TÉDÉNAT

Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 356 du V.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 129-132

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__129_1>

Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 356 du V.e volume des Annales ;

Par M. Tédénat, correspondant de l'institut, recteur de l'académie de Nismes.

PROBLÈME I. *Déterminer les trois côtés d'un triangle, en fonction des perpendiculaires abaissées sur leurs directions du centre du cercle circonscrit ?*

Solution. Soient X, Y, Z les trois angles du triangle ; x, y, z les côtés respectivement opposés ; et enfin, a, b, c les perpendiculaires abaissees sur leurs directions du centre du cercle circonscrit.

La droite qui joint le centre à l'une quelconque des extremites du côté z est l'hypothénuse d'un triangle-rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont $\frac{1}{2}z$ et c, et dans lequel l'angle opposé a $\frac{1}{2}z$ est Z ; d'où il suit qu'on doit avoir

$$2c\text{Tang}\,Z=z\ ;$$

ou, en quarrant et transformant la tangente en fonction du cosinus

$$4c^2=(4c^2+z^2)\text{Cos.}^2Z\ . \qquad (1)$$

Les pieds des perpendiculaires a, b étant les milieux respectifs des côtés x, y, il s'ensuit que la droite qui les joint est parallèle à z et égale à $\frac{1}{2}z$; et, comme d'ailleurs l'angle de ces deux droites a, b est supplément de Z, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$z^2=4(a^2+b^2+2ab\text{Cos.}Z)$$

ou

$$z^2-4(a^2+b^2)=8ab\text{Cos.}Z\ . \qquad (2)$$

Si, entre les équations (1) et (2), on élimine z^2, il viendra

$$2ab\text{Cos.}^3Z+(a^2+b^2+c^2)\text{Cos.}^2Z-c^2=0\ ;$$

ou encore

$$c^2\text{Sec.}^3Z-(a^2+b^2+c^2)\text{Sec.}Z-2ab=0\ ; \qquad (3)$$

équation du troisième degré, sans second terme, qui est dans le cas irréductible ; et on aura deux autres équations analogues pour déterminer X et Y. X, Y, Z étant ainsi connus, on menera par un même point trois droites égales à a, b, c formant autour de ce point des angles supplémens de ceux-là ; menant ensuite à ces trois droites par leurs extrémités des perpendiculaires, terminées à leur rencontre commune, le triangle demandé se trouvera construit.

Si l'on voulait avoir immédiatement l'équation qui donne le côté z, il ne s'agirait que d'éliminer Cos.Z entre les équations (1) et (2), ce qui donnerait

$$z^6-4(2a^2+2b^2-c^2)z^4+16(a^2+b^2)(a^2+b^2-2c^2)z^2+64c^2(a^2-b^2)^2=0\ ;$$

et l'on aurait des équations analogues pour x et y. Le dernier terme de cette équation étant positif, il s'ensuit que, si le problème est possible, il n'admettra que deux solutions au plus.

PROBLÈME II. Déterminer les trois côtés d'un triangle, en fonction des droites qui joignent le centre du cercle inscrit à ses sommets ?

Solution. Soient encore ici x, y, z les trois côtés du triangle ; X, Y, Z les angles respectivement opposés ; et soient a, b, c les droites qui joignent le centre à leurs sommets.

La droite c est l'hypothénuse commune de deux triangles-rectangles, dont un des côtés de l'angle droit est le rayon r du cercle inscrit, et dans lesquels l'angle opposé est $\frac{1}{2}Z$; d'où il suit qu'on doit avoir

$$r=c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}Z\ . \qquad (1)$$

Les droites a, b forment avec le côté z un triangle, dans lequel l'angle opposé à z est $q+\frac{1}{2}Z$, q désignant l'angle droit ; l'aire de ce triangle est donc

$$\tfrac{1}{2}ab\text{Sin.}(q+\tfrac{1}{2}Z)=\tfrac{1}{2}ab\text{Cos.}\tfrac{1}{2}Z\ ;$$

mais, comme sa hauteur est r, son aire aura aussi pour expression $\frac{1}{2}rz$; donc

$$rz=ab\text{Cos}\tfrac{1}{2}Z\ ;$$

ou, en éliminant r, au moyen de l'équation (1)

$$cz\text{Sin.}\tfrac{1}{2}Z=ab\text{Cos.}\tfrac{1}{2}Z\ . \qquad (2)$$

D'un autre côté, le même triangle donne

$$z^2=a^2+b^2+2ab\text{Sin.}\tfrac{1}{2}Z\ . \qquad (3)$$

En éliminant z, entre les équations (2) et (3) et transformant le cosinus en sinus, il vient

$$2abc^2\text{Sin.}^3\tfrac{1}{2}Z+[c^2(a^2+b^2)+a^2b^2]\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}Z-a^2b^2=0\ ,$$

ou encore

$$a^2b^2\text{Cosec.}^3\tfrac{1}{2}Z-[c^2(a^2+b^2)+a^2b^2]\text{Cosec.}\tfrac{1}{2}Z-2abc^2=0\ ;$$

équation du troisième degré, sans second terme qui est dans le cas irréductible; et on aura deux autres équations analogues pour déterminer X et Y. X, Y, Z étant ainsi connus; on menera, par un même point trois droites, égales à a, b, c, formant autour de ce point des angles $q+\frac{1}{2}X$, $q+\frac{1}{2}Y$, $q+\frac{1}{2}Z$. En joignant leurs extrémités par trois autres droites, le triangle demandé se trouvera construit.

Si l'on voulait avoir immédiatement l'equation qui donne le côté z, il ne s'agirait que d'éliminer Sin.$\frac{1}{2}Z$ du quarré de l'équation (2), au moyen de l'équation (3), après y avoir transformé le cosinus en sinus, ce qui donnerait

$$c^2z^6+[a^2b^2-2c^2(a^2+b^2)]z^4-(a^2+b^2)[2a^2b^2-c^2(a^2+b^2)]z^2a^2+b^2(a^2-b^2)^2=0\ ;$$

et l'on aurait des équations analogues pour x et y. On voit encore ici que le dernier terme de l'équation étant positif, le problème, lorsqu'il sera possible, n'admettra que deux solutions au plus.