ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Astronomie. Sur la déclinaison des planètes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 173-192
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__173_0>

ASTRONOMIE.

Sur la déclinaison des planètes;

Par M. le professeur KRAMP, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg.

I. LES déclinaisons des planètes, consignées dans nos éphémérides, forment des séries très-irrégulières, et dont il paraît fort difficile de déterminer la loi. Prenons pour exemple les années 1811, 1812, 1813, 1814, 1815, qui sont les cinq premières de la décade actuelle.

Pendant ces cinq années, la déclinaison d'*Uranus* a été constamment *australe*; et on peut remarquer que, pendant une partie de l'année, elle a passé sans cesse de sa plus grande valeur à la plus petite, et que pendant l'autre, elle a repassé de la plus petite à la plus grande. Les plus grandes déclinaisons étaient renfermées entre les limites 17°.6′ et 21°.22′; celles des moindres déclinaisons ont été 15°.45′ et 20°.42′; la planète s'est donc écartée du plan de l'équateur.

La déclinaison constamment australe de *Saturne* a fait des oscillations semblables; ses plus grandes déclinaisons ont diminué de 23°.6′ à 19°.40′; les plus petites ont diminué de même depuis 21°.54′ jusqu'à 17°.45′; la planète s'est donc rapprochée de l'équateur.

La déclinaison de *Jupiter* a été boréale pendant les quatre années 1811, 1812, 1813, 1814. Le 16 novembre de cette dernière année, la planète a traversé le plan de l'équateur; le 9 avril 1815; elle l'a repassé une seconde fois; et le 9 juillet de cette même année, elle est redescendue de nouveau dans l'hémisphère australe.

Mars a traversé *cinq* fois le plan de l'équateur; savoir, le 1.er février et le 25 octobre 1812; le 1.er janvier et le 7 octobre 1814, et le 10 juillet 1815. Les intervalles de temps de l'un de ces passages à l'autre ont été successivement 266, 433, 280, 276 jours; nombres dont l'inégalité ne saurait dépendre de l'ellipticité de l'orbite.

Venus a traversé le même plan *douze* fois; et, en exprimant en jours les intervalles de temps d'un passage à l'autre, on trouve les nombres qui suivent: 181, 142, 265, 148, 244, 154, 45, 52, 149, 145, 153. L'excentricité presque insensible de l'orbite de Vénus n'a rien de commun avec l'inégalité de ces nombres.

Ces mêmes intervalles sont encore beaucoup plus inégaux pour *Mercure* qui, pendant ces cinq années, a traversé *seize* fois le plan de l'équateur. La recherche des lois qui lient entr'eux les termes de ces séries irrégulières dépend du problème suivant:

2. *PROBLÈME. Connaissant les élémens de l'orbite d'une planète, on demande l'expression générale de sa déclinaison, pour un temps quelconque proposé?*

Solution. Soient EZT l'écliptique (fig. 1) S le soleil; T la terre; SE la ligne des équinoxes; SNQ la ligne menée du soleil au nœud ascendant de l'orbite de la planète: cette dernière étant supposée en M, élevée au-dessus du plan de l'écliptique. Abaissons de M sur ce plan la perpendiculaire ML, et sur la ligne des nœuds la perpendiculaire MN. Menons de plus, dans le plan même de l'écliptique, la ligne TL dont le prolongement rencontre en Q la ligne des nœuds et la ligne LN; ensuite les deux rayons vecteurs SM, ST, et enfin la ligne TM, de la terre T à la planète M. Quant aux lignes auxiliaires, remarquons que S Z est parallèle à TLQ; que TO est parallèle à LN, et conséquemment perpendiculaire comme elle à la ligne des nœuds S Q; et qu'enfin

LH est parallèle à cette même ligne des nœuds, et conséquemment perpendiculaire à TO.

3. Cela étant, soient

β.... l'angle LNM, inclinaison de l'orbite;

δ.... l'angle ESN, longitude du nœud ascendant;

θ.... l'angle EST, longitude héliocentrique de la terre;

ω.... l'angle MSN que fait le rayon vecteur de la planète avec la ligne des nœuds;

a.... la ligne ST, rayon vecteur de la terre;

r.... la ligne SM, rayon vecteur de la planète;

L.... l'angle ESZ, longitude géocentrique de la planète;

L'.... l'angle MTL, latitude géocentrique de la planète;

$\delta - L$.... l'angle NSZ que fait la ligne des nœuds avec SZ, ou avec sa parallèle TLQ.

4. Les élémens de l'orbite de la planète étant supposés connus, les deux rayons vecteurs a, r, de même que les angles β, δ, θ, ω, seront donnés de même. Par leur moyen, on exprimera les angles $\delta - L$ et L' de la manière suivante

$$\text{Tang.}(\delta - L) = \frac{a\text{Sin.}(\theta - \delta) - r\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\omega}{r\text{Cos.}\omega - a\text{Cos.}(\theta - \delta)},$$

$$\text{Tang.}L' = \frac{r\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\omega\text{Cos.}(\delta - L)}{r\text{Cos.}\omega - a\text{Cos.}(\theta - \delta)}.$$

5. Pour abréger, désignons par R^2 la somme des quarrés du numérateur et du dénominateur de la première de ces deux fractions, de celle qui exprime la tangente de l'angle $\delta - L$. On aura ainsi:

$$R\text{Sin.}(\delta - L) = a\text{Sin.}(\theta - \delta) - r\text{Sin.}\omega\text{Cos.}\beta,$$

$$R\text{Cos.}(\delta - L) = r\text{Cos.}\omega - a\text{Cos.}(\theta - \delta).$$

On trouvera de même, à cause de $L = \delta - (\delta - L)$,

$$R\text{Sin.}L = r\text{Sin.}\delta\text{Cos.}\omega + r\text{Cos.}\delta\text{Sin.}\omega\text{Cos.}\beta - a\text{Sin.}\theta,$$

$$R\text{Cos}.L = r\text{Cos}.\delta\text{Cos}.\omega - r\text{Sin}.\delta\text{Sin}.\omega\text{Cos}.\beta - a\text{Cos}.\theta\ ;$$

et enfin

$$R\text{Tang}.L' = r\text{Sin}.\omega\text{Sin}.\beta\ .$$

6. Soit, en second lieu, f^2 la somme des quarrés des deux termes de la seconde fraction, qui exprime la tangente de la latitude géocentrique L', ou $R^2 + r^2\text{Sin}.^2\omega\text{Sin}.^2\beta$. On trouve, en développant,

$$f^2 = a^2 - 2ar\{\text{Cos}.(\theta - \delta)\text{Cos}.\omega + \text{Sin}.(\theta - \delta)\text{Sin}.\omega\text{Cos}.\beta\} + r^2\ ;$$

la lettre f désigne donc la ligne TM, distance de la terre à la planète. Il en résulte

$$f\text{Sin}.L' = r\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\omega\ ,\quad f\text{Cos}.L' = R\ .$$

7. Nous avons fait connaître ailleurs les formules par lesquelles on trouve l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, dont on connaît la longitude et la latitude. Soient (fig. 2) EX l'équateur, EY l'écliptique, S un astre quelconque; soit de plus ε l'obliquité de l'écliptique, A l'ascension droite EA, A' la déclinaison SA, L la longitude EL, L' la latitude SL; cette dernière étant supposée boréale. On aura

$$\text{Sin}.A' = \text{Sin}.\varepsilon\text{Sin}.L\text{Cos}.L' + \text{Cos}.\varepsilon\text{Sin}.L'\ .$$

8. Il ne reste qu'à développer cette expression, pour avoir celle de la déclinaison, au bout d'un temps donné; on trouvera (4, 5, 6)

$$\text{Sin}.A' = \frac{r(\text{Sin}.\delta\text{Cos}.\omega\text{Sin}.\varepsilon + \text{Cos}.\delta\text{Sin}.\omega\text{Cos}.\beta\text{Sin}.\varepsilon + \text{Sin}.\omega\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\varepsilon) - a\text{Sin}.\theta\text{Sin}.\varepsilon}{f}\ .$$

9. On simplifiera cette expression, en introduisant un angle λ, tel que

$$\text{Tang}.\lambda = \frac{\text{Sin}.\delta\text{Sin}.\varepsilon}{\text{Cos}.\delta\text{Sin}.\varepsilon\text{Cos}.\beta + \text{Cos}.\varepsilon\text{Sin}.\beta}\ .$$

on aura alors

$$\text{Sin}.A' = \frac{r\text{Sin}.\delta\text{Sin}.(\lambda + \omega) - a\text{Sin}.\lambda\text{Sin}.\theta}{f\text{Sin}.\lambda}.\text{Sin}.\varepsilon\ .$$

10. Le soleil étant rapporté au centre de la sphère, soit FS le

grand cercle de cette sphère déterminé par l'orbite de la planète ; ce grand cercle coupant l'équateur en F et l'écliptique en B, et par conséquent BS étant l'argument de la latitude ES la distance à l'équinoxe et B le nœud ascendant ; l'arc BF sera ce que nous avons désigné par λ, et l'argument de latitude BS sera ω ; on aura donc

$$\text{Sin.}A' = \frac{r\text{Sin.BESin.FS} - a\text{Sin.BFSin.}\theta}{f\text{Sin.BF}} . \text{Sin.}\varepsilon \ .$$

11. Comme l'angle β, ou l'inclinaison de l'orbite vers l'écliptique, est un angle très-petit, pour toutes les planètes de notre système solaire, on voit que l'arc λ ou BF ne saurait différer beaucoup de l'arc δ ou BE, quî est la longitude du nœud. On trouve effectivement Tang.$(\delta - \lambda)$ égale, à peu près, à Sin.βSin.δCos.ε ; ce qui rend cette différence angulaire sensiblement proportionnelle au sinus de l'inclinaison de l'orbite. Si la planète se mouvait entièrement dans le plan de l'écliptique, on aurait exactement $\lambda = \delta$, et le sinus de la déclinaison de la planète, ou Sin.A', se trouverait être

$$\text{Sin.}A' = \frac{r\text{Sin.}(\delta + \omega) - a\text{Sin.}\theta}{f} . \text{Sin.}\varepsilon \ .$$

12. Dans le cas d'une planète infiniment éloignée, et qui rentrerait ainsi dans la classe des étoiles fixes, la distance r ferait disparaître a, et il viendrait par conséquent

$$\text{Sin.}A' = \frac{\text{Sin.}BE\text{Sin.}FS\text{Sin.}\varepsilon}{\text{Sin.}BF} \ .$$

Cette expression est une quantité constante, et indépendante du temps ; et on voit qu'elle ne veut dire autre chose que sin. SA ; l'arc SA étant effectivement la déclinaison de l'étoile.

13. Le moment du passage de la planète par le plan de l'équateur est celui où la déclinaison A' est nulle ; on a alors

$$r\text{Sin.}\delta\text{Sin.}(\lambda + \omega) = a\text{Sin.}\lambda\text{Siu.}\theta \ ;$$

équation dans laquelle les angles θ et ω, de même que les deux rayons vecteurs a et r, sont des fonstions très - connues, mais transcendantes du temps, et qui ne peuvent être développées qu'en séries infinies. Le problème est donc insoluble, dans le cas des orbites elliptiques; et dans la supposition même d'un mouvement uniforme et circulaire, il exige l'emploi de la règle de fausse position.

14. En nous bornant au calcul des mouvemens moyens, essayons de déterminer (9) la déclinaison des planètes de notre système, telle qu'elle doit avoir été le 1.er janvier de l'année 1815, à *midi*. Le logarithme de la distance de la terre au soleil était alors 9,9926560; et la longitude du soleil était 280°. 16'. 30"; on aura donc $\text{Log.}a = 9.9926560$ et $\theta = 100°.16'.30''$. De plus, du 1.er janvier 1801 à *minuit* jusqu'au 1.er janvier 1815 à *midi* il s'est écoulé 5113 jours et demi.

15. Il faudra connaître les mouvemens moyens journaliers de la terre, de la planète et du nœud de celle-ci. Soient donc

m.... le mouvement moyen journalier de la terre,

n.... le mouvement moyen journalier de la planète,

h.... le mouvement moyen journalier du nœud.

Les trois moyens mouvemens seront exprimés en degrés et parties de degrés. Le mouvement h sera une fraction très-petite, et qui ne deviendra bien sensible qu'au bout d'un siècle.

16. Il faudra connaître aussi les longitudes héliocentriques moyennes de la terre, de la planète, et du nœud de celle-ci, à l'époque dont on veut partir. Soient donc, pour cette époque,

M.... la longitude de la terre;

N.... la longitude de la planète,

H.... la longitude de son nœud.

Ainsi, les mouvemens étant supposés uniformes et circulaires; on aura :

$$\theta = M + mt\ ,$$

$$\mathrm{EL} = N + nt\ ,$$

$$\mathrm{EB} = H - ht\ .$$

17. Il en résultera

$$\mathrm{BL} = \mathrm{EL} - \mathrm{EB} = N - H + (n+h)t\ ;$$

ainsi,

$$\mathrm{Tang.BS} = \mathrm{Tang.}\omega = \frac{\mathrm{Tang.}[N - H + (n+h)t]}{\mathrm{Cos.}\beta}\ .$$

La lettre t désigne ici le nombre des jours écoulés depuis l'époque fixe jusqu'à celle pour laquelle on veut déterminer la longitude de la planète. Comme l'angle β est très-petit, pour toutes les planètes de notre système, excepté Mercure, on aura sensiblement $\mathrm{Cos.}\beta = 1$, ce qui donne

$$\omega = N - H + (n+h)t$$

18. Les mouvemens moyens et journaliers des planètes sont exprimés dans la table qui suit :

Mercure.	4°,09237706 ,
Vénus.	1 ,60217659 ,
Terre	0 ,98564716 ,
Mars	0 ,52407126 ,
Jupiter	0 ,08312916 ,
Saturne	0 ,03349833 ,
Uranus.	0 ,01176895 .

La troisième de ces valeurs est celle de m ; les autres appartiennent aux n des différentes planètes de notre système.

19. Voyons présentement quelles erreurs pourra entraîner, dans le calcul des latitudes au commencement de 1815, l'emploi des moyens mouvemens. On a d'abord les distances moyennes, c'est-à-dire, r, ainsi qu'il suit :

Mercure.	0,3870981 ,	Log. r = 9.5878210 ;
Vénus.	0,7233323 ,	9.8593379 ,
Mars.	1,5236935 ,	0,1828978 ,
Jupiter.	5,202794 . ,	0,7162365 ,
Saturne.	9,53877 . . ,	0,9794924 ,
Uranus.	19,1833 . . . ;	1,2829233 .

20. Les arcs décrits pendant 5113 jours $\frac{1}{2}$, en rejetant les circonférences entières, seront respectivement (18)

Mercure.	46°.22′.12″ ;
Vénus.	272 .43 .48 ,
Mars.	159 .56 .16 ,
Jupiter	65 . 4 .51 ,
Saturne.	271 .17 .37 ,
Uranus	60 .10 .50 ;

Mais, au commencement de 1801, les longitudes étaient

Mercure.	163°.56′.27″ ,
Vénus.	10 .44 .31 ,
Mars.	64 . 7 . 2 ,
Jupiter	102 .12 .36 ,
Saturne	135 .20 .32 ,
Uranus.	177 .47 .18 ;

ajoutant donc ces arcs aux précédens, en rejetant encore les circonférences entières, on obtiendra pour les longitudes, au commencement de 1815,

Mercure.	210°.18′.39″ ,
Vénus.	283 .28 .23 ,
Mars.	223 .57 .28 ,

Jupiter.

Jupiter.	167	.17	.27	;
Saturne	306	.38	. 9	,
Uranus	237	.58	. 8	.

21. Le mouvement séculaire rétrograde du nœud de chaque planète et le mouvement de ce nœud pour 5113 jours ½ sont ainsi qu'il suit :

Mercure.	782″ ,	1′.49″ ,
Vénus.	1870 ,	4 .21 ,
Mars.	2329 ,	5 .26 ,
Jupiter	1578 ,	3 .41 ,
Saturne.	2260 ,	5 .16 ,
Uranus.	3598 ,	8 .23 ;

mais la longitude du nœud, au commencement de 1801, était

Mercure.	45°.57′.31″	,
Vénus.	74 .52 .40	,
Mars.	48 . 1 .28	,
Jupiter	98 .25 .34	,
Saturne.	111 .55 .47	,
Uranus	72 .51 .14	;

cette longitude ☊ devait donc être, au commencement de 1815,

Mercure. . . . . ☊=	45°.55′.47″	,
Vénus.	74 .48 .20	,
Mars	47 .56 . 2	,
Jupiter	98 .21 .53	,
Saturne.	111 .50 .31	,
Uranus	72 .42 .51	,

ôtant donc cette dernière longitude de celle de la planète pour la même époque de 1815, on obtiendra pour l'arc BL, base du triangle sphérique rectangle BLS,

Mercure.	BL=164°.23'. 0'',
Vénus.	208.40. 0,
Mars	176. 1.16,
Jupiter	68.55.34,
Saturne.	194.47.38,
Uranus.	165. 6.54;

mais, les inclinaisons β des orbites sont respectivement

Mercure.	β=5°. 0'. 0'',
Vénus.	3.23.35,
Mars.	1.51. 0,
Jupiter	1.18.52,
Saturne.	2.29.38,
Uranus.	0.46.25.

Divisant donc par le cosinus de cette inclinaison β la tangente de de BL, on obtiendra pour quotient la tangente de BS ou ω qu'on trouvera être ainsi

Mercure.	ω=164°.16'.29'';
Vénus.	208.42.36,
Mars.	176.1.9,
Jupiter	68.55.24,
Saturne.	194.48.30,

22. On a d'ailleurs, pour le commencement de 1815, le logarithme du rayon vecteur terrestre ou Log.a=9,9926560, la longitude héliocentrique de la terre ou θ=100°.16'.30'', et l'obliquité de l'écliptique ι=23°.27'.50''; d'après quoi on trouvera $\theta-\delta$ ainsi qu'il suit :

Mercure.	$\theta - \delta =$ 54°.20′.48″	,
Vénus.	25 .28 .10	,
Mars.	52 .20 .28	,
Jupiter	1 .54 .37	,
Saturne.	348 .24 . 0	,
Uranus	27 .33 .39	;

23. Avec toutes ces données, et à l'aide des formules du commencement de ce mémoire, on trouvera, pour la distance f de la terre à la planète et pour l'angle λ,

Mercure.	$f=$ 1,173566 ,	$\lambda=$ 38°.14′.14″ ,
Vénus.	1,705748 ,	67 .35 .20 ,
Mars.	2,208150 ,	40 .32 .54 ,
Jupiter.	4,903223 ,	95 .59 .14 ,
Saturne.	9,676540 ,	107 .29 .48 ,
Uranus.	19,919737 ,	71 .23 . 0 ;

et on aura enfin pour la déclinaison A', que nous mettons en regard avec celle des éphémérides,

	Suiv. not. cal.	Suiv. les éphém.	Diff.
Mercure.	22°.44′.37″.A	23°.13	+28′.23″,
Vénus.	23 .38 .20 .A	23 .38	− 0 .20 ,
Mars	19 .35 .40 .B	19 .34	− 1 .40 ;
Jupiter	1 .50 . 0 .A	2 .29	+29 . 0 ,
Saturne	21 .16 . 0 .A	20 .28	−48 . 0 ,
Uranus.	19 .58 . 0 .A	21 . 1	−63 . 0 .

24. En comparant successivement ces différences avec la plus

grande équation du centre de la planète, on trouve qu'elles en sont respectivement, du moins à peu de chose près, les fractions suivantes

$$\tfrac{1}{50},\ \tfrac{1}{150},\ \tfrac{1}{384},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{5};$$

Ces résultats, et sur-tout celui qui répond à Mercure, la plus excentrique de toutes les planètes, conduisent à conjecturer, avec beaucoup de vraisemblance, que l'ellipticité des orbites influe moins qu'on ne le croirait sur la déclinaison des planètes, que cependant l'erreur qui résulte du simple emploi des moyens mouvemens, dans le calcul de cette déclinaison, augmente avec les dimensions de l'orbite.

25. La condition du passage de la planète par le plan de l'équateur est renfermée dans l'équation $r\text{Sin.}\delta\text{Sin.}(\lambda+\omega)=a\text{Sin.}\lambda\,\text{Sin.}\theta$, (13). L'état insoluble de cette équation, dans la supposition du mouvement elliptique, nous oblige à nous contenter de l'emploi des mouvemens moyens. Encore serons-nous obligés de profiter de la circonstance favorable que nous présente l'inclinaison des orbites qui, dans notre système solaire, est partout assez petite pour qu'on puisse, sans erreur sensible, supposer $\text{Cos.}\,\beta=1$, ce qui donne simplement (17)

$$\omega=N-H+(n+h)t\,.$$

26. L'extrême lenteur du mouvement des nœuds nous permet en outre, du moins pour un nombre d'années limité, de supposer h nulle; il résultera de là $\omega=N-H+nt$. Dans cette même supposition, l'angle λ deviendra une quantité constante, et indépendante du temps. Ainsi désignant par L ce que devient λ lorsque dans l'expression générale de Tang. λ (9), on remplace la lettre δ par H (17), ce qui donnera

$$\text{Tang.}L=\frac{\text{Sin}\,H\text{Sin.}\varepsilon}{\text{Cos.}H\text{Sin.}\varepsilon+\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\beta},$$

l'équation finale du problème sera

$$r\text{Sin}\,H\text{Sin}.(L+N-H+nt)=a\text{Sin}.L\text{Sin}.(M+mt)\ .$$

27. Cette équation ne renferme que la seule inconnue t : c'est le nombre des jours comptés depuis l'époque fixe jusqu'à l'époque où se fera quelque passage de la planète par le plan de l'équateur. Les quantités m, n, a, r seront liées entr'elles par la loi de Képler $\left(\frac{m}{n}\right)^2=\left(\frac{r}{a}\right)^3$. Mais, comme les rapports $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{a}$ sont incommensurables, l'équation, malgré sa simplicité apparente, sera transcendante, et exigera, pour sa résolution l'emploi de la règle de fausse position. On sait de plus que la série que forment les racines de cette équation n'a rien de commun, même dans les cas les plus simples, avec les progressions arithmétiques, géométriques, recurrentes, etc.

28. La simplicité de l'équation finale (26) rend au moins l'emploi des fausses positions très-facile ; et on pourra s'en servir avec avantage, pour trouver les valeurs approchées des passages d'une planète par le plan de l'équateur, pour une année quelconque qui ne serait pas trop éloignée.

29. Après avoir discuté les cas où la déclinaison devient nulle, examinons les époques où elle parvient à son *maximum* ou *minimum*. Les notations précédentes seront conservées ; nous supposerons toujours h sensiblement nul, ce qui donnera $\delta=H$ et nous ferons la longitude de la planète EL ou $N+nt=\varkappa$.

30. Le quarré de la distance de la terre à la planète ou f^2 a été trouvé (6).

$$f^2=a^2-2ar[\text{Cos}.(\theta-\delta)\text{Cos}.\omega+\text{Sin}.(\theta-\delta)\text{Sin}.\omega\text{Cos}.\beta]+r^2.$$

En faisant $\text{Cos}.\beta=1$, cette formule deviendra

$$f^2=a^2-2ar\text{Cos}.(\theta-\delta-\omega)+r^2\ ,$$

ou bien

$$f^2=a^2-2ar\text{Cos}.[M-N+(m-n)t]+r^2\ ;$$

et, en différentiant,

$$fdf = ar(m-n)\text{Sin.}(\theta-\delta-\omega)dt.$$

31. L'expression générale du sinus de la déclinaison a été trouvée (9). Pour remplir la condition proposée, il faut égaler à *zéro* la différentielle de cette quantité. En y regardant a, r, δ, λ comme constants, nous n'y aurons que les trois seules variables θ, ω, f, qui toutes dépendent du temps; nous aurons ainsi

$$d\theta = m\,dt\ ,\quad d\omega = n\,dt$$

et nous venons de trouver df (30).

32. Nous parviendrons ainsi à une équation composée de huit termes, et qui a au moins l'apparence d'être compliquée. On y reconnaît bientôt les deux facteurs suivans

$$r\text{Sin.}\delta\text{Sin.}(\varkappa+\lambda-\delta) - a\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}\theta = F,$$

$$nr\text{Sin.}\delta\text{Cos.}(\varkappa+\lambda-\delta) - ma\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\theta = G\ ;$$

et l'équation devient ainsi

$$f^2G = arF(m-n)\text{Sin.}(\theta-\varkappa)\ .$$

33. Pour en tirer l'inconnue t, voyons ce qu'elle deviendrait dans le cas d'une planète dont l'orbite serait couchée dans le plan de l'écliptique. L'angle β alors serait égal à *zéro*; la différence angulaire $\lambda-\delta$ s'évanouirait; et toute l'équation serait divisible par $\text{Sin.}\delta = \text{Sin.}\lambda$. Supprimant ce facteur commun, on aurait

$$F = r\text{Sin.}\varkappa - a\text{Sin.}\theta\ ,\qquad G = nr\text{Cos.}\varkappa - ma\text{Cos.}\theta\ .$$

L'équation serait alors décomposable dans les deux facteurs qui suivent

$$r\text{Cos.}\varkappa - a\text{Cos.}\theta\ ,$$

$$nr^2 - ar(m+n)\text{Cos.}(\theta-\varkappa) + ma^2\ .$$

34. En égalant le premier facteur à *zéro*, on obtient l'équation

$$r\text{Cos.}(N+nt) = a\text{Cos.}(M+mt)\ ;$$

elle répond naturellement à l'équation trouvée (26) qui dans la même hypothèse, se réduit à

$$r\text{Sin.}(N+nt)=a\text{Sin.}(M+mt)\ ,$$

et fait connaître les passages de la planète par le plan de l'équateur.

35. Le second facteur égalé à *zéro* donne

$$\text{Cos.}(\theta-x)=\text{Cos.}[M-N+(m-n)t]=\frac{ma^2+nr^2}{(m+n)ar}\ .$$

Cette formule est connue ; c'est celle qui détermine l'époque où la planète devient *stationnaire*. Ainsi donc, en supposant le mouvement de la planète uniforme et circulaire, et son orbite couchée dans le plan même de l'écliptique, elle parviendra à sa plus grande ou à sa moindre déclinaison au moment même où elle deviendra stationnaire.

36. On sait que le cosinus de tout angle A est aussi celui des angles $2\varpi-A$, $2\varpi+A$, $4\varpi-A$, $4\varpi+A$, etc. En conséquence, en désignant par A le moindre des angles qui aura $\frac{ma^2+nr^2}{(m+n)ar}$ pour cosinus, et par t, t', t'',.... les valeurs consécutives de l'inconnue t, on aura

$$(m-n)t=\quad A-M+N\ ,\quad (m-n)t'=2\varpi-A-M+N\ ,$$

$$(m-n)t''=2\varpi+A-M+N\ ,\quad (m-n)t'''=4\varpi-A-M+N\ ,$$

$$(m-n)t^{\text{IV}}=4\varpi+A-M+N\ ,\quad (m-n)t^{\text{V}}=6\varpi-A-M+N\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

Ces racines formeront ainsi deux progressions arithmétiques ayant pour différence commune $\frac{2\varpi}{m-n}$; c'est la durée d'une révolution synodique.

37. Donc, en supposant la planète mue dans le plan de l'écliptique, d'un mouvement uniforme et circulaire, les époques des plus grandes

et des moindres déclinaisons forment trois progressions très-distinctes. La première comprend les racines de l'équation $r\text{Cos.}(N+nt)=a\,\text{Cos.}(M+mt)$. Les déclinaisons que cette équation fait connaître sont toutes du genre des *maxima* ; elles précèdent et elles suivent les passages de la planète par l'équateur, et elles sont ainsi alternativement boréales et australes. Les deux autres forment deux progressions arithmétiques, indépendantes de cette première, qui ont pour différence commune la durée de la révolution synodique, et dans lesquelles la différence de deux termes correspondans $t''-t'$, $t'''-t''$, ... sera partout la même, savoir $\frac{2A}{m-n}$.

38. Nous avons rassemblé dans les deux tables qui suivent les plus grandes et les moindres déclinaisons, de même que les passages par l'équateur, de la planète de Mars, pendant les cinq années 1811, 1812, 1813, 1814, 1815. Les jours sont comptés d'une série continue, depuis le 1.er de l'an 1811.

39. La première table contient les passages de Mars par l'équateur, ainsi que les plus grandes déclinaisons dont ils sont précédés et suivis ; ces dernières, qui résultent de l'équation $r\text{Cos.}x=a\text{Cos.}\theta$, sont alternativement désignées par les lettres A et B ; les passages le sont alternativement par AB et BA, suivant que l'astre entre dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral.

Plus grandes déclinais. et passages par l'équat.	*Jours.*	*Différenc.*
26°. 1′ A	265	
AB	394	 129
24°.22′ B	524	 130
BA	666	 142
23°.38′ A	815	 149
AB	1096	 282
24°.36′.B	1235	 138

Ces

BA	1377	142
23°.44′. A	1511	134
AB	1652	141

La plupart de ces différences varient, il est vrai, entre des limites assez resserrées 129 et 149 ; mais la différence 282 suffit seule pour exclure tout soupçon d'une presque égalité qui pourrait exister entre elles.

La seconde table contient les époques où la planète parvient à sa plus grande ou à sa moindre déclinaison, sans traverser le plan de l'équateur, conformément aux formules (35, 36) ; ces époques sont celles qui suivent :

Plus grande	A	136 jours.
Moindre	A	175
Plus grande	A	891
Moindre	A	962
Plus grande	B	1718
Moindre	B	1770

Les plus grandes déclinaisons ont lieu aux époques 136, 891, 1718 jours, et les plus petites aux époques 175, 962, 1770. Les différences des premiers nombres sont 755 et 827, dont la moyenne est 791 ; les différences des derniers sont 787 et 808, dont la moyenne est 797. Le milieu entre ces deux moyennes 794, et la durée de la révolution synodique est seulement 780 ; la différence de 14 jours doit être rejetée sur l'ellipticité de l'orbite et sur l'angle d'environ deux degrés que fait le plan de cette orbite avec celui de l'écliptique.

40. On peut remarquer que les plus grandes et les moindres longitudes géocentriques ont lieu aux jours qui suivent :

Plus grande. . . .	110 jours.
Moindre.	176
Plus grande. . . .	912
Moindre.	973
Plus grande. . . .	1717
Moindre.	1780

Ainsi les jours des plus grandes et des moindres longitudes ne sont pas éloignés de ceux des plus grandes et des moindres déclinaisons, conformément à la remarque déjà faite (35). Les plus grandes et les moindres déclinaisons, tirées de l'équation $r\text{Cos.}(N+nt)=a\text{Cos.}(M+mt)$, n'ont rien de commun avec les plus grandes et les moindres longitudes géocentriques, ce qui nous apprend à les distinguer facilement, par la simple observation des longitudes, de celles qui répondent à l'autre équation

$$nr^2-(m+n)ar\text{Cos.}(\theta-\varkappa)+ma^2=0 .$$

41. Pour déterminer, d'après les tables ou les observations, le jour et même l'heure où les plus grandes ou moindres déclinaisons ont dû avoir lieu, on peut employer la méthode qui suit. Soient x le temps et y la déclinaison qui y répond, aux environ du *maximum* ou du *minimum*; il sera permis de supposer

$$y=A+Bx+Cx^2 .$$

La déclinaison y parviendra à son *maximum* ou *minimum*, lorsque $x = -\frac{B}{2C}$: on aura dans ce cas

$$\gamma = \frac{4AC - B^2}{4C}.$$

42. Pour déterminer les coefficiens A, B, C, on emploîra les déclinaisons, calculées ou observées, α, β, γ, répondant respectivement aux temps.... a, b, c, de manière que la déclinaison moyenne β soit plus grande ou moindre que chacune des extrêmes α, γ. Alors on aura les trois équations

$$\alpha = A + Ba + Ca^2,$$

$$\beta = A + Bb + Cb^2,$$

$$\gamma = A + Bc + Cc^2;$$

desquelles on tirera

$$A = -\frac{bc(b-c)\alpha + ca(c-a)\beta + ab(a-b)\gamma}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

$$B = +\frac{(b^2-c^2)\alpha + (c^2-a^2)\beta + (a^2-b^2)\gamma}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

$$C = -\frac{(b-c)\alpha + (c-a)\beta + (a-b)\gamma}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Le temps au bout duquel la plus grande ou la moindre déclinaison aura lieu sera

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(b^2-c^2)\alpha + (c^2-a^2)\beta + (a^2-b^2)\gamma}{(b-c)\alpha + (c-a)\beta + (a-b)\gamma};$$

et cette déclinaison sera

$$y = \frac{(b-c)^4\alpha^2 + (c-a)^4\beta^2 + (a-b)^4\gamma^2 - 2(b-c)^2(c-a)^2\alpha\beta - 2(c-a)^2(a-b)^2\beta\gamma - 2(a-b)^2(b-c^2\gamma\alpha}{4(b-c)(c-a)(a-b)[(b-c)\alpha + (c-a)\beta + (a-b)\gamma]}.$$

Si l'on prend les temps en progression arithmétique, ce qui permettra de supposer $a=-1$, $b=0$, $c=+1$, ces formules deviendront

$$x=\tfrac{1}{2}\,\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-2\beta+\gamma}\,,\quad y=\tfrac{1}{8}\cdot\frac{\alpha^2+16\beta^2+\gamma^2-8\alpha\beta-8\beta\gamma-2\gamma\alpha}{\alpha-2\beta+\gamma}\,.$$

43. Les formules qui ont été l'objet de ce mémoire, fondées sur ce que l'orbite de la planète était supposée dans le plan de l'éliptique, subissent quelques modifications lorsqu'elle est hors de ce plan ; ce qui sera l'objet d'un autre mémoire.