ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

BRET

Géométrie analitique. Solution de quelques problèmes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 6 (1815-1816), p. 11-16
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__11_1>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Solution de quelques problèmes ;

Par M. Bret, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

J'AI déjà insisté plusieurs fois dans ce recueil sur l'avantage qu'il peut souvent y avoir à représenter par deux équations une ligne droite sur un plan, et par trois équations une ligne droite ou un plan dans l'espace. Je vais confirmer encore ce que j'ai dit alors, en traitant par cette voie quelques problèmes indéterminés, relatifs à la génération des lignes et des surfaces, et dont la solution, par les procédés ordinaires, exige des calculs assez compliqués.

PROBLÈME I. Une droite se meut parallèlement, à elle-même, sur le plan de deux droites fixes. Dans chaque position de la droite mobile, on prend sur elle un point tel que la somme ou la différence des quarrés des distances de ce point aux intersections de cette droite avec les deux droites fixes soit égale à un quarré donné et constant; on demande à quelle ligne appartient l'ensemble des points ainsi déterminés?

Solution. Soient prises les droites fixes pour axes des coordonnées; soit γ l'angle qu'elles forment, et soit q^2 le quarré constant donné.

Soient X, Y les coordonnées courantes sur le plan, et x, y celles du point décrivant; l'équation du système des deux droites fixes sera

$$XY=0\ ; \qquad (1)$$

en prenant donc pour les équations de la droite mobile

$$X=x+ar\ , \quad Y=y+br\ , \qquad (2)$$

ce qui donne

$$a^2+b^2+2ab\text{Cos.}\gamma=1\ ; \qquad (3)$$

nous aurons, en substituant (2) dans (1),

$$(x+ar)(y+br)=0\ . \qquad (4)$$

Si nous représentons par r, r' les deux racines de cette équation, nous aurons

$$r=-\frac{x}{a}\ , \quad r'=-\frac{y}{b}\ ;$$

et, par la condition du problème,

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=q^2\;; \qquad (5)$$

équation d'une ligne du second ordre qui a son centre à l'origine, c'est-à-dire, à l'intersection des deux droites fixes.

En désignant par A, B les moitiés des diamètres conjugués auxquels la courbe se trouve rapportée, nous aurons

$$a=\frac{A}{q}\,,\quad b=\frac{B}{q}\;; \qquad (6)$$

ce qui donnera, en substituant dans (3),

$$q^2=A^2+B^2+2AB\mathrm{Cos}.\gamma\;;$$

q est donc la diagonale du parallélogramme construit sur les grandeurs et directions de nos deux demi-diamètres conjugués. Les équations de la droite mobile sont d'ailleurs (2) et (6)

$$X=x+\frac{A}{q}r\,,\quad Y=y+\frac{B}{q}r\,.$$

PROBLÈME II. Une droite qui se meut dans l'espace, parallèlement à elle-même, perce perpétuellement trois plans fixes; dans chacune de ses situations, on prend sur elle un point tel que la somme ou la différence des quarrés de ses distances aux points où elle perce les plans fixes est égale à un quarré donné et constant; on demande à quelle surface appartient l'ensemble des points ainsi déterminés?

Solution. Soient pris les trois plans fixes pour plans coordonnés; soient α, β, γ les angles que forment les axes, et soit q^2 le quarré constant donné.

Soient X, Y, Z les coordonnées courantes dans l'espace, et x, y, z celles du point décrivant; l'équation du système des trois plans fixes sera

$$XYZ=0\,; \tag{1}$$

en prenant donc pour les équations de la droite mobile

$$\left.\begin{aligned} X&=x+ar\,,\\ Y&=y+br\,,\\ Z&=z+cr\,; \end{aligned}\right\}(2)$$

ce qui donne

$$a^2+b^2+c^2+2bc\text{Cos.}\alpha+2ca\text{Cos.}\beta+2ab\text{Cos.}\gamma=1\,; \tag{3}$$

nous aurons, en substituant (2) dans (1)

$$(x+ar)(y+br)(z+cr)=0\,. \tag{4}$$

Si nous représentons par r, r', r'' les trois racines de cette équation, nous aurons

$$r=-\frac{x}{a}\,;\quad r'=-\frac{y}{b}\,,\quad r''=-\frac{z}{c}\,;$$

et, par la condition du problème,

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=q^2\,; \tag{5}$$

équation d'une surface du second ordre qui a son centre à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire, à l'intersection des trois plans fixes.

En désignant par A, B, C les moitiés des diamètres conjugués auxquels la surface se trouve rapportée, nous aurons

$$a=\frac{A}{q}\,,\quad b=\frac{B}{q}\,,\quad c=\frac{C}{q}\,, \tag{6}$$

ce qui donnera, en substituant dans (3),

$$q^2=A^2+B^2+C^2+2BC\,\mathrm{Cos.}\alpha+2Ca\,\mathrm{Cos.}\beta+2AB\,\mathrm{Cos.}\gamma\ ;$$

q est donc la diagonale du parallélipipède construit sur les grandeurs et directions de nos trois demi-diamètres conjugués. Les équations de la droite mobile sont d'ailleurs (2) et (6)

$$X=x+\frac{A}{q}r\,,\qquad Y=y+\frac{B}{q}r\,,\qquad Z=z+\frac{C}{q}r\,.$$

PROBLÈME III. Quelle courbe décrit un quelconque des points d'une droite mobile, dont deux autres points sont assujettis à être perpétuellement sur deux droites fixes tracées sur un même plan ?

Solution. En conservant les mêmes notations et conventions que dans le *Problème I*, nous aurons comme alors

$$(x+ar)(y+br)=0\ ;$$

mais ici les racines doivent être deux constantes ; en les représentant donc par g et h, nous aurons

$$g=-\frac{x}{a}\,,\quad h=-\frac{y}{b}\,,$$

d'où

$$a=-\frac{x}{g}\,,\quad b=-\frac{y}{h}\ ;$$

substituant donc dans

$$a^2+b^2+2ab\,\mathrm{Cos.}\gamma=1\,,$$

nous aurons, pour l'équation de la ligne cherchée,

$$\frac{x^2}{g^2}+\frac{y^2}{h^2}+2\frac{xy}{gh}\mathrm{Cos.}\gamma=1\ ;$$

cette ligne est donc une ligne du second ordre qui a son centre à l'intersection des deux droites fixes.

PROBLÈME IV. Quelle surface décrit dans l'espace un point quelconque d'une droite mobile, dont trois autres points sont assujettis à rester perpétuellement sur trois plans fixes ?

Solution. En conservant les mêmes notations et conventions que dans le *Problème II*, nous aurons comme alors

$$(x+ar)(y+br)(z+cr)=0\ ;$$

mais ici les racines doivent être trois constantes ; en les représentant donc par g, h, k, nous aurons

$$g=-\frac{x}{a}\ ,\quad h=-\frac{y}{b}\ ,\quad k=-\frac{z}{c}\ ,$$

d'où

$$a=-\frac{x}{g}\ ,\quad b=-\frac{y}{h}\ ,\quad c=-\frac{z}{k}\ ;$$

Substituant donc dans

$$a^2+b^2+c^2+2bc\,\mathrm{Cos}.\alpha+2ca\,\mathrm{Cos}.\beta+2ab\,\mathrm{Cos}.\gamma=1\ ;$$

nous aurons, pour l'équation de la surface cherchée,

$$\frac{x^2}{g^2}+\frac{y^2}{h^2}+\frac{z^2}{k^2}+2\frac{yz}{hk}\,\mathrm{Cos}.\alpha+2\frac{zx}{kg}\,\mathrm{Cos}.\beta+2\frac{xy}{gh}\,\mathrm{Cos}.\gamma=1\ ;$$

cette surface est donc une surface du second ordre ayant son centre à l'intersection des trois plans fixes.

Cette génération des surfaces du second ordre a fixé particulièrement l'attention de M. Dupin, dans ses excellens *Développemens de géométrie*, page 340.

QUESTIONS