ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Géométrie élémentaire. Sur la recherche du rapport de la circonférence du cercle à son diamètre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 192-200
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__192_1>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Sur la recherche du rapport de la circonférence du cercle à son diamètre.

Par M. GERGONNE.

DANS un petit traité élémentaire de géométrie plane, publié à Nancy en 1813, par M. SCHAWAB, on trouve, entre autres choses intéressantes, le théorème que voici :

Soient deux polygones réguliers de même périmètre, l'un de m *et l'autre de* 2m *côtés ; soient respectivement* r, R *les rayons des cercles inscrit et circonscrit au premier*, r', R' *les rayons des cercles inscrit et circonscrit au dernier, on aura*

$$1.^\circ \ \div r.r'.R \ ; \quad 2.^\circ \ \div\!\!\div r' : R' : R \ .$$

Cet élégant théorème se démontre très-simplement comme il suit :

Soit SMC (fig. 3) un triangle, rectangle en M ; soit prolongé le côté MC au-delà du point C, de manière que son prolongement CC′ soit égal à l'hypothénuse CS. Soit menée C′S, et soit abaissée du point C sur cette droite la perpendiculaire CS′ ; enfin soit menée S′M′ parallèle à SM. Voici ce qui résulte de cette construction :

Le triangle SCC′ ayant ses deux côtés CS et CC′ égaux, doit aussi avoir les angles opposés égaux, et conséquemment C′ l'un d'eux est égal à leur demi-somme ; cet angle C′ est donc aussi moitié de l'angle extérieur SCM. En outre, le point S′ étant le milieu de SC′, il s'ensuit que S′M′ est la moitié de SM ; ainsi, on a en même temps

$$S'M'=\tfrac{1}{2}SM\ ,\quad Ang.S'C'M'=\tfrac{1}{2}Ang.SCM\ .$$

Il résulte de là que, si l'on suppose que MS soit un demi-côté d'un polygone régulier de m côtés, dont C soit le centre, M′S′ sera un demi-côté du polygone régulier de $2m$ côtés, de même contour, dont C′ sera le centre. Or, il est clair que CM et CS seront les rayons des cercles inscrit et circonscrit au premier ; et que C′M′ et C′S′ seront les rayons des cercles inscrit et circonscrit au dernier : ainsi l'on aura

$$CM=r\ ;\qquad C'M'=r'\ ,$$

$$CS=R\ ;\qquad C'S'=R'\ .$$

Or, le point M′ étant le milieu de C′M, on doit avoir $2C'M'=C'M=CM+CC'=CM+CS$; et de plus le triangle CS′C′, rectangle en S′ donne $\overline{C'S'}^2=C'M'\times C'C=C'M'\times CS$; donc $2r'=r+R$, et $R'^2=r'R$; c'est-à-dire,

$$\div\, r.r'.R\ ;\qquad ∺\, r':R':R\ ;$$

comme nous l'avions annoncé.

Cette proposition peut encore être démontrée trigonométriquement ainsi qu'il suit :

On a d'abord évidemment

$$r=R\text{Cos.}\frac{\varpi}{m}\,, \qquad (1) \qquad r'=R'\text{Cos.}\frac{\varpi}{2m}\,; \qquad (2)$$

de plus, les périmètres des deux polygones étant $2mr\text{Tang.}\frac{\varpi}{m}$, $4mr'\text{Tang.}\frac{\varpi}{2m}$, on doit avoir

$$r\text{Tang.}\frac{\varpi}{m}=2r'\text{Tang.}\frac{\varpi}{2m}\,. \qquad (3)$$

Si l'on élimine r, r' de cette dernière équation, au moyen des deux précédentes, il viendra

$$R\text{Sin.}\frac{\varpi}{m}=2R'\text{Sin.}\frac{\varpi}{2m}\,,$$

ou bien

$$2R\text{Sin.}\frac{\varpi}{2m}\text{ Cos.}\frac{\varpi}{2m}=2R'\text{Sin.}\frac{\varpi}{2m}\,,$$

ou en réduisant

$$R\text{Cos.}\frac{\varpi}{2m}=R'\,,$$

équation qui, combinée par multiplication avec l'équation (2) donne

$$Rr'=R'^2\,, \qquad (4)$$

qui est la seconde de nos deux propositions.

On a en outre

$$2\text{Cos.}^2\frac{\varpi}{2m}=1+\text{Cos.}\frac{\varpi}{m}\,;$$

d'où éliminant les cosinus, au moyen des équations (1), (2), il vient

$$2\frac{r'^2}{R'^2}=1+\frac{r}{R}=\frac{r+R}{R}\ ;$$

mettant dans cette dernière pour R'^2 sa valeur (4), il viendra enfin

$$2r'=r+R\ ,$$

qui est la première des deux propositions annoncées.

Cela posé, concevons un polygone régulier quelconque, de m côtés, dont on connaisse le périmètre p, ainsi que les rayons r et R des cercles inscrit et circonscrit ; si l'on forme une série, dont les premier et second termes soient respectivement r et R, et dont les suivans soient alternativement, à partir du troisième, moyens par *différences* et par *quotiens* entre les deux qui précèdent immédiatement chacun d'eux ; il suit de ce qui vient d'être démontré, que les termes de rangs impairs de cette série seront successivement les rayons des cercles inscrits aux polygones réguliers de m, $2m$, $4m$, $8m$,... côtés, ayant leurs périmètres constamment égaux à p, et que les termes de rangs pairs de la même suite seront successivement les rayons des cercles circonscrits aux mêmes polygones.

Mais, lorsque, le périmètre d'un polygone régulier demeurant constant, le nombre de ses côtés croît continuellement, le rayon du cercle inscrit croît aussi sans cesse, tandis qu'au contraire celui du cercle circonscrit décroît ; le premier est toujours moindre et le second plus grand que le rayon du cercle dont la circonférence serait égale au périmètre du polygone ; mais ils tendent sans cesse, l'un et l'autre, vers cette limite commune.

Ainsi, dans la série dont il vient d'être question, tandis que les termes de rangs impairs croîtront sans cesse, ceux de rangs pairs, au contraire, décroîtront continuellement ; mais de manière que les uns et les autres tendront, de plus en plus, à devenir égaux entre eux, et au rayon du cercle dont la circonférence serait p; c'est-à-dire, que ces termes convergeront perpétuellement vers la valeur $\frac{p}{2\varpi}$. (*)

Voilà donc un procédé, aussi simple qu'élégant, pour obtenir du nombre ϖ une valeur aussi approchée qu'on pourra le désirer; il

---

(*) Soient r_1, r_2, r_3, ... r_x les rayons des cercles inscrits, et R_1, R_2, R_3, ... R_x ceux des cercles circonscrits; nous aurons les deux équations aux différences

$$2r_{x+1}=r_x+R_x\ ,\quad R^2_{x+1}=R_x.r_{x+1}\ ;$$

nous aurons pareillement, en changeant x en $x+1$,

$$2r_{x+2}=r_{x+1}+R_{x+1}\ ,\quad R^2_{x+2}=R_{x+1}.r_{x+2}\ .$$

Si, entre ces quatre équations, on élimine successivement R_x, R_{x+1}, R_{x+2}, et ensuite r_x, r_{x+1}, r_{x+2}, on obtiendra ces deux-ci

$$(2r_{x+2}-r_{x+1})^2=(2r_{x+1}-r_x)r_{x+1}\ ,$$

$$R_x(2R^2_{x+2}-R^2_{x+1})=R^3_{x+1}\ .$$

La première de ces équations exprime, entre les termes de rangs impairs, une relation indépendante des termes de rangs pairs, et la seconde entre les termes de rangs pairs, une relation indépendante des termes de rangs impairs. On voit en outre que, dans le cas de $x=\infty$, l'intégrale commune des ces deux équations est $\frac{p}{2\varpi}$, pourvu seulement que $\frac{r}{R}$ soit le cosinus d'un sous-multiple de la circonférence; et l'on a alors $p=2m\sqrt{R^2-r^2}$.

Si $\frac{r}{R}$ était le cosinus d'une fraction rationnelle et irréductible $\frac{n}{m}$ de la circonférence, on tomberait alors sur les polygones étoilés de M. Poinsot, et la série convergerait continuellement vers $\frac{p}{2n\varpi}$.

ne

ne s'agira, en effet, que de déterminer r et R, avec un nombre suffisant de chiffres décimaux, et d'en conclure ensuite, comme il vient d'être dit, les autres termes de la suite, avec le même degré d'approximation, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à deux termes consécutifs qui ne présentent plus aucune différence dans l'ordre de décimales adopté. Divisant $\frac{1}{2}p$ par l'un d'eux, le quotient qu'on obtiendra sera une valeur approchée du nombre π. On en connaîtra le degré d'approximation en divisant de nouveau $\frac{1}{2}p$ par le même diviseur, augmenté ou diminué d'une unité décimale du dernier ordre; et on ne conservera dans le résultat que les chiffres décimaux communs aux deux quotiens. On se rappellera au surplus que, dans les extractions de racines quarrées, dès qu'on a obtenu plus de la moitié des chiffres de la racine, on peut obtenir les suivans par une simple division.

Ce procédé est déjà bien simple, mais il est encore susceptible de quelques simplifications assez notables. Et d'abord, l'inégalité des termes de la série diminuant continuellement, à mesure que ces termes seront plus avancés vers la droite, on parviendra bientôt à deux termes consécutifs qui, abstraction faite de la virgule, se ressembleront, vers la droite, dans plus de la moitié de leurs chiffres : or, lorsqu'on en sera parvenu là, on pourra, sans erreur sensible, dans le degré d'approximation qu'on aura eu en vue, substituer des demi-sommes aux racines quarrées de produits ; de sorte que le calcul des termes ultérieurs de la série se poursuivra, d'une manière tout à fait simple et uniforme, en prenant constamment, pour chaque terme, la demi-somme des deux qui le précèderont immédiatement. Cette remarque, qui n'a point échappé à M. Schwab, peut se justifier comme il suit.

Tout se réduit évidemment à prouver que la demi-somme de deux nombres entiers, qui ont plus de la moitié de leurs chiffres pareils vers la gauche, ne diffère pas de plus d'une demi-unité de la racine quarrée de leur produit. Or, soient en effet A le plus petit de ces nombres et $A+a$ le plus grand; il s'agira de prouver que

$$(A+\tfrac{1}{2}a)-\sqrt{A^2+aA}<\tfrac{1}{2}\ ;$$

ou, en transposant et multipliant par 2,

$$2A+(a-1)<\sqrt{A^2+aA}\ .$$

En quarrant et réduisant, cette inégalité devient

$$\frac{(a-1)^2}{4A}<1\ .$$

Or, puisqu'on suppose que a n'a pas la moitié du nombre des chiffres de A, a^2 et à plus forte raison $(a-1)^2$ n'aura pas autant de chiffres que A, d'où il suit qu'en effet $\frac{(a-1)^2}{4A}$ sera une véritable fraction, comme l'exprime l'inégalité ci-dessus.

Voilà donc déjà notre procédé devenu bien simple ; mais, quelque facile qu'il puisse être de prendre la demi-somme de deux nombres, si l'on faisait le calcul avec beaucoup de chiffres décimaux, on pourrait se trouver entraîné à répéter un grand nombre de fois cette opération, avant d'être parvenu à anéantir totalement la différence entre deux termes consécutifs : voyons donc si nous ne pourrons point encore nous épargner ce travail.

Soient a, b respectivement, deux termes consécutifs d'une suite dont chaque terme est la demi-somme des deux qui le précèdent immédiatement ; les termes subséquens de cette suite seront

$$\frac{a+b}{2}\,,\quad \frac{a+3b}{4}\,,\quad \frac{3a+5b}{8}\,,\quad \frac{5a+11b}{16}\,,\quad \frac{11a+21b}{32}\,,\ldots\ ;$$

et il s'agira de connaître le dernier terme de cette suite, prolongée à l'infini. Pour le découvrir, donnons à ces termes cette autre forme

$$\frac{2(a+2b)+(a-b)}{3.2}\,,\quad \frac{4(a+2b)-(a-b)}{3.4}\,,\quad \frac{8(a+2b)+(a-b)}{3.8}\,,\ldots\,,$$

on verra alors que son terme général est

$$\frac{a+2b}{3}-(-1)^n.\frac{a-b}{3.2^n}\ .$$

Or, dans le cas de n infini, la seconde partie de cette valeur s'évanouit ; d'où il suit que le dernier terme de la série est $\frac{1}{3}(a+2b)$. On pourra donc, dès qu'on sera parvenu à deux termes consécutifs différant dans moins de moitié de leurs chiffres décimaux, calculer de suite le dernier terme de la série, sans passer par le calcul des intermédiaires. (*)

Il n'est plus question présentement que de fixer le choix du polygone primitif devant servir de point de départ. Ce choix pourrait être fait d'une infinité de manières différentes ; mais de tous les polygones réguliers, le plus simple est, sans contredit, le système de deux droites qui se confondent : c'est un polygone de deux côtés, ayant deux angles nuls, dans lequel le cercle inscrit a un rayon nul et le cercle circonscrit un rayon égal à la moitié de l'un de ses côtés ou au quart de son périmètre ; de sorte qu'en prenant ce rayon pour unité, ce périmètre sera 4 ; et $\frac{p}{2\varpi}$ deviendra $\frac{2}{\varpi}$.

Ainsi, la suite dont les deux premiers termes sont 0 et 1, et dont les autres sont alternativement, à partir du troisième, moyens par différences et par quotiens entre les deux qui les précèdent immédiatement, converge sans cesse vers la valeur de $\frac{2}{\varpi}$ (**). Voici le calcul de ces termes, avec sept chiffres décimaux, et en ayant égard aux observations précédemment faites.

(*) Ce qui précède revient à dire que, si l'on a l'équation aux différences

$$2Z_{x+2}=Z_x+Z_{x+1},$$

il s'ensuivra

$$3Z_{\infty}=Z_1+2Z_2 ;$$

d'où résulte encore ce théorème de géométrie.

THÉORÈME. *Soient marqués arbitrairement, sur une droite indéfinie deux points* 1 *et* 2 ; *puis, sur la même droite, soient marqués successivement un point* 3 *également distant de* 1 *et* 2, *un point* 4 *également distant de* 2 *et* 3, *un point* 5 *également distant de* 3 *et* 4, *et ainsi de suite. Cette opération, continuée à l'infini, conduira à un point final qui se trouvera situé aux deux tiers de l'intervalle entre* 1 *et* 2, *à partir de* 1.

(**) De là résulte ce théorème.

Théorème. Soit CMS (fig. 4) un triangle isocèle, rectangle en M. Soit prolongé MC, de sorte que CC'=CS, et soit menée SC', dont S' soit le milieu ; soit fait C'C''=C'S', et soit menée S'C'', dont S'' soit le milieu ; soit fait C''C'''=C''S''.

$(1)= \ldots\ldots =0{,}0000000\,;$ $(10)=\sqrt{(8)\times(9)}=0{,}6376435\,;$

$(2)= \ldots\ldots =1{,}0000000\,;$ $(11)=\tfrac{1}{2}\{(9)+(10)\}=0{,}6361083\,;$

$(3)=\tfrac{1}{2}\{(1)+(2)\}=0{,}5000000\,;$ $(12)=\sqrt{(10)\times(11)}=0{,}6368754\,;$

$(4)=\sqrt{(2)\times(3)}=0{,}7071068\,;$ $(13)=\tfrac{1}{2}\{(11)+(12)\}=0{,}6364919\,;$

$(5)=\tfrac{1}{2}\{(3)+(4)\}=0{,}6035534\,;$ $(14)=\sqrt{(12)\times(13)}=0{,}6366836\,;$

$(6)=\sqrt{(4)\times(5)}=0{,}6532815\,;$ $(15)=\tfrac{1}{2}\{(13)+(14)\}=0{,}6365878\,;$

$(7)=\tfrac{1}{2}\{(5)+(6)\}=0{,}6284174\,;$ $(16)=\sqrt{(14)\times(15)}=0{,}6366357\,;$

$(8)=\sqrt{(6)\times(7)}=0{,}6407289\,;$ $(17)=\tfrac{1}{2}\{(15)+(16)\}=0{,}6366117\,;$

$(9)=\tfrac{1}{2}\{(7)+(8)\}=0{,}6345731\,;$ $(\infty)=\tfrac{1}{3}\{(16)+2\times(17)\}=0{,}6366197\,.$

On a donc $\frac{2}{\varpi}=0{,}6366197$ d'où $\frac{1}{\varpi}=0{,}3183098$; résultat exact à sept chiffres décimaux.