ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Questions résolues. Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 60 de ce volume. Solution du premier problème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 221-225
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__221_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 60 de ce volume.

Solution du premier problème ;

Par un Abonné.

Le problème proposé revient évidemment à celui-ci :

PROBLÈME. Déterminer, en fonction des trois angles plans d'un angle trièdre, 1.° *l'angle générateur du cône droit inscrit* ; 2.° *l'angle générateur du cône droit circonscrit ;* 3.° *enfin, l'angle que forment entre eux les axes de ces deux cônes ?*

Ce problème se trouvant implicitement résolu dans un article inséré à la page 329 du précédent volume des *Annales* ; je n'aurai pour ainsi dire ici d'autre tâche à remplir qu'à en faire ressortir la solution démandée ; et je serai conséquemment dans le cas d'y renvoyer fréquemment (*).

(*) L'auteur de cet article, en le rédigeant, devait ne point connaître, ou du moins avoir totalement perdu de vue un article de M. Français, inséré dans la *Correspondance sur l'école polytechnique* (tom. 1.er, n.° 9, janvier 1808, pag. 337). Ce sont exactement les mêmes résultats et la même manière de procéder. Au surplus, ces formules de M. Français avaient déjà paru, antérieurement, dans le XIV.e cahier du *Journal de l'école polytechnique* (page 182) ; mais alors sa marche, pour y parvenir, était un peu différente.

Solution. Soient a, b, c, les trois angles plans de l'angle trièdre dont il s'agit; r l'angle générateur du cône droit inscrit; R l'angle générateur du cône droit circonscrit, et D l'angle que forment les axes de ces deux cônes. Soient faits, pour abréger,

$$2s=a+b+c\ ,$$

$$\Delta^2=1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c\ .$$

Si, dans le mémoire cité, on suppose que les trois axes sont les arêtes de notre angle trièdre, on aura

$$(y\,,\ z)=a\ ,\quad (z\,,x)=b\ ,\quad (x\,,\ y)=c\ .\quad (*)$$

I. Si, dans l'équation (R), (*Annales*, tom. V, pag. 331), on substitue pour a, b, c, les valeurs données par les équations (13), (pag. 337), en ayant égard aux conventions ci-dessus, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin.}^2a\text{Sin.}^2(yz\,,r)+2\text{Sin.}b\text{Sin.}c\,\text{Cos.}(zx\,,r)\text{Sin.}(xy\,,r)\\ \text{Sin.}^2b\text{Sin.}^2(zx\,,r)+2\text{Sin.}c\text{Sin.}a\text{Cos.}(xy\,,r)\text{Sin.}(yz\,,r)\\ \text{Sin.}^2c\text{Sin.}^2(xy\,,r)+2\text{Sin.}a\text{Sin.}b\text{Cos.}(yz\,,r)\text{Sin.}(zx\,,r)\end{array}\right\}=\Delta^2\ .$$

Si l'on suppose ensuite que la droite désignée par r, dans cette équation est l'axe du cône droit inscrit, lequel doit conséquemment faire, avec les trois faces de l'angle trièdre, des angles égaux entre eux et à l'angle générateur r de ce cône, on aura

$$(xy\,,r)=(yz\,,r)=(zx\,,r)=r;$$

par suite de quoi notre équation donnera

(*) Il faut bien remarquer que nos a, b, c ne sont point ceux du mémoire cité. Il en est de même de r.

$$\text{Sin.}^2r=\frac{\Delta^2}{\begin{array}{c}\text{Sin.}^2a+2\text{Sin.}b\text{Sin.}c\text{Cos.}a\\+\text{Sin.}^2b+2\text{Sin.}c\text{Sin.}a\text{Cos.}b\\+\text{Sin.}^2c+2\text{Sin.}a\text{Sin.}b\text{Cos.}c\end{array}}. \qquad (1)$$

II. Si, dans la formule (7), (tom. V, pag. 334), on prend pour r l'axe du cône droit circonscrit, lequel doit faire avec les trois arètes de l'angle trièdre des angles égaux entre eux et à l'angle générateur R de ce cône, on aura

$$(r,x)=(r,y)=(r,z)=R\ ;$$

en conséquence, cette formule donnera

$$\text{Cos.}^2R=\frac{\Delta^2}{\begin{array}{c}\text{Sin.}^2a-2(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c)\\+\text{Sin.}^2b-2(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c\text{Cos.}a)\\+\text{Sin.}^2c-2(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b)\end{array}}\ ; \qquad (2)$$

III. Si enfin, dans l'équation (19), (tom. V, pag. 338), on substitue pour Sin.(yz,x), Sin.(zx,y), Sin.(xy,z) les valeurs données par les équations (14), (tom. V, pag. 337), il viendra

$$\Delta\text{Cos.}(r,r')=\left\{\begin{array}{c}\text{Sin.}a\text{Sin.}(yz,r)\text{Cos.}(r',x)\\+\text{Sin.}b\text{Sin.}(zx,r)\text{Cos.}(r',y)\\+\text{Sin.}c\text{Sin.}(xy,r)\text{Cos.}(r',z)\end{array}\right\}\ ;$$

prenant alors pour r l'axe du cône inscrit, et pour r' celui du cône circonscrit, ce qui donnera, à la fois,

$$(yz,r)=(zx,r)=(xy,r)=r\ ;$$

$$(r',x)=(r',y)=(r',z)=R,$$

$$(r,r')=D\ ;$$

cette équation donnera

$$\text{Cos.}D=\frac{1}{\Delta}(\text{Sin.}a+\text{Sin.}b+\text{Sin.}c)\text{Sin.}r\text{Cos.}R\ ; \qquad (3)$$

formule dans laquelle il ne sera plus question que de substituer pour Δ, Sin.r, Cos.R les valeurs trouvées ci-dessus (I, II). (*)

IV. De l'expression (1) de Sin.^2r on conclut aisément

$$\text{Cos.}^2r=\frac{4\text{Sin.}^2s}{\begin{array}{l}\text{Sin.}^2a+2\text{Sin.}b\text{Sin.}c\text{Cos.}a\\+\text{Sin.}^2b+2\text{Sin.}c\text{Sin.}a\text{Cos.}b\\+\text{Sin.}^2c+2\text{Sin.}a\text{Sin.}b\text{Cos.}c\end{array}}\ ; \qquad (4)$$

et par suite

$$\text{Tang.}^2r=\frac{\Delta^2}{4\text{Sin.}^2s}\ ; \qquad (5)$$

or, on trouve aisément

$$\Delta^2=4\text{Sin.}s\text{Sin.}(s-a)\text{Sin.}(s-b)\text{Sin.}(s-c)\ ;$$

donc enfin

$$\text{Tang.}r=\frac{\sqrt{\text{Sin.}s\text{Sin.}(s-a)\text{Sin.}(s-b)\text{Sin.}(s-c)}}{\text{Sin.}s}\ ; \qquad (6)$$

formule commode pour le calcul par logarithmes.

Si dans cette dernière formule, on suppose le rayon de la sphère infini, il viendra

$$r=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}\ ; \qquad (7)$$

expression connue du rayon du cercle inscrit au triangle rectiligne, en fonction de ses trois côtés.

V. De l'expression (2) de Cos.^2R on conclut aisément

$$\text{Sin.}^2R=\frac{16\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c}{\begin{array}{l}\text{Sin.}^2a-2(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c)\\+\text{Sin.}^2b-2(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c\text{Cos}\,a)\\+\text{Sin.}^2c-2(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b)\end{array}}\ ; \qquad (8)$$

et, par suite ;

(*) Il serait intéressant de découvrir si, pour le triangle sphérique, comme pour le triangle rectiligne, D est simplement fonction de r et R (voyez *Annales*, tom. III, pag. 347). Le moyen de s'en assurer serait d'éliminer, entre les équations (1, 2, 3), deux quelconques des trois angles a, b, c, afin de voir si le troisième disparaîtrait aussi de lui-même ; mais ce moyen ne paraît pas être d'une exécution très-facile. J. D. G.

Tang.^{2}

$$\text{Tang.}^2R=\frac{16\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin}^2\tfrac{1}{2}c}{\Delta^2}\ ; \qquad (9)$$

ou, en mettant pour Δ^2 sa valeur ci-dessus, et extrayant la racine quarrée,

$$\text{Tang.}R=\frac{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{\text{Sin.}s\,\text{Sin.}(s-a)\,\text{Sin.}(s-b)\,\text{Sin.}(s-c)}}\ ; \qquad (10)$$

formule commode par le calcul par logarithmes.

Si, dans cette dernière formule, on suppose le rayon de la sphère infini, elle deviendra

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\ ; \qquad (11)$$

expression connue du rayon du cercle circonscrit au triangle rectiligne, en fonction de ces trois côtés.