FRÉGIER

Géométrie analitique. Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 321-326
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__321_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre ;

Par M. Frégier, ancien élève de l'école polytechnique.

J'ai démontré, à la page 229 de ce volume, quatre théorèmes assez remarquables, relatifs aux lignes et surfaces du second ordre. Mais j'ai remarqué postérieurement que le premier et le troisième n'étaient que des cas très-particuliers de deux autres théorèmes beaucoup plus généraux. Ce sont ces derniers que je me propose ici de démontrer.

On a vu (pag. 130) qu'en prenant respectivement pour axes des x et des y la tangente et la normale en un point quelconque d'une ligne du second ordre, désignant par N la longueur de la partie de cette normale interceptée par la courbe, par P le rayon de courbure ; et supposant que l'équation de la tangente à l'extrémité de la normale opposée à l'origine fût

$$y=Ax+N\ ;$$

nous avons vu, dis-je, que l'équation de la courbe était alors

$$Nx^2+2Py(y-Ax-N)=0\ . \qquad (1)$$

Nous avons vu, en outre, qu'en menant par l'origine deux droites D, D', ayant respectivement pour équations, savoir :

$$\text{D}\ ,\quad ay=bx\ ;\quad \text{D}'\ ,\quad a'y=b'x\ , \tag{2}$$

ce qui permet de supposer

$$a^2+b^2=1\ ,\quad a'^2+b'^2=1\ , \tag{3}$$

l'équation de la corde C qui joint les points de rencontre de ces droites avec la courbe est

$$\{N(ab'+ba')-2APbb'\}x+(2Pbb'-Naa')y=2NPbb'\ ; \tag{4}$$

d'où nous avons conclu que cette corde rencontre l'axe des y, c'est-à-dire, la normale, en un point pour lequel on doit avoir

$$y=\frac{2NPbb'}{2Pbb'-Naa'}\ . \tag{5}$$

Cela posé, concevons une seconde ligne du second ordre dont les axes des coordonnées soient les diamètres principaux ; et concevons de plus que D, D' soient deux diamètres conjugués quelconques de cette seconde courbe ; nous exprimerons cette circonstance par l'équation

$$\alpha aa'+\beta bb'=0\ ; \tag{6}$$

dans laquelle α et β sont deux constantes, ne dépendant que des dimensions de la seconde courbe.

Or, si l'on élimine bb' de la formule (5), au moyen de la relation (6), aa' disparaîtra de lui-même, et il viendra

$$y=\frac{2\alpha NP}{\beta N-2\alpha P}\ ; \tag{7}$$

quantité constante. De là résulte ce théorème :

THÉORÈME I. Si l'on conçoit, sur un même plan, deux lignes quelconques du second ordre, telles que le centre de la seconde soit un point quelconque du périmètre de la première, et que ses diamètres principaux soient dirigés suivant la tangente et la normale à cette première courbe au point dont il s'agit ; de quelque manière que l'on mène deux diamètres conjugués à la seconde courbe, *la corde de la première qui joindra leurs points de rencontre avec elle coupera constamment la normale au même point*; *d'où il suit encore, par la propriété connue des pôles, que les tangentes aux extrémités de cette corde concourront toujours sur une même droite.*

La forme du résultat (7) prouve, en outre, que, pourvu que la seconde courbe demeure constamment semblable à elle-même, elle pourra varier de grandeur, sans que la corde C cesse pour cela de couper la normale au même point.

Ce théorème est sur-tout remarquable, lorsque la seconde courbe est un cercle; tous les diamètres conjugués sont alors rectangulaires, et il en résulte notre théorème de la page 231, duquel nous avons déduit le moyen de construire, avec un équerre pour tout instrument, la tangente et la normale en un point quelconque d'une ligne du second ordre.

Nous avons vu (page 234) qu'en prenant respectivement pour axes des x, des y et des z les deux tangentes principales et la normale en un point quelconque d'une surface du second ordre, désignant par N la longueur de la partie de cette normale interceptée par la surface, par P et Q les deux rayons de courbure principaux, et supposant que l'équation du plan tangent à l'extrémité de la normale opposée à l'origine fût

$$z=Ax+By+N\ ;$$

nous avons vu, dis-je, que l'équation de la surface était alors

$$N(Qx^2+Py^2)+2PQz(z-Ax-By-N)=0\ . \qquad (1)$$

Nous avons vu, en outre, qu'en menant par l'origine trois droites D, D′, D″, ayant respectivement pour équations, savoir :

$$\text{D}\left\{\begin{array}{l} cx=az\ , \\ cy=bz\ ; \end{array}\right. \quad \text{D}'\left\{\begin{array}{l} c'x=a'z\ , \\ c'y=b'z\ ; \end{array}\right. \quad \text{D}''\left\{\begin{array}{l} c''x=a''z\ , \\ c''y=b''z\ ; \end{array}\right. \qquad (2)$$

ce qui permet de supposer

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2=1\ , \\ a'^2+b'^2+c'^2=1\ , \\ a''^2+b''^2+c''^2=1\ ; \end{array}\right\} (3$$

l'équation du plan C qui joint les points de rencontre de ces droites avec la surface est

$$\left\{\begin{array}{l} cc'(bc'-cb')(NQa''^2+NPb''^2-2APQa''c'') \\ +c'c''(b'c''-c'b'')(NQa^2+NPb^2-2APQac) \\ +c''c(b''c-c''b)(NQa'^2+NPb'^2-2APQa'c') \end{array}\right\} x$$

$$+\left\{\begin{array}{l} cc'(ca'-ac')(NQa''^2+NPb''^2-2BPQb''c'') \\ +c'c''(c'a''-a'c'')(NQa^2+NPb^2-2BPQbc) \\ +c''c(c''a-a''c)(NQa'^2+NPb'^2-2BPQb'c') \end{array}\right\} y$$

$$+\left\{\begin{array}{l} cc'(ab'-ba')(NQa''^2+NPb''^2+2PQc''^2) \\ +c'c''(a'b''-b'a'')(NQa''^2+NPb^2+2PQc^2) \\ +c''c(a''b-b''a)(NQa''^2+NPQb'^2+2PQc'^2) \end{array}\right\} z$$

$$=2NPQcc'c''(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')\ ; \quad (4)$$

d'où nous avons conclu que ce plan rencontre l'axe des z, c'est-à-dire, la normale, en un point dont on obtient la distance à l'origine, en posant, dans cette équation $x=0$ et $y=0$.

En posant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l} a^2c'c''(a'b''-b'a'')+a'^2c''c(a''b-b''a)+a''^2cc'(ab'-ba')=d\ , \\ b^2c'c''(a'b''-b'a'')+b'^2c''c(a''b-b''a)+b''^2cc'(ab'-ba')=e\ , \\ c^2c'c''(a'b''-b'a'')+c'^2c'c''(a''b-b''a)+c''^2cc'(ab'-ba')=f\ ; \end{array}\right\} (5)$$

cette distance sera donnée par la formule

$$z=\frac{2fNPQ}{dNQ+eNP+2fPQ}\ . \qquad (6)$$

Cela posé, concevons une seconde surface du second ordre dont les axes des coordonnées soient les diamètres principaux ; et concevons de plus que D , D$'$, D$''$ soient trois diamètres conjugués quelconques de cette seconde surface ; nous exprimerons cette circonstance par les trois équations de condition

$$\left.\begin{array}{l}\alpha a'a''+\beta b'b''+\gamma c'c''=0\ ,\\ \alpha a''a\ +\beta b''b\ +\gamma c''c\ =0\ ,\\ \alpha a\ a'+\beta b\ b'+\gamma c\ c'=0\ ,\end{array}\right\}(7)$$

dans lesquelles α, β, γ sont trois constantes ne dépendant que des dimensions de la seconde surface.

Si l'on prend successivement les différences deux à deux des produits respectifs de ces equations d'abord par b , b' , b'', puis par a , a' , a'' , il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\alpha a''(a\ b'-b\ a')=\gamma c''(b\ c'-c\ b')\ ,\\ \alpha a\ (a'\ b''-b'a'')=\gamma c\ (b'\ c''-c'\ b'')\ ,\\ \alpha a'\ (a''b\ -b''a\ )=\gamma c'\ (b''c\ -c''b\ )\ ;\end{array}\right\}(8)$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta b''(a\ b'-b\ a')=\gamma c''(c\ a'-a\ c')\ ,\\ \beta b\ (a'\ b''-b'\ a'')=\gamma c\ (c'\ a''-a'\ c'')\ ,\\ \beta b'\ (a''b\ -b''a\ )=\gamma c'\ (c''a\ -a''c\ )\ .\end{array}\right\}(9)$$

En prenant la somme des produits respectifs des équations (8) par $a''cc'$, $ac'c''$, $a'c''c$, et la somme des produits respectifs des équations (9) par $b''cc'$, $bc'c''$, $b'c''c$, et ayant égard aux équations (5), il vient simplement

$$\alpha d=\gamma f\ ,\quad \beta e=\gamma f\ ; \qquad (10)$$

éliminant enfin d et e de la formule (6) ; au moyen de ces deux dernières équations , f disparaîtra aussi de lui-même , et il viendra

$$z=\frac{2\alpha\beta NPQ}{\beta\gamma NQ+\alpha\gamma NP+2\alpha\beta PQ}\ ; \qquad (11)$$

quantité constante. De là résulte ce théorème :

THÉORÈME II. Si l'on conçoit, dans l'espace, deux surfaces quelconques du second ordre , telles que le centre de la seconde *soit un point quelconque de la première, et que ses diamètres principaux soient dirigés suivant les deux tangentes principales et la normale à cette première surface, au point dont il s'agit; de quelque manière que l'on mène trois diamètres conjugués à la seconde surface, le plan qui contiendra leurs intersections avec la première coupera constamment la normale au même point, d'où il suit encore, par la propriété connue des pôles, que le cône circonscrit à la première surface de manière qu'il la touche suivant son intersection avec le plan dont il s'agit, aura toujours son sommet sur un même plan.*

La forme du résultat (11) montre en outre que, pourvu que la seconde surface demeure constamment semblable à elle-même, elle pourra varier de grandeur sans que le plan C cesse pour cela de couper la normale au même point.

Ce théorème est sur-tout remarquable, lorsque la seconde surface est une sphère; tous les systèmes de diamètres conjugués sont alors rectangulaires, et il en résulte notre théorème de la page 237, parfaitemeut analogue à celui de la page 231.