DU BOURGUET

Géométrie transcendante. Théorie géométrique de la cycloïde

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 29-45

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__29_0>

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Théorie géométrique de la cycloïde,

Par M. Du Bourguet, ancien capitaine de vaisseau, Chevalier de l'Ordre royal et militaire de St-Louis, professeur de mathématiques spéciales au collége de Louis-le-Grand.

Si les géomètres n'avaient jamais en vue dans leurs recherches que les applications pratiques dont elles peuvent être susceptibles, ils mettraient, sans doute, beaucoup moins de soin et de prix à obtenir, sous forme finie, une multitude d'expressions que l'on peut aisément avoir en séries très-convergentes, et propres conséquemment à fournir des résultats incomparablement plus approchés que, dans aucun cas, l'état physique des choses ne le réclame, et même ne le permet. De quelle utilité pratique, par exemple, pourrait être la solution rigoureuse du problème de la rectification de la circonférence, aujourd'hui que nos séries nous ont fourni au-delà des 150 premiers chiffres décimaux du rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre; lorsque sur-tout on considère que les 20 premiers de ces chiffres sont plus que suffisans pour déterminer, à moins de l'épaisseur d'un cheveu près, la circonférence d'un cercle qui embrasserait tout notre système planétaire. A quoi l'on peut ajouter encore que les expressions finies elles-mêmes, dès qu'elles ne sont point à la fois algébriques et rationnelles, ne sont susceptibles, tout comme les séries, que d'évaluation approchée.

Toutefois, on ne saurait disconvenir que, du moins aux yeux des théoriciens, les expressions sous forme finie ne soient plus satisfaisantes què les séries illimitées, quelque convergentes qu'on les suppose d'ailleurs. Outre que ces sortes d'expressions s'introduisent et se combinent plus facilement dans les calculs, elles sont souvent susceptibles d'un énoncé concis et élégant; et c'est sans doute ce qui les fait rechercher encore, lors même qu'elles ne sont point susceptibles d'évaluation immédiate, ainsi qu'il arrive pour la formule de Bernoulli $\varpi = \frac{\text{Log.}(-1)}{\sqrt{-1}}$. On peut remarquer enfin que la découverte de l'expression finie d'une quantité, déjà connue par les séries, est un pas de plus dans la solution de l'important et difficile problème de la sommation des suites.

Par ces motifs, nous osons espérer que les géomètres voudront bien accueillir, avec quelque interêt et bienveillance, l'opuscule que l'on va lire. Il présente, dans un cadre peu étendu, un système complet de formules finies pour la rectification et la quadrature indéfinie des arcs et segmens de cycloïdes, pour la quadrature des surfaces et la cubature des corps engendrés par la révolution de ces arcs et segmens autour de chacune des quatre lignes les plus remarquables de la courbe, enfin pour la determination des centres de gravité des unes et des autres. Plusieurs de ces expressions n'avaient point été données jusqu'ici, et on paraissait même incliner à penser que quelques-unes d'entre elles ne pouvaient l'être que par les séries. On va voir qu'elles sont toutes susceptibles d'une forme finie.

I. Pour éviter au lecteur l'embarras de feuilleter des traités de calcul intégral, ou de suppléer à ce qu'on n'y trouve pas, et pour lui offrir en même temps le moyen de vérifier facilement nos calculs, nous croyons convenable de présenter brièvement ici les seules formules d'intégration, peu nombreuses d'ailleurs, qui nous seront nécessaires pour parvenir à notre but. Nous sous-entendrons les constantes.

1.° On a d'abord immédiatement

$$\int dz\,\mathrm{Sin.}^m z\,\mathrm{Cos.}z=+\frac{1}{m+1}\mathrm{Sin.}^{m+1}z\,, \qquad \text{(A)}$$

$$\int dz\,\mathrm{Cos.}^m z\,\mathrm{Sin.}z=-\frac{1}{m+1}\mathrm{Cos.}^{m+1}z\,. \qquad \text{(B)}$$

2.° Si l'on a à intégrer des formules de l'une des deux formes

$$dz\mathrm{Sin.}^{2m+1}z\,, \qquad dz\mathrm{Cos.}^{2m+1}z\,,$$

on les transformera dans les suivantes

$$dz\mathrm{Sin.}z(1-\mathrm{Cos.}^2z)^m\,, \qquad dz\mathrm{Cos.}z(1-\mathrm{Sin.}^2z)^m\,,$$

lesquels, par leur développement, donneront une suite de termes rentrant dans le cas (1.°).

3.° Si les formules à intégrer sont de l'une des deux formes

$$dz\mathrm{Sin.}^m z\mathrm{Cos.}^{2n+1}z\,, \qquad dz\mathrm{Cos.}^m z\mathrm{Sin.}^{2n+1}z\,,$$

on les transformera en celles-ci

$$dz\mathrm{Sin.}^m z\mathrm{Cos.}z(1-\mathrm{Sin.}^2z)^n\,, \qquad dz\mathrm{Cos.}^m z\mathrm{Sin.}z(1-\mathrm{Cos.}^2z)^n\,,$$

lesquelles, par leur développement, donneront une suite de termes rentrant également dans le cas (1.°).

4.° Si les formules à intégrer sont

$$dz\mathrm{Sin.}^{2m}z\,, \qquad dz\mathrm{Cos.}^{2m}z\,,$$

en aura recours à l'intégration par parties, qui donne, comme l'on sait,

$$\int dz\mathrm{Sin.}^{2m}z=-\frac{1}{2m}\mathrm{Sin.}^{2m-1}z\mathrm{Cos.}z+\frac{2m-1}{2m}\int dz\mathrm{Sin.}^{2(m-1)}z\,, \qquad \text{(C)}$$

$$\int dz\mathrm{Cos.}^{2m}z=+\frac{1}{2m}\mathrm{Cos.}^{2m-1}z\mathrm{Sin.}z+\frac{2m-1}{2m}\int dz\mathrm{Cos.}^{2(m-1)}z\,; \qquad \text{(D)}$$

formules au moyen desquelles on parviendra, par degrés, à ramener les intégrales cherchées à $\int dz=z$.

5.° Si les formules à intégrer sont de l'une des deux formes

$$\mathrm{d}z\,\mathrm{Sin.}^m z\,\mathrm{Cos.}^{2n} z\ , \qquad \mathrm{d}z\,\mathrm{Cos.}^m z\,\mathrm{Sin.}^{2n} z\ ,$$

on leur substituera leurs équivalentes

$$\mathrm{d}z\,\mathrm{Sin.}^m z(1-\mathrm{Sin.}^2 z)^n\ , \qquad \mathrm{d}z\,\mathrm{Cos.}^m z(1-\mathrm{Cos.}^2 z)^n\ ,$$

lesquelles, par le développement, donneront une suite de termes qui rentreront dans l'un des cas (2.°) et (4.°).

On sait donc, par ce qui précède, intégrer, sous forme finie, toute formule de la forme

$$\mathrm{d}z\,\mathrm{Sin.}^m z\,\mathrm{Cos.}^n z\ ,$$

m et n étant des nombres entiers positifs quelconques ou zéro.

6.° Soit présentement une formule de la forme

$$z^k\mathrm{d}z\,\mathrm{Sin.}^m z\,\mathrm{Cos.}^n z\ ;$$

l'intégration par parties donnera

$$\int z^k\mathrm{d}z\,\mathrm{Sin.}^m z\,\mathrm{Cos.}^n z = z\int z^{k-1}\mathrm{d}z\,\mathrm{Sin.}^m z\,\mathrm{Cos.}^n z - \int \mathrm{d}z\int z^{k-1}\mathrm{d}z\,\mathrm{Sin.}^m z\,\mathrm{Cos.}^n z\ ; \quad \text{(E)}$$

au moyen de quoi on ramenera, par degrés, l'intégration demandée à $\int \mathrm{d}z\,\mathrm{Sin.}^m z\,\mathrm{Cos.}^n z$, que nous avons traitée dans les numéros précédens.

II. Soient AO, AO′ respectivement (fig. 1) la demi-base et la montée d'une cycloïde, et soient menées O′A′, OA′, respectivement parallèles à ces deux droites. Par un quelconque M des points de la courbe, soient menées aux mêmes droites les parallèles QQ′, PP′ terminées aux quatre droites. Soit C le lieu du centre du cercle générateur, pour sa position où le point décrivant est en M, et soit DD′ son diamètre parallèle à AO′, coupant QQ′ en N; soient enfin menées MD, MC, MD′ et soient $CD=CM=CD'=r$.

Nous prendrons

$$OP = QM = x\ , \qquad MP = QO = y\ ,$$
$$O'P' = Q'M = x'\ , \qquad MP' = Q'O' = y'\ ,$$

au moyen de quoi nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} x+x'=\varpi r\ , \\ y+y'=2r\ ; \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}x+\mathrm{d}x'=0\ , \\ \mathrm{d}y+\mathrm{d}y'=0\ , \end{array}\right.$$

Nous poserons en outre

$$\text{Ang.DCM}=2z\ ;\qquad \text{Ang.D}'\text{CM}=2z'\ ,$$

ce qni donnera

$$2(z+z')=\varpi\ ,\qquad \text{d'où}\qquad \mathrm{d}z+\mathrm{d}z'=0.$$

Cela posé, nous aurons

$$\begin{array}{ll} \textit{Arc}\,\text{MD}\ =2rz\ , & \textit{Cord.}\text{MD}\ =2r\text{Sin.}z\ =2r\text{Cos.}z'\ , \\ \textit{Arc.}\text{MD}'=2rz'\ , & \textit{Cord.}\text{MD}'=2r\text{Sin.}z'=2r\text{Cos.}z\ . \end{array}$$

Nous aurons encore

$$\text{PD}=\text{P}'\text{D}'=\text{MN}=r\text{Sin.}2z=2r\text{Sin.}z\text{Cos.}z=2r\text{Sin.}z'\text{Cos.}z'\ ,$$

$$\text{CN}=r\text{Cos.}2z=r(\text{Cos.}^2z-\text{Sin.}^2z)=r(\text{Sin.}^2z'-\text{Cos.}^2z')\ ;$$

mais, par la nature de la cycloïde,

$$\text{OP}=\text{OD}-\text{DP}=\textit{Arc.}\text{MD}-\text{MN}\ ;$$

$$\text{MP}=\text{ND}=\text{CD}-\text{CN}\ ;$$

donc, en substituant,

$$\left.\begin{array}{l} x=2r(z-\text{Sin.}z\text{Cos.}z)\ , \\ y=2r\text{Sin.}^2z \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} x'=2r(z'+\text{Sin.}z'\text{Cos.}z')\ , \\ y'=2r\text{Sin.}^2z'\ ; \end{array}\right.$$

donc encore

$$\begin{array}{ll} \mathrm{d}x=4r\mathrm{d}z\text{Sin.}^2z\ , & \mathrm{d}x'=4r\mathrm{d}z'\text{Cos.}^2z'\ , \\ \mathrm{d}y=4r\mathrm{d}z\text{Sin.}z\text{Cos.}z\ , & \mathrm{d}y'=4r\mathrm{d}z'\text{Sin.}z'\text{Cos.}z'\ . \end{array}$$

De là on passerait facilement aux équations primitive et différentielle de la courbe, soit en x et y soit en x' et y'; mais elles ne nous seront pas nécessaires.

Pour la commodité typographique, nous poserons encore

$$\mathrm{Cos}.z=t\ ,\quad \mathrm{Sin}.z=u\ ,\quad \text{d'où}\quad t^2+u^2=1\ ,$$
$$\mathrm{Cos}.z'=t'\ ,\quad \mathrm{Sin}.z'=u'\ ,\quad \text{d'où}\quad t'^2+u'^2=1\ ;$$

ce qui donnera

$$x=2r(z-tu)\ ,\quad y=2ru^2\ ,\quad \mathrm{d}x=4ru^2\mathrm{d}z\ ,\quad \mathrm{d}y=4rtu\,\mathrm{d}z\ ,$$
$$x'=2r(z'+t'u')\ ,\quad y'=2ru'^2\ ,\quad \mathrm{d}x'=4rt'^2\mathrm{d}z'\ ,\quad \mathrm{d}y'=4rt'u'\mathrm{d}z'.$$

III. *Cherchons d'abord les longueurs des arcs indéfinis* MO, MO′ ?

L'élément du premier de ces arcs est

$$\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=4ru\mathrm{d}z\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec z, est (I)

$$Arc.\mathrm{MO}=4r(1-t)=2(\mathrm{D'D}-\mathrm{D'M}). \qquad (a)$$

De là

$$Arc.\mathrm{OO'}=4r=2\mathrm{DD'}\ ,$$

et par conséquent

$$Arc.\ \mathrm{MO'}=4ru'=2\mathrm{MD'}\ ; \qquad (b)$$

ce qui met en évidence la propriété de la développée. On pourra évidemment, par ce qui précède, obtenir la longueur d'un arc quelconque de la courbe.

IV. *Cherchons les surfaces engendrées par l'arc* OM, *tournant successivement autour de* OP *et* OQ ?

L'élément de la première surface est

$$2\varpi y\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=16\varpi r^2u^3\mathrm{d}z\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec z, est (I)

$$\tfrac{16}{3}\varpi r^2(1-t)^2(2+t). \qquad (c)$$

De là on conclura, pour l'expression de la surface engendrée par l'arc entier OO′, autour de OA

$$\tfrac{32}{3}\varpi r^2=\tfrac{32}{3}\mathrm{Cer}.r.$$

L'élément de la seconde surface est

$$2\varpi x\sqrt{dx^2+dy^2}=16\varpi r^2 u dz(z-tu),$$

dont l'intégrale, commençant avec z, est (I)

$$\tfrac{16}{3}\varpi r^2\{u(3-u^2)-3tz\}. \qquad (d)$$

De là on conclura, pour la surface engendrée par l'arc entier OO', tournant autour de OA',

$$\tfrac{32}{3}\varpi r^2=\tfrac{32}{3}\,\mathrm{Cer}.r.$$

Il est très-remarquable que la surface engendrée par l'arc OO' est toujours de même étendue, soit que cet arc tourne autour de OA ou qu'il tourne autour de OA'. On pourra évidemment, par ce qui précède, obtenir la surface engendrée par un arc quelconque de la courbe, tournant autour de OA ou OA'

V. *Cherchons les coordonnées du centre de gravité de chacun des deux arcs indéfinis* MO *et* MO'?

Soient X, Y les coordonnées, pour l'origine O, du centre de gravité du premier de ces deux arcs; soient X', Y' les coordonnees, pour l'origine O', du centre de gravité du second.

Suivant la *règle centrobarique*, X et Y seront les quotiens respectifs des formules (d) et (c) par la formule (a) multipliée par 2ϖ; de sorte qu'on aura

$$\left.\begin{array}{l} X=\dfrac{2r\{u(3-u^2)-3tz\}}{3(1-t)}, \\ Y=\tfrac{2}{3}r(1-t)(2+t). \end{array}\right\} \qquad (e)$$

Dans le cas où il s'agira de l'arc entier OO', on aura

$$X=Y=\tfrac{4}{3}r.$$

Or, on a, en général

$$Mom.\mathrm{MO'}=Mom.\mathrm{OO'}-Mom.\mathrm{MO};$$

prenant donc successivement O'A et O'A' pour axes des momens, il viendra

$$X'.4ru'=4r(\varpi r-\tfrac{4}{3}r)-4r(1-u')\left\{\varpi r-\frac{2r[t'(3-t'^2)-3u'z]}{3(t-u')}\right\};$$

$$Y'.4ru'=4r(2r-\tfrac{4}{3}r)-4r(1-u')\{2r-\tfrac{2}{3}r(1-u')(2+u')\};$$

d'où on tire, toutes réductions faites,

$$\left.\begin{array}{l} X'=\dfrac{2r\{3u'z'-(1-t')^2(2+t')\}}{3u'}, \\ Y'=\tfrac{2}{3}ru'^2=\tfrac{1}{3}\text{O}'\text{Q}'. \end{array}\right\} \quad (f)$$

Cette dernière formule prouve que le centre de gravité de tout arc de cycloïde qui a son milieu à son sommet O′ est au tiers de sa flèche, à partir de ce sommet. D'après les précédens résultats, la recherche du centre de gravité d'un arc quelconque de cycloïde ne saurait offrir de difficulté.

VI. *Cherchons les surfaces engendrées par l'arc* MO′, *tournant autour de* O′A′ *ou* O′A ?

Suivant la *règle centrobarique*, ces surfaces seront les produits respectifs de la formule (b) par $2\varpi Y'$ et $2\varpi X'$, ce qui donnera

$$\tfrac{16}{3}\varpi r^2u'^3=\tfrac{4}{3}.2\varpi.\text{MP}.\tfrac{1}{2}Cord.\text{MD}', \qquad (g)$$

$$\tfrac{16}{3}\varpi r^2\{3u'z'-(1-t')^2(2+t')\}. \qquad (h)$$

La première sera donc les $\frac{4}{3}$ de la surface engendrée par la tangente MD′ tournant autour du même axe.

S'il s'agit de l'arc entier OO′, on aura, pour la première surface,

$$\tfrac{16}{3}\varpi r^2=\tfrac{4}{3}Arc.\text{OA};$$

c'est-à-dire, la moitié de la surface engendrée par le même arc autour de OA. On aura ensuite, pour la seconde

$$\tfrac{8}{3}\varpi r^2(3\varpi-4)=4\varpi r.2\varpi r-\tfrac{32}{3}\varpi r^2;$$

résultat qui prouve (IV) que la somme des surfaces engendrées par la demi-cycloïde OO′, tournant successivement autour de AO′ et OA′ est égale à la surface convexe du cylindre engendré par le rectangle circonscrit à la cycloïde entière, tournant autour de sa base.

base. Au moyen de ce qui précède, on obtiendra facilement la surface engendrée par un arc quelconque de la courbe, tournant autour de O′A′ ou O′A, ou même autour d'une droite quelconque, puisque le centre de gravité de cet arc sera assignable.

VII. *Cherchons les centres de gravité des surfaces engendrées par* OM *tournant autour de* OA *ou* OA′ ?

Nous avons déjà vu (IV) que les élémens de ces deux surfaces sont respectivement

$$2\varpi y\sqrt{dx^2+dy^2}\ , \qquad 2\varpi x\sqrt{dx^2+dy^2}\ ;$$

d'où il suit que leur moment commun, par rapport aux plans conduits par O, perpendiculairement aux axes de rotation, est

$$2\varpi xy\sqrt{dx^2+dy^2}=32\varpi r^3u^3dz(z-tu)\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec z, est (I)

$$\tfrac{32}{45}\varpi r^3\{u(30+5u^2-9u^4)-15tz(2+u^2)\}\ ;$$

divisant donc cette intégrale successivement par les deux formules (c) et (d), nous aurons pour les distances du point O aux centres de gravité des deux surfaces,

$$\frac{2r\{u(30+5u^2-9u^4)-15tz(2+u^2)\}}{15(1-t)^2(2+t^2)}\ , \qquad (k)$$

$$\frac{2r\{u(30+5u^2-9u^4)-15tz(2+u^2)\}}{15\{u(3-u^2)-3tz\}}\ . \qquad (l)$$

Dans le cas où il sera question des surfaces engendrées par la révolution de l'arc entier OO′, ces deux expressions deviendront également

$$\tfrac{26}{15}r=\tfrac{13}{15}\text{OA}'\ .$$

On pourra facilement, d'après ces résultats, trouver le centre de gravité de la surface engendrée par un arc quelconque de la courbe, tournant autour de OA ou OA′.

VIII. Cherchons les centres de gravité des surfaces engendrées par l'arc MO′, *tournant autour de* O′A′ *et* O′A ?

Ces surfaces ayant pour élémens respectifs

$$2\varpi y'\sqrt{dx'^2+dy'^2}\ ,\quad 2\varpi x'\sqrt{dx'^2+dy'^2}\ ,$$

le moment commun de ces élémens, par rapport aux plans conduits par O′, perpendiculairement aux axes, sera

$$2\varpi x'y'\sqrt{dx'^2+dy'^2}=32\varpi r^3t'u'^2dz'(z'+t'u')\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec z', est (I)

$$\tfrac{32}{45}\varpi r^3(1-t')\{15u'z'(1+t')-(1-t')(4-7t'-18t'^2-9t'^3)\}\ ;$$

divisant donc successivement cette intégrale par les deux formules (g) et (h), on aura, pour les distances du point O′ aux centres de gravité des deux surfaces

$$\frac{2r\{15u'z'(1+t')-(1-t')(4-7t'-18t'^2-9t'^3)\}}{15u'(1+t')}\ ,\qquad (m)$$

$$\frac{2r(1-t')\{15u'z'(1+t')-(1-t')(4-7t'-18t'^2-9t'^3)\}}{15\{3u'z'-(1-t')^2(2+t')\}}\ .\qquad (n)$$

S'il s'agit des surfaces décrites par l'arc entier O′O, ces formules deviendront respectivement,

$$\varpi r-\tfrac{8}{15}r=O'A'-\tfrac{4}{15}A'O\ ,\qquad \tfrac{2}{15}r\,.\,\frac{15\varpi-8}{3\varpi-4}\ .$$

La première prouve que la distance du point A′ au centre de gravité de la surface décrite par O′O autour de O′A′ et les $\frac{4}{15}$ de A′O, et non point les $\frac{4}{9}$ de cette droite, comme quelques auteurs l'ont écrit. On peut, d'après ce qui précède, trouver le centre de gravité de la surface engendrée par un arc quelconque de la courbe, tournant autour de O′A′ ou O′A.

IX. *Cherchons les aires des quatre segmens* OPM, OQM, O′P′M, O′Q′M?

L'élément du segment OPM est

$$ydx=8r^2u^4dz\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec z, est (I)

$$OPM=r^2\{3z-tu(3+2u^2)\}\ .\qquad (p)$$

On aura ensuite

$$OQM = xy - OPM\,,$$

c'est-à-dire ;

$$OQM = r^2\{tu(3-2u^2)-z(3-4u^2)\}\,. \qquad (q)$$

De là on conclura

$$OAO' = \tfrac{3}{2}\varpi r^2 = \tfrac{3}{2}\,\text{Cerc}.r\,, \quad O'A'O' = \tfrac{1}{2}\varpi r^2 = \tfrac{1}{2}\,\text{Cerc}.r\,;$$

c'est-à-dire, que l'aire de la cycloïde entière est triple de celle du cercle générateur. On a en outre

$$O'P'M = O'A'O - OQM - QA'P'M\,,$$

$$O'Q'M = O'A\,O - OPM - Q'A\,P\,M\,;$$

c'est-à-dire ;

$$O'P'M = r^2\{z'+t'u'(1-2t'^2)\}\,, \qquad (r)$$

$$O'Q'M = r^2\{z'(3-4t'^2)+t'u'(3-2t'^2)\}\,. \qquad (s)$$

De tout cela on déduira facilement l'aire de toute surface plane terminée par des lignes droites et par des arcs de cycloïdes.

X. *Cherchons les volumes des corps engendrés par la révolution des segmens* OPM, OQM, *tournant autour de* OP *et* OQ, *respectivement ?*

L'élément du premier de ces deux corps est

$$\varpi y^2 dx = 16\varpi r^3 u^6 dz\,,$$

dont l'intégrale, commençant avec z, est (I)

$$\tfrac{1}{3}\varpi r^3\{15z - tu(15+10u^2+8u^4)\}\,. \qquad (aa)$$

D'après cela, le volume du corps engendré par la révolution du segment entier OAO', autour de OA, sera

$$\tfrac{5}{2}\varpi^2 r^3 = \tfrac{5}{8}\,OA\,.\,\text{Cerc}.OA'\,;$$

c'est-à-dire, les $\frac{5}{8}$ du volume cylindre engendré par la révolution du rectangle OA'O'A autour de OA.

L'élément de l'autre corps est

$$\varpi x^2 dy = 16\varpi r^2 tu dz(z-tu)^2 \ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec z, est (I)

$$\tfrac{2}{3}\varpi r^2\{6tuz(3-zu^2)-3z^2(3-4u^2)-u^2)9-9u^2+4u^4)\} \ . \qquad (bb)$$

D'après cela, le volume du corps engendré par la révolution du segment entier OA′O′, autour de OA′, aura pour expression

$$\tfrac{2}{6}\varpi r^3(3\varpi^2-16) = \tfrac{1}{4}\mathrm{OA'}\,.\,Cerc.\mathrm{OA}-2Sph.r \ ;$$

c'est-à-dire, le quart du cylindre engendré par le rectangle OAO′A′ tournant autour de OA′, moins deux sphères ayant même rayon que le cercle générateur. A l'aide de ces résultats on pourra toujours trouver le volume du corps engendré par un segment quelconque de la courbe, tournant autour de OA ou OA′.

XI. *Cherchons le centre de gravité de chacun des quatre segmens* OPM, OQM, O′P′M, O′Q′M ?

Par la *règle centrobarique*, l'ordonnée du centre de gravité du segment OPM s'obtiendra en divisant la formule (aa) par la formule (p) multipliée par 2ϖ ; ce qui donnera

$$\frac{r\{15z-tu(15+10u^2+8u^4)\}}{6\{3z-tu(3+2u^2)\}} \ . \qquad (cc)$$

Par la même règle, l'abscisse du centre de gravité du segment OQM s'obtiendra en divisant la formule (bb) par la formule (q) multipliée aussi par 2ϖ ; ce qui donnera

$$\frac{r\{3z^2(3-4u^2)-6tuz(3-2u^2)+u^2(9-9u^2+4u^4)\}}{3\{z(3-4u^2)-tu(3-2u^2)\}} \ . \qquad (dd)$$

Mais on a, quel que soit l'axe des momens,

$$Mom.\mathrm{OPM} = Mom.\mathrm{OQMP} - Mom.\mathrm{OQM} \ ,$$

$$Mom.\mathrm{OQM} = Mom.\mathrm{OQMP} - Mom.\mathrm{OPM} \ ;$$

prenant donc respectivement OQ, OP pour axes des momens, on aura

$$Mom.\mathrm{OPM}=\tfrac{1}{3}r^3\{9z^2-6tuz(3+2u^2)+u^2(9+3u^2-8u^4)\}\ ,$$

$$Mom.\mathrm{OQM}=\tfrac{1}{6}r^3\{t(15+10u^2-16u^4)-3z(5-8u^4)\}\ ;$$

divisant donc respectivement ces momens par les formules (p) et (q), on aura pour l'abscisse du centre de gravité de OPM et l'ordonnée de celui de OQM

$$\frac{r\{9z^2-6tuz(3+2u^2)+u^2(9+3u^2-8u^4)\}}{3\{3z-tu(3+2u^2)\}}\ , \qquad (ee)$$

$$\frac{r\{3z(5-8u^4)-tu(15+10u^2-16u^4)\}}{6\{z(3-4u^2)-tu(3-2u^2)\}}\ . \qquad (ff)$$

Voilà donc les deux coordonnées des centres de gravité des deux segmens OPM, OQM qui se trouvent ainsi déterminées ; le point O étant pris pour origine.

On trouvera, d'après cela, pour l'ordonnée et l'abscisse du centre de gravité de l'aire OAO′ de la demi-cycloïde,

$$\tfrac{5}{6}r=\tfrac{5}{12}\mathrm{AO}'\ ,\quad r.\frac{9\varpi^2+16}{18\varpi}\ ;$$

et ensuite, pour l'ordonnée et l'abscisse du centre de gravité de l'espace OA′O′,

$$\tfrac{3}{2}r=\tfrac{3}{4}\mathrm{OA}'\ ,\quad r.\frac{3\varpi^2-16}{6\varpi}\ .$$

Il nous reste maintenant à assigner les centres de gravité des deux autres segmens MP′O′, MQ′O′. Ici nous prendrons le point O′ pour origine. Nous aurons d'abord, quel que soit l'arc,

$$Mom.\mathrm{MP'O'}=Mom.\mathrm{OA'O'}-Mom.\mathrm{QA'P'M}-Mom.\mathrm{OQM}\ ;$$

prenant donc successivement OA′ et OA pour axes des momens, cette équation deviendra

$$Mom.\mathrm{MP'O'}=\tfrac{1}{6}r^2\{3z'+t'u'(3-14t'^2+8t'^4)\}\ ,$$

$$Mom.\mathrm{MP'O'}=\tfrac{1}{3}r^3\{3z'^2+6t'u'z'(1-2t'^2)+(1-t'^2)(4+7t'^2-8t'^4)\}.$$

En divisant donc ces deux momens par la formule (r), on aura pour l'ordonnée et l'abscisse du centre de gravité du segment MP′O′,

$$\frac{r\{3z'+t'u'(3-14t'^2+8t'^4)\}}{6\{z'+t'u'(1-2t'^2)\}}, \qquad (gg)$$

$$\frac{r\{3z'^2+6t'u'z(1-2t'^2)+(1-t'^2)(4+7t'^2-8t'^4)\}}{3\{z'+t'u'(1-2t'^2)\}}. \qquad (hh)$$

De là on passera aisément à l'ordonnée et à l'abscisse du 4.^me segment O'Q'M. On a, quel que soit l'axe des momens,

$$Mom.\mathrm{O'Q'M}=Mom.\mathrm{MP'O'Q'}-Mom.\mathrm{MP'O'};$$

prenant donc successivement OP' et OQ' pour axes des momens, on aura

$$Mom.\mathrm{O'Q'M}=\tfrac{1}{6}r^3\{t'u'(21-34t'^2+16t'^4)+3z'(7-16t'^2+8t'^4)\},$$

$$Mom.\mathrm{O'Q'M}=\tfrac{1}{3}r^3\{3z'^2(3-4t'^2)+6t'uz'(3-t'^2)-(1-2t'^2)(4-5t'^2+4t'^4)\}.$$

Divisant enfin ces deux momens par la formule [illegible], on aura, pour l'ordonnée et l'abscissé du centre de gravité du segment O'Q'M,

$$\frac{r\{3z'(7-16t'^2+8t'^4)+t'u'(21-34t'^2+16t'^4)\}}{6\{z'(3-4t'^2)+t'u'(3-2t'^2)\}}, \qquad (kk)$$

$$\frac{r\{3z'^2(3-4t'^2)+6t'u'z'(3-2t'^2)-(1-t'^2)(4-5t'^2+4t'^4)\}}{3\{z'(3-4t'^2)+t'u'(3-2t'^2)\}}. \qquad (ll)$$

M. Poisson a paru penser que les abscisses des centres de gravité de ces segmens ne pouvaient être exprimées que par des séries (Voyez sa *Mécanique*, tome 1.^er, page 147). Mais on voit, par ce qui précède, qu'on peut toujours avoir exactement, sous forme finie, les deux coordonnées du centre de gravité d'une surface plane quelconque, terminée par des lignes droites et des arcs de cycloïdes.

XII. *Cherchons les volumes des corps engendrés par la révolution des deux segmens* O'P'M, O'Q'M *autour de* O'P' *et* O'Q', *respectivement ?*

Suivant la *règle centrobarique*, le volume du premier de ces deux corps s'obtiendra en multipliant par 2ϖ le produit des deux formules (r) et (gg) ; ce volume sera donc

$$\tfrac{1}{3}\varpi r^3\{3z'+t'u'(3-14t'^2+8t'^4)\}. \qquad (mm)$$

Le volume de l'autre corps s'obtiendra, suivant la même règle, en multipliant par 2ϖ le produit des deux formules (r) et (ll); ce volume sera donc

$$\tfrac{1}{3}\varpi r^3\{3z'^2(3-4t'^2)+6t'u'z(3-2t'^2)-(1-t'^2)(4-5t'^2+4t'^4)\}. \quad (nn)$$

On trouvera, d'après cela, pour le volume du corps engendré par O'A'O, tournant autour de O'A',

$$\tfrac{1}{2}\varpi^2r^3=\tfrac{1}{8}\text{O'A'}\,.\,\textit{Cerc.}\text{A'O}\ ;$$

c'est-à-dire, le 8.$^{\text{me}}$ du cylindre circonscrit; et pour le volume du corps engendré par O'AO, tournant autour de O'A,

$$\tfrac{1}{3}\varpi r^3(9\varpi^2-16)=\tfrac{3}{4}\text{AO'}\,.\,\textit{Cerc.}\text{AO}-2\textit{Sph.r}\ ;$$

c'est-à-dire, les $\frac{3}{4}$ du cylindre circonscrit, moins deux sphères ayant même rayon que le cercle générateur. On obtiendra facilement, d'après cela, les volumes des corps engendrés par des segmens quelconques de cycloïdes, tournant autour de O'A' ou O'A, ou même autour d'une droite quelconque, puisque (XI) le centre de gravité de l'aire de ce segment sera assignable.

XIII. *Cherchons les centres de gravité des corps engendrés par la révolution des deux segmens* OPM, OQM, *tournant autour de* OP *et* OQ *respectivement ?*

L'élément du premier de ces deux corps étant $\varpi y^2 dx$, le moment de cet élément, par rapport au plan conduit par O, perpendiculairement à l'axe, sera

$$\varpi xy^2dx=32\varpi r^4u^6dz(z-tu)\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec z, est (I)

$$\tfrac{1}{9}\varpi r^4\{45z^2-6tuz(15+10u^2+8u^4)+u^2(45+15u^2+8u^4-36u^6)\}\ ;$$

divisant donc par la formule (aa), on aura, pour la distance du point O au centre de gravité de ce volume,

$$\frac{r\{45z^2-6tuz(15+10u^2+8u^4)+u^2(45+15u^2+8u^4-36u^6)\}}{3\{15z-tu(15+10u^2+8u^4)\}}. \qquad (\varpi p)$$

En conséquence, s'il s'agit de la distance du point O au centre de gravité du corps engendré par OAO′, on trouvera pour son expression

$$r.\frac{45\varpi^2+128}{180\varpi}.$$

L'élément du second de ces deux corps étant $\varpi x^2 dy$, le moment de cet élément, par rapport au plan conduit par O perpendiculairement à l'axe, sera

$$\varpi x^2 y dy = 32\varpi r^2 tu^3(z-tu)^2,$$

dont l'intégrale, commençant avec z, est (I)

$$\tfrac{1}{9}\varpi r^4\{6tuz(15+10u^2-16u^4)-9z^2(5-8u^4)-u^2(45+15u^2-64u^4+36u^6)\};$$

divisant donc par la formule (bb), on aura, pour la distance du point O au centre de gravité de ce volume

$$\frac{r\{9z^2(5-8u^4)-6tuz(15+10u^2-16u^4)+u^2(45+15u^2-64u^4+36u^6)\}}{6\{3z^2(3-4u^2)-6tuz(3-2u^2)+u^2(9-9u^2+4u^4)\}}. \qquad (qq)$$

En conséquence, s'il s'agit de la distance du point O au centre de gravité du corps engendré par OA′O′, on trouvera pour son expression

$$\frac{r}{6}.\frac{27\varpi^2-128}{3\varpi^2-16}.$$

On voit, d'après ce qui précède, qu'il sera toujours facile de déterminer le centre de gravité du corps engendré par un segment quelconque de la courbe, tournant autour de OA ou OA′.

XIV. *Cherchons enfin les centres de gravité des corps engendrés par la révolution des deux segmens* O′MP′, O′MQ′, *tournant autour de* O′P′ *et* O′Q′, *respectivement ?*

L'élément du premier de ces deux corps étant $\varpi y'^2 dx'$ le moment de cet élément, par rapport au plan conduit par O′ perpendiculairement à l'axe, sera

$\varpi x'y'^2$

$$\varpi x'y'^2 \mathrm{d}x' = 32\varpi r^4 t'^2 u'^4 \mathrm{d}z'(z'+t'u')\,;$$

dont l'intégrale, commençant avec z', est (I)

$$\tfrac{1}{9}\varpi r^4\{9z'^2+6t'u'z'(3-14t'^2+8t'^4)+(1-t'^2)(16+25t'^2-68t'^4+36t'^6)\}\,;$$

divisant donc par la formule (mm), on aura, pour la distance du point O′ au centre de gravité de ce corps,

$$\frac{r\{9z'^2+6t'u'z'(3-14t'^2+8t'^4)+(1-t'^2)(16+25t'^2-68t'^4+36t'^6)\}}{3\{3z'+t'u'(3-14t'^2+8t'^4)\}}. \qquad (rr')$$

En conséquence, s'il s'agit de la distance du point O′ au centre de gravité du corps engendré par OO′A′, tournant autour de O′A′, on trouvera pour son expression

$$r\cdot\frac{\varpi^2+4}{2\varpi}\,.$$

L'élément du second de ces deux corps étant $\varpi x'^2 \mathrm{d}y'$, le moment de cet elément, par rapport au plan perpendiculaire à l'axe, passant par O′, sera

$$\varpi x'^2 y' \mathrm{d}y' = 32\varpi r^4 t'u'^3(z'+t'u')^2\,,$$

dont l'intégrale, commençant avec z', est (I)

$$\tfrac{2}{9}\varpi r^4\{9z'^2(7-16t'^2+8t'^4)+6t'u'z'(21-34t'^2+16t'^4)-(1-t'^2)(16-47t'^2+76t'^4-36t'^6)\}\,;$$

divisant donc par la formule (nn), on aura, pour la distance du point O′ au centre de gravité de ce corps,

$$\frac{r\{9z'^2(7-16t'^2+8t'^4)+6t'u'z'(21-34t'^2+16t'^4)-(1-t'^2)(16-47t'^2+76t'^4-36t'^6)\}}{6\{3z'^2(3-4t'^2)+6t'u'z'(3-2t'^2)-(1-t'^2)(4-5t'^2+4t'^4)\}}. \qquad (ss)$$

En conséquence, s'il s'agit de la distance du point O′ au centre de gravité du corps engendré par O′OA, tournant autour de O′A, on trouvera pour son expression

$$\tfrac{1}{2}r\cdot\frac{7\varpi^2-4}{3\varpi^2-4}\,.$$

On voit, d'après ce qui précède, qu'il sera toujours facile de déterminer le centre de gravité du corps engendre par un segment quelconque du cycloïde, tournant autour de OA′ ou OA.

Paris, 17 janvier 1815.