles présentent exactement les mêmes distinctions, mais avec cette circonstance particulière qu'ici deux figures symétriques ne peuvent, en aucune sorte, être superposées, du moins en général. La raison en est que, lorsqu'on veut tenter la superposition de deux pareilles figures, elles opposent leur convexité ou leur concavité l'une à l'autre, de sorte qu'elles ne peuvent se convenir que dans leurs sommets ou dans un point de leur intérieur.

Mais il est sur la sphère, comme sur un plan, des figures *symétriques à elles-mêmes*; ce sont celles que le plan d'un grand cercle divise en deux parties égales, tellement disposées par rapport à ce plan qu'il se trouve à la fois perpendiculaire sur le milieu de toutes les droites qui joignent leurs points homologues. De ce nombre est, en particulier, le triangle sphérique isocèle ; et de ce nombre est encore le quadrilatère sphérique formé de deux triangles sphériques isocèles, opposés base à base.

On peut remarquer de plus que, si l'on décompose deux polygones sphériques égaux en triangles sphériques, par des diagonales homologues ; suivant que les polygones seront identiques ou symétriques, les triangles sphériques homologues seront eux-mêmes identiques ou symétriques.

En conséquence, le problème où l'on demanderait de couvrir un polygone sphérique avec les parties d'un autre polygone sphérique qui lui serait symétriques se réduit au suivant :

PROBLÈME. Décomposer un triangle sphérique quelconque en parties symétriques par rapport à elles-mêmes ?

Solution. La solution de ce problème est tout-à-fait analogue à celle que nous avons donnée relativement au triangle rectiligne. On voit en effet que, si l'on abaisse du pôle du cercle inscrit des arcs de grands cercles perpendiculaires sur les trois côtés du triangle, ces arcs le partageront en trois quadrilatères sphériques symétriques à eux-mêmes, comme étant tous trois formés de deux triangles sphériques isocèles, opposés base à base.

On pourrait encore chercher à imiter ici les autres solutions que nous avons données relativement au triangle rectiligne ; mais on ignore dans quel cas le pôle du cercle circonscrit au triangle sphérique tombe dans ce triangle, sur l'un de ses côtés ou hors de lui, et il n'est pas démontré que, dans ce dernier cas, le triangle puisse toujours être décomposé en d'autres pour lesquels le pôle du cercle circonscrit ne soit point extérieur.

Il résulte de ceci que deux polygones de m côtés, symétriques l'un à l'autre, étant tracés sur une même sphère, on peut toujours décomposer l'un d'eux en $3(m-2)$ parties au plus qui, disposées convenablement, couvriront exactement l'autre.

III. Il est presque superflu de faire remarquer que tout ce que nous venons de dire (II) s'applique, sans restrictions, aux angles polyèdres égaux, lesquels peuvent aussi être tantôt identiques et tantôt symétriques. Nous aurons seulement à observer ici que les développemens de deux angles polyèdres symétriques sont toujours superposables, soit par un côté soit par l'autre; de sorte que deux tels angles polyèdres ne diffèrent uniquement que par la partie de leur développement qui en a formé la surface intérieure, lorsqu'on a plié ces développemens pour les former.

Ainsi, en résumé, il y a des angles polyèdres symétriques à eux-mêmes; et ce sont ceux qu'un plan passant par leur sommet partage en deux parties égales tellement situées, que ce plan est à la fois perpendiculaire sur le milieu de toutes les droites qui joignent leurs points homologues. Tels sont, en particulier, l'angle trièdre isocèle et l'angle tétraèdre formé de la réunion de deux angles trièdres isocèles, opposés base à base. Enfin, si l'on décompose deux angles polyèdres égaux en un même nombre d'angles trièdres, par des plans diagonaux homologues; suivant que ces angles polyèdres seront identiques ou symétriques, les angles trièdres résultant de leur décomposition seront eux-mêmes identiques ou symétriques.

On voit d'après cela que, si l'on veut remplir un angle polyèdre avec les parties d'un autre angle polyèdre qui lui est symétrique, tout se réduira à savoir décomposer un angle trièdre en parties symétriques à elles-mêmes. Pour résoudre ce dernier problème il suffit de conduire par l'axe du cône inscrit des plans perpendiculaires aux faces; ces plans partageront l'angle trièdre en trois angles tétraèdres symétriques à eux-mêmes, par ce qui précède.

On pourrait aussi recourir ici à la considération du cône circonscrit; mais il faudrait savoir auparavant dans quel cas l'axe d'un tel cône tombe dans l'intérieur de l'angle trièdre sur l'une de ses faces ou extérieurement; et il faudrait en outre qu'il fût démontré que, dans ce dernier cas, l'angle trièdre est toujours décomposable en d'autres tels que, pour aucun d'eux, l'axe du cône circonscrit n'est extérieur.

II

Il résulte de ceci que, deux angles polyèdres symétriques de m faces chacun étant donnés, on peut toujours décomposer l'un d'eux en $3(m-2)$ parties au plus qui, convenablement disposées entre elles, remplissent exactement l'autre.

IV. Passons enfin à la considération des corps égaux et appelons encore corps *identiques* ceux qui sont superposables, et peuvent conséquemment être conçus comme ayant été coulés dans un moule commun. Appelons au contraire corps *symétriques*, ceux qui, malgré leur parfaite égalité, ne sauraient être superposés, ni conséquemment conçus coulés dans un moule commun. On peut citer nos deux mains comme l'exemple le plus commun des corps de ce dernier genre; quelque parfaite égalité qu'on suppose exister entre elles, jamais une main droite ne saurait être convenablement remplacée par une main gauche; aussi le gant d'une main ne peut-il servir à l'autre qu'en le retournant, le dedans en dehors.

Observons encore qu'ici un corps peut être symétrique à lui-même; c'est ce qui arrive toutes les fois qu'un plan le divise en deux parties égales, tellement disposées l'une par rapport à l'autre, que ce plan est à la fois perpendiculaire sur le milieu de toutes les droites qui joignent leurs points homologues. C'est, par exemple, le cas d'un tétraèdre dont deux faces sont des triangles isocèles ayant leur base commune; et c'est encore le cas d'une pyramide quadrangulaire qui, ayant pour base un quadrilatère symétrique à lui-même, serait décomposable, par un plan diagonal, en deux semblables tétraèdres.

Observons enfin que, si l'on décompose deux polyèdres égaux quelconques en un même nombre de tétraèdres, par des plans diagonaux homologues; suivant que les deux polyèdres seront identiques ou symétriques, les tétraèdres résultant de leur décomposition seront eux-mêmes identiques ou symétriques.

Il résulte évidemment de là que la question qui consiste à décomposer un polyèdre quelconque en parties qui, disposées entre elles d'une autre manière, forment un polyèdre symétrique par rapport au premier, se réduit, en dernière analise, au problème suivant :

PROBLÈME. Décomposer un tétraèdre donné quelconque en parties symétriques par rapport à elles-mêmes ?

Solution. Soient A, B, C, D les sommets du tétraèdre, et O le centre de la sphère inscrite; de ce centre soient abaissées sur les faces des perpendiculaires dont les pieds soient respectivement A′, B′, C′, D′; par ces perpendiculaires, prises deux à deux, soient fait passés six plans; ces plans diviseront le tetraèdre en quatre *exaèdres octogones* à faces quadrilatères. Bornons-nous à considérer l'un d'eux : celui qui contient le sommet D, et dont conséquemment les trois arêtes de l'angle opposé sont OA′, OB′, OC′. Nommons a, b, c les trois sommets non encore désignés; en sorte que les arêtes Da, Db, Dc soient respectivement opposées à celles que nous venons de nommer.

Menons la diagonale DO, ainsi que les diagonales des faces DA′, DB′, DC′; par la première et par chacune des autres soient conduits trois plans; ces plans diviseront l'exaèdre en trois pyramides triangulaires ayant leur sommet commun en D, et ayant pour bases les trois faces de l'angle O. Bornons-nous à considérer l'une d'elles : celle dont la base est OA′cB′.

A′ et B′ étant les points de contact de la sphère inscrite avec deux des faces du tétraèdre, il s'ensuit d'abord que OA′=OB′; il s'ensuit en outre que DA′=DB′, comme tangentes menées à une sphère d'un même point extérieur; et, comme d'ailleurs les deux triangles DcA′, DcB′, qui ont le côté Dc commun, sont l'un et l'autre rectangles en c; il s'ensuit que cB′=cA′.

Ainsi notre pyramide quadrangulaire se trouve être du genre de celles que nous avons signalées plus haut comme étant symétriques à elles-mêmes; et, comme on prouverait la même chose des deux autres, il s'ensuit que notre exaèdre est composé de trois parties symétriques à elles-mêmes; et, attendu qu'on en peut dire autant des trois autres exaèdres, il en résulte finalement que notre tétraèdre est décomposable en douze pyramides quadrangulaires symétriques à elles-mêmes.

On pourrait, à l'exemple de M. Legendre, recourir aussi à la considération de la sphère circonscrite, laquelle, dans certains cas, offrirait le moyen de décomposer le tétraèdre en douze autres, symétriques à eux-mêmes; mais on ne sait pas dans quel cas le centre d'une telle sphère est intérieur au tétraèdre, à sa surface ou hors de lui, et il n'est point démontré que, dans ce dernier cas, le tétraèdre puisse être décomposé en d'autres pour chacun desquels le centre de la sphère circonscrite ne soit point extérieur; tandis que notre procédé ne souffre absolument aucune sorte d'exception.

Il est aisé de conclure de ceci que tout polyèdre est décomposable en douze fois autant de parties symétriques à elles-mêmes qu'il peut fournir de tétraèdres par sa décomposition.

Remarque I. Au moyen de la théorie qui précède, on pourrait, en géométrie, démontrer l'égalité des triangles sphériques, angles trièdres et tétraèdres par la superposition; sauf ensuite à prouver, comme ci-dessus, que, lorsque cette superposition ne peut avoir lieu en masse, on peut du moins l'effectuer par parties.

Remarque II. De même que l'on distingue deux sortes d'égalité, on peut aussi distinguer deux sortes de similitude; elles donnent exactement lieu aux mêmes considérations.