ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Questions résolues. Démonstration des deux théorèmes énoncés à la page 172 de ce volume, et de quelques autres théorèmes analogues

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 326-339
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__326_1>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1815-1816, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes énoncés à la page 172 de ce volume, et de quelques autres théorèmes analogues;

Par M. J. B. DURRANDE.

SOIENT a, b, c les cosinus des angles que forme avec trois axes rectangulaires l'axe d'un cône droit qui a son sommet à l'origine, et dont l'angle générateur est r; ce qui donnera

$$a^2+b^2+c^2=1 \ . \qquad (1)$$

les équations de cet axe seront

$$cx=az \ , \quad cy=bz \ ; \qquad (2)$$

Soient

$$Cx=Az \ , \quad Cy=Bz \ , \qquad (3)$$

les équations d'une génératrice quelconque A, B, C étant les cosinns des angles que forme cette génératrice avec les mêmes axes ; ce qui donne

$$A^2+B^2+C^2=1 \ . \qquad (4)$$

A, B, C, seront indéterminés ; et le cosinus de l'angle de la génératrice avec l'axe sera, en ayant égard aux conditions (1 et 4),

$$aA+bB+cC \ ;$$

mais cet angle doit être constant et égal à r ; donc

$$aA+bB+cC=\text{Cos}.r \ . \qquad (5)$$

D'un autre côté, les équations (3 et 4) donnent

$$A=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ , \quad B=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ , \quad C=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ ;$$

substituant donc dans l'équation (5), quarrant et chassant le dénominateur, il viendra finalement pour l'équation du cône dont il s'agit

$$(ax+by+cz)^2=(x^2+y^2+z^2)\text{Cos.}^2r \ . \qquad (C)$$

Désignons ce cône par C. Pour un autre cône C', de même sommet que le premier, l'équation sera

$$(a'x+b'y+c'z)^2=(x^2+y^2+z^2)\text{Cos.}^2r' \ , \qquad (C')$$

avec la condition

$$a'^2+b'^2+c'^2=1 \ . \qquad (6)$$

Nos deux cônes C, C' se coupent, en général, suivant deux droites passant par l'origine ; et toute combinaison de leurs équations doit être l'équation d'une surface passant par ces deux droites : telle est donc, en particulier, l'équation qu'on obtient en multipliant celles-là en croix, et qui devient, par la suppression du facteur commun et l'extraction de la racine quarrée

$$(ax+by+cz)\text{Cos}.r'=\pm(a'x+b'y+c'z)\text{Cos}.r\ .$$

Cette équation appartient, comme on le voit, à deux plans passant l'un et l'autre par l'origine, et dont l'un seulement contient les intersections des deux cônes ; on le reconnaîtra facilement, en supposant pour un moment que les deux cônes deviennent égaux et coïncidens ; l'équation doit alors se réduire à $0=0$; ce qui ne peut avoir lieu qu'en prenant le signe supérieur. Ainsi, il est certain que l'équation du plan qui contient les deux intersections des deux cônes est

$$(ax+by+cz)\text{Cos}.r'=(a'x+b'y+c'z)\text{Cos}.r\ . \qquad (k'')$$

Cette équation est aussi celle de leur plan tangent commun, lorsqu'il se touche ; et on voit, en outre, que dans le cas où, n'ayant que le sommet commun, ils sont tout-à-fait extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre, le plan (k'') n'en existe pas moins. Nous nommerons ce plan (k''), à l'avenir, le *Plan radical* des deux cônes C et C'.

Concevons un troisième cône C'' ayant même sommet que les deux autres et ayant son axe dans l'axe des z ; ce nouveau cône aura aussi des plans radicaux (k' et k) avec C et C' ; et on déduira les équations de ces plans de celle du plan (k''), en supposant successivement, dans celle-ci, que C' et ensuite C devient C'' ; c'est-à-dire, en y supposant d'abord $a'=0$, $b'=0$, $c'=1$, $r'=r''$, puis ensuite $a=0$, $b=0$, $c=1$, $r=r''$. Cela donnera

$$(a\,x+b\,y+c\,z)\text{Cos}.r''=z\text{Cos}.r\ , \qquad (k')$$

$$(a'x+b'y+c'z)\text{Cos}.r''=z\text{Cos}.r'\ . \qquad (k)$$

Toute combinaison de ces deux équations appartiendra à un plan

plan qui contiendra l'intersection des plans (k et k'); et puisque, par l'élimination de r'' entre elles, on retombe sur l'équation (k''), il en résulte le théorème suivant :

THÉORÈME I. Les plans radicaux de trois cônes droits de même sommet, pris deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite.

Nous appellerons à l'avenir cette droite l'*axe radical* des trois cônes.

Corollaire. Donc si l'on conçoit que l'un des cônes seulement, ayant toujours d'ailleurs son sommet commun avec les deux autres, varie de grandeur et de situation dans l'espace, l'intersection de ses plans radicaux, déterminés par rapport aux deux autres, variable comme lui, ne sortira pas néanmoins d'un même plan, lequel sera le plan radical de ces deux-ci.

Si l'on conçoit une sphère qui ait son centre au sommet commun des trois cônes, leurs intersections avec elles seront de petits cercles; tandis que les intersections des plans radicaux avec elle seront de grands cercles, que l'on pourra appeler *axes radicaux* des deux cercles auxquels chacun d'eux sera relatif. L'axe radical de deux cercles sera en particulier l'arc de grand cercle qui passera par leur leur intersection, lorsque ces deux cercles se couperont; et l'on aura ce théorème :

THÉORÈME II. Les axes radicaux de trois cercles quelconques d'une même sphère, pris deux à deux, se coupent tous trois en un même point. (*)

Nous appellerons à l'avenir ce point le *centre radical* de trois cercles.

Corollaire. Donc, si l'on conçoit que l'un des cercles seulement varie de grandeur et de situation sur la sphère, le point de concours de ses axes radicaux, déterminés par rapport aux deux autres, variables comme lui, ne sortira pas néanmoins d'un grand cercle, lequel sera l'axe radical de ces deux-ci.

(*) C'est le premier des deux théorèmes de la page 172

De là résulte un moyen facile d'obtenir l'axe radical de deux cercles d'une sphere, lorsque ces cercles ne se coupent pas. Il consiste à décrire d'abord un cercle qui coupe ces deux-là ; en conduisant deux grands cercles par leurs intersections avec lui, ces grands cercles se couperont en un point de l'axe radical cherche ; renouvelant donc l'opération pour un autre cercle différent du premier et coupant encore les deux autres, on obtiendra un second point de cet axe radical, et il ne sera plus question que de faire passer un grand cercle par ces deux points (*). On peut donc aussi facilement obtenir le centre radical de trois cercles d'une sphère.

Tout ce que nous venons de dire, relativement à la sphère, étant

(*) On demandera peut-être comment on peut faire passer un arc de grand cercle par deux points donnés sur une sphère ? il est aisé de voir que cette question se réduit à déterminer l'un de ses pôles ; et il est tout aussi facile de voir que ce pôle est à l'intersection de deux arcs décrits de ces deux points comme pôles, et avec une ouverture de compas égale à l'hypothénuse d'un triangle-rectangle isocèle, dont les deux côtés de l'angle droit sont égaux au rayon de la sphère.

Mais, dira-t-on, ceci suppose que l'on connaît le rayon de la sphère ; et comment pourra-t-on le déterminer ? Voici la méthode, très-simple, que THÉODOSE indique pour cela, dans ses *Sphériques* ; elle porte avec elle sa démonstration :

Décrivez sur la sphère un cercle quelconque, en gardant en réserve l'ouverture de compas qui aura servi à le décrire. Marquez sur la circonférence de ce cercle trois points arbitraires, dont vous prendrez, avec le compas, les distances deux à deux. De ces trois distances faites, sur un plan, les trois côtés d'un triangle rectiligne, auquel ensuite vous circonscrirez un cercle, dont le rayon sera évidemment égal à celui du cercle tracé sur la sphère. Construisez ensuite un triangle-rectangle dont l'hypothénuse soit votre ouverture de compas, mise en réserve, et l'un des côtés de l'angle droit le rayon de votre cercle. Prolongez l'autre côté de l'angle droit, jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire menée à l'hypothénuse du sommet opposé. Vous formerez ainsi un plus grand triangle-rectangle dont le premier fera partie, et dont l'hypothénuse sera le diamètre de la sphère.

On a lieu d'être surpris qu'un problème aussi majeur et d'une construction si facile ne soit traité dans aucun de nos livres élémentaires.

J. D. G.

indépendant de son rayon, doit être vrai aussi pour le plan, qui n'est autre chose qu'une sphère dont le rayon est infini; on a donc le théorème suivant :

THÉORÈME III. Les axes radicaux de trois cercles tracés sur un même plan, et pris successivement deux à deux, se coupent tous trois en un même point.

Corollaire. Donc, si l'on conçoit que l'un seulement des trois cercles varie à la fois de grandeur et de situation sur le plan, le point de concours de ses axes radicaux, déterminés par rapport aux deux autres, variable comme lui, ne sortira pas néanmoins d'une ligne droite, laquelle sera l'axe radical de ces deux-ci.

On peut donc, en opérant comme il a été dit pour la sphère, construire facilement l'axe radical de deux cercles qui ne se coupent pas.

Si l'on conçoit que l'on fasse tourner le système de deux cercles et de leur axe radical autour de la droite qui joint leurs centres, les deux cercles engendreront des sphères, et l'axe radical engendrera un plan qu'on pourra appeler le *plan radical* de ces deux sphères. Or, de là et de ce qui précède, résulte le théorème suivant :

THÉORÈME IV. Les plans radicaux de trois sphères, considérées successivement deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite.

Cette droite, évidemment perpendiculaire au plan qui contient les trois centres, est ce que nous appellerons à l'avenir l'*axe radical* des trois sphères.

De là il est encore aisé de conclure ce théorème-ci :

THÉORÈME V. Les six plans radicaux qui naissent de la considération de quatre sphères prises deux à deux, et les quatre axes radicaux qui naissent de la considération des mêmes sphères prises trois à trois, concourent en un même point.

Ce point est ce que nous appellerons le *centre radical* des quatre sphères.

Corollaire. Donc, si l'on conçoit que l'une seulement de ces sphères varie à la fois de grandeur et de situation dans l'espace, le point de concours de ses plans radicaux, déterminés par rapport aux trois autres, variable comme elle, ne sortira pas néanmoins d'une ligne droite, laquelle sera l'axe radical de ces trois-ci.

Retournons présentement à nos trois cônes. Supposons que C et C'' soient tangents l'un à l'autre; leur plan radical (k') deviendra leur plan tangent commun, dont l'intersection avec le plan des axes déterminera la ligne de contact des deux cones. Mais, l'équation de ce dernier plan est

$$ay=bx\ ,$$

et sa combinaison avec l'équation (k') donne

$$(a^2+b^2)x\mathrm{Cos}.r''=az(\mathrm{Cos}.r-c\mathrm{Cos}.r'')\ ,$$
$$(a^2+b^2)y\mathrm{Cos}.r''=bz(\mathrm{Cos}.r-c\mathrm{Cos}.r'')\ ;$$

ainsi, voilà les deux équations de la ligne de contact des deux cônes C et C''. Mais, l'angle de leurs axes devant être égal à la somme ou à la différence de leurs angles générateurs, on doit avoir

$$c=\mathrm{Cos}.(r''+r)\ ,\quad \text{d'où}\quad a^2+b^2=1-c^2=\mathrm{Sin}.^2(r''+r)\ ;$$

r devant être pris *positivement* ou *négativement*, suivant que les deux cônes se touchent *extérieurement* ou *intérieurement*. On a d'après cela

$$\mathrm{Cos}.r-c\mathrm{Cos}.r''=\mathrm{Cos}.r-\mathrm{Cos}.r''.\mathrm{Cos}.(r''+r)=\mathrm{Sin}.r''\mathrm{Sin}.(r''+r);$$

au moyen de quoi nos deux équations deviennent

$$x=\frac{az\mathrm{Tang}.r''}{\mathrm{Sin}.(r''+r)}\ ,\qquad y=\frac{bz\mathrm{Tang}.r''}{\mathrm{Sin}.(r''+r)}\ . \qquad (t')$$

On trouvera semblablement, pour les équations de la ligne de contact de C'' et C'

$$x=\frac{a'z\mathrm{Tang}.r''}{\mathrm{Sin}.(r''+r')}\ ,\qquad y=\frac{b'z\mathrm{Tang}.r''}{\mathrm{Sin}.(r''+r')}\ . \qquad (t)$$

Si l'on conduit un plan par ces deux droites, son équation sera

$$b\text{Sin.}(r''+r')-b'\text{Sin.}(r''+r)\}x-\{a'\text{Sin.}(r''+r)-a\text{Sin.}(r''+r')\}y+(ab'-ba')\text{Tang.}r''=0\ ;$$

ou, en développant

$$\begin{aligned}&\{(b\text{Sin.}r'-b'\text{Sin.}r)\text{Cos.}r''+(b\text{Cos.}r'-b'\text{Cos.}r)\text{Sin.}r''\}x\\ &-\{a\text{Sin.}r'-a'\text{Sin.}r)\text{Cos.}r''+(a\text{Cos.}r'-a'\text{Cos.}r)\text{Sin.}r''\}y \qquad (\text{T}'')\\ &+(ab'-ba')z\text{Tang.}r''=0\ .\end{aligned}$$

D'un autre côté, l'équation du plan qui contient les axes de C et C' est

$$(bc'-cb')x+(ca'-ac')y+(ab'-ba')z=0\ ; \qquad (7)$$

laquelle, à cause de

$$c=\text{Cos.}(r''+r)\ ; \qquad c'=\text{Cos.}(r''+r')\ ,$$

devient, en substituant et développant,

$$\begin{aligned}&\{(b\text{Sin.}r'-b'\text{Sin.}r)\text{Sin.}r''-(b\text{Cos.}r'-b'\text{Cos.}r)\text{Cos.}r''\}x\\ &-\{(a\text{Sin.}r'-a'\text{Sin.}r)\text{Sin.}r''-(a\text{Cos.}r'-a'\text{Cos.}r)\text{Cos.}r''\}y\\ &-(ab'-ba')z=0\ .\end{aligned}$$

Ces deux plans se coupent, en général; et, toute équation déduite de la combinaison des leurs doit appartenir à une surface qui contient leur intersection : telle sera donc, en particulier celle qu'on obtiendra en ajoutant à l'équation (T$''$) le produit de cette dernière par $\text{Tang.}r''$; cette équation est

$$(b\text{Sin.}r'-b'\text{Sin.}r)x=(a\text{Sin.}r'-a'\text{Sin.}r)y\ ; \qquad (8)$$

c'est donc celle d'un plan qui concourt en une même droite avec les deux autres, et dont conséquemment la ligne d'intersection est déterminée par cette dernière équation et par l'équation (7) ; or, elles ne contiennent, ni l'une ni l'autre, rien de relatif au cône C'', et seraient encore les mêmes si r'' était infini ; on a donc ce théorème :

THÉORÈME VI. Si un cône variable de grandeur est constamment tangent à deux autres cônes, de grandeur et de situation invariable, le plan qui contiendra ses lignes de contact avec eux, *variable comme lui, coupera toujours néanmoins le plan de leurs axes suivant une même droite, laquelle ne sera autre que l'intersection de ce dernier plan avec le plan tangent commun aux deux cônes.*

Nous appellerons à l'avenir cette droite l'*axe de similitude* des deux cônes fixes.

En considérant le sommet commun des trois cônes comme le centre d'une sphère d'un rayon quelconque, on obtient cet autre théorème :

THÉORÈME VIII. Si un cercle tracé sur une sphère, variable de grandeur, est constamment tangent à deux autres cercles de la même sphère, de grandeur et de situation invariable, l'arc de grand cercle conduit par ses points de contact avec eux, variable comme lui, coupera toujours néanmoins l'arc de grand cercle qui joint leurs pôles en un même point, lequel ne sera autre que l'intersection de cet arc de grand cercle avec l'arc de grand cercle tangent à la fois aux deux cercles.

Ce point, que nous appellerons à l'avenir le *centre de similitude* des deux cercles, est facile à assigner, lorsqu'on peut conduire un arc de grand cercle qui les touche tous deux. Dans le cas contraire, en décrivant un petit cercle qui les touche l'un et l'autre, et conduisant ensuite un grand cercle par les deux points de contact, ce grand cercle contiendra le centre de similitude; en répétant donc la même opération pour un autre petit cercle, touchant encore les deux cercles dont il s'agit, on obtiendra un nouveau grand cercle, dont l'intersection avec le premier donnera le point cherché. On doit seulement remarquer qu'ici on aura deux centres de similitude placés aux deux extrémités d'un même diamètre de la sphère.

Tout ceci étant indépendant de la grandeur du rayon de la sphère devra être vrai aussi lorsque ce rayon sera infini, c'est-à-dire, lorsque la sphère deviendra un plan; on a donc ce théorème :

THÉORÈME VIII. Si un cercle variable de grandeur sur un plan est constamment tangent à deux autres cercles, de grandeur *et de situation invariable, tracés sur le même plan ; la droite conduite par ses points de contact avec eux, variable comme lui, coupera toujours néanmoins la droite qui joint les centres en un même point, lequel ne sera autre que celui où cette droite est coupée par la tangente commune aux deux cercles.*

Ce point, que nous appellerons à l'avenir le *centre de similitude* des deux cercles, peut être déterminé, lors même qu'on ne peut mener à ces deux cercles une tangente commune, en suivant exactement ce que nous venons de dire pour deux cercles d'une sphère.

De ce théorème il est encore facile de déduire le suivant :

THÉORÈME IX. Si une sphère variable de grandeur est constamment tangente à deux autres sphères, de grandeur et de situation invariable, la droite conduite par les points de contact, variable comme elle, coupera toujours néanmoins la droite qui joint les centres, et la coupera toujours en un même point, lequel ne sera autre que le sommet du cône circonscrit à la fois aux deux sphères fixes.

Nous appellerons à l'avenir ce point le *centre de similitude* des deux sphères.

Revenons encore à nos cônes. D'après ce qui a été dit ci-dessus, en obtiendra l'axe de similitude des deux cônes C, C', en combinant entre elles les deux équations (7 et 8), ce qui donnera

$$x=\frac{a\mathrm{Sin}.r'-a'\mathrm{Sin}.r}{c\mathrm{Sin}.r'-c'\mathrm{Sin}.r}z\,,\quad y=\frac{b\mathrm{Sin}.r'-b'\mathrm{Sin}.r}{c\mathrm{Sin}.r'-c'\mathrm{Sin}.r}z\,. \qquad (e'')$$

Mais il faut remarquer que tout ceci est relatif à l'hypothèse où le cône C'' touche les deux autres extérieurement. Ces formules conviennent également au cas où ce même cône les enveloppe tous deux, car elles ne changent pas par le changement simultané des signes de r et r'. En conséquence, la droite (e'') est celle suivant laquelle le plan des axes de C et C' est coupé par leurs plans tangens *extérieurs*. Pour obtenir celles suivant lesquelles le même plan est coupé par leurs plans tangens communs *intérieurs*, il suffira de changer, dans ces formules, le signe de l'un quelconque des deux angles r, r', ce qui donnera également

$$x=\frac{a\text{Sin}.r'+a'\text{Sin}.r}{c\text{Sin}.r'+c'\text{Sin}.r}z\,,\quad y=\frac{b\text{Sin}.r'+b'\text{Sin}.r}{c\text{Sin}.r'+c'\text{Sin}.r}z\,. \qquad (i'')$$

Pour distinguer ces deux axes de similitude l'un de l'autre, nous appellerons le premier axe de similitude *externe*, et le second axe de similitude *interne*. Nous admettrons des dénominateurs analogues, soit pour deux cercles tracés sur une même sphère ou sur un plan; soit pour deux sphères dans l'espace.

En considérant ensuite successivement le système des deux cercles C, C'' et celui des deux cercles C', C'', on devra trouver également à chaque système un axe de similitude externe et un axe de similitude interne. Désignons respectivement ces axes par (e') et (i') pour le premier système, et par (e) et (i) pour le second.

On conclura les équations de (e') et (i') de celles de (e'') et (i''), en supposant, dans celles-ci, que C' devient C''; c'est-à-dire, en supposant $a'=0$, $b'=0$, $c'=1$, $r'=r''$. On conclura semblablement les équations de (e) et (i) de celles de (e'') et (i''), en supposant, dans celles-ci, que C devient C''; c'est-à-dire, en supposant $a=0$, $b=0$, $c=1$, $r=r''$. Il viendra ainsi

$$x=\frac{a\text{Sin}.r''}{c\text{Sin}.r''-\text{Sin}\,r}z\,,\quad y=\frac{b\text{Sin}.r''}{c\text{Sin}.r''-\text{Sin}.r}z\,; \qquad (e')$$

$$x=\frac{a\text{Sin}.r''}{c\text{Sin}.r''+\text{Sin}.r}z\,,\quad y=\frac{b\text{Sin}.r''}{c\text{Sin}.r''+\text{Sin}.r}z\,; \qquad (i')$$

$$x=\frac{a'\text{Sin}.r''}{c'\text{Sin}.r''-\text{Sin}.r'}z\,,\quad y=\frac{b'\text{Sin}.r''}{c'\text{Sin}.r''-\text{Sin}.r'}z\,; \qquad (e)$$

$$x=\frac{a'\text{Sin}.r''}{c'\text{Sin}.r''+\text{Sin}.r'}z\,,\quad y=\frac{b'\text{Sin}.r''}{c'\text{Sin}.r''+\text{Sin}.r'}z\,; \qquad (i)$$

Si l'on fait passer un plan par les droites (e), (e') son équation sera

$\{(bc'-cb')$

$$\{(bc'-cb')\text{Sin}.r''-(b\text{Sin}.r'-b'\text{Sin}.r)\}x$$
$$-\{(ac'-ca')\text{Sin}.r''-(a\text{Sin}.r'-a'\text{Sin}.r)\}y \qquad (E)$$
$$+(ab'-ba')z\text{Sin}.r''=0\ ;$$

si l'on veut savoir suivant quelle droite ce plan coupe celui des axes des cônes C, C', il faudra combiner son équation avec celle de ce dernier plan, qui est, comme nous l'avons déjà vu

$$(bc'-cb')x+(ca'-ac')y+(ab'-ba')z=0\ ; \qquad (7)$$

mais en retranchant de la première le produit de cette dernière par $\text{Sin}.r''$, elle se réduit simplement à

$$(b\text{Sin}.r'-b'\text{Sin}.r)x=(a\text{Sin}.r'-a'\text{Sin}.r)y\ ;$$

équation qui a évidemment lieu en même temps que les équations (e''), d'où il suit que cette dernière droite est sur le plan (E)

Mais, puisque (i), (i'), (i'') se déduisent respectivement de (e), (e'), (e''), par le seul changement du signe r ou de r', on doit en conclure que les trois équations qu'on déduira de l'équation (E) par les changemens successif et simultané de ces signes, sont les équations de trois plans (I), (I'), (I''), dont le premier contient (e), (i'), (i''), le second (i), (e'), (i'') et le troisième (i), (i'), (e''). On a donc le théorème que voici :

THÉORÈME X. Les axes de similitude externes de trois cônes de même sommet, considérés successivement deux à deux, sont tous trois sur un même plan : chacun d'eux est sur un même plan avec deux des axes de similitude internes ; de sorte que ces six axes sont sur quatre plans.

On peut appeler les quatre plans qui contiennent les six axes de similitude de trois cônes les *plans de similitude* de ces trois cônes. Un seulement est *externe*, et les trois autres sont *internes*.

En considérant le sommet commun des trois cônes comme le centre d'une sphère, d'un rayon quelconque, on obtiendra cet autre théorème :

THÉORÈME XI. Les centres de similitude externes de trois cercles d'une sphère, considérés successivement deux à deux, sont tous trois sur un même arc de grand cercle : chacun d'eux est sur un même arc de grand cercle avec deux des centres de similitude internes ; de sorte que ces six centres sont sur quatre arcs de grands cercles. (*)

On peut appeler ces grands cercles les *axes de similitude* des trois cercles dont il s'agit ; un seul est *externe*, et les trois autres sont *internes*.

La vérité de ce théorème étant indépendante de la grandeur du rayon de la sphère, il sera vrai encore lorsque ce rayon sera infini ; on a donc cet autre théorème :

THÉORÈME XII. Les centres de similitude externes de trois cercles tracés sur un même plan, et considérés successivement deux à deux, sont tous trois sur une même ligne droite : chacun d'eux est en ligne droite avec deux des centres de similitude internes ; de sorte que ces six centres sont sur quatre droites.

On peut appeler ces droites les *axes de similitude* des trois cercles ; un seul est *externe* et les trois autres sont *internes*.

De là il est encore aisé de déduire les trois théorèmes que voici :

THÉORÈME XIII. Les centres de similitude externes de trois sphères, prises successivement deux à deux, sont tous trois situés sur une même ligne droite, contenue dans le plan de leurs centres : chacun d'eux est en ligne droite avec deux des centres de similitude internes, de sorte que ces six points, tous situés sur le plan des centres, sont sur quatre droites tracées sur ce plan.

(*) C'est le deuxième théorème de la page 172.

On peut appeler ces quatre droites les *axes de similitude* des trois sphères; un seul est *externe*, et les trois autres sont *internes*.

THÉORÈME XIV. *Si une sphère variable de grandeur dans l'espace est constamment tangente à trois sphères de grandeur et de situation invariable ; le plan conduit par ses points de contact avec elles, variable comme elle, coupera toujours néanmoins le plan des centres suivant une même droite, laquelle ne sera autre que l'axe de similitude des trois sphères.*

On doit remarquer que l'axe dont il s'agit est *externe*, lorsque la sphère variable touche extérieurement ou enveloppe à la fois les trois sphères fixes ; et qu'au contraire il est *interne* lorsque la sphère variable touche l'une des sphères fixes extérieurement et enveloppe les deux autres, ou encore lorsque, touchant ces deux-ci extérieurement, elle enveloppe la première.

THÉORÈME XV. *Les six centres de similitude externes de quatre sphères considérées successivement deux à deux, et conséquemment les quatre axes de similitude externes de ces mêmes sphères considérées successivement trois à trois sont situés sur un même plan : chacun de ces axes est dans un même plan avec trois des six centres de similitude internes ; de sorte que les douze centres sont sur seize droites qui sont elles-mêmes situées sur cinq plans.*

On peut appeler ces plans les *plans de similitude* des quatre sphères ; un seul est *externe* tandis que les quatre autres sont *internes*.

Les théorèmes que nous venons d'énoncer sont connus, pour la plupart ; mais il n'était pas inutile de faire voir comment, en établissant entre eux une subordination convenable, on parvient facilement à les démontrer. Ce qu'on trouve à la page 349 du IV.e volume de ce recueil suffira pour en faire sentir l'importance et l'utilité.