# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.



BRET


## Analise algébrique. Théorèmes nouveaux, sur les limites extrêmes des racines des équations numériques


*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 6 (1815-1816), p. 112-122

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1815-1816__6__112_0>

# ANALISE ALGÉBRIQUE.

## *Théorèmes nouveaux, sur les limites extrêmes des racines des équations numériques;*

Par M. Bret, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

Pour rendre la théorie que je vais développer plus facile à saisir, je crois convenable de l'appliquer à un exemple particulier. Rien ne sera plus facile ensuite que de l'exposer d'une manière générale.

Soit donc l'équation du 9.$^{me}$ degré

$$ax^9+bx^8-cx^7-dx^6+ex^5-fx^4-gx^3+hx^2-kx+l=0\,, \qquad (1)$$

dans laquelle les signes sont supposés en évidence; et proposons-nous d'obtenir une limite supérieure de ses racines.

Nous remarquerons d'abord que, quels que soient $A$ et $m$, on a

$$Ax^m=A(x^m-1)+A=A(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)+A$$

ou, en posant pour abréger $x-1=y$ d'où $x=1+y$

$$Ax^m=Ayx^{m-1}+Ayx^{m-2}+\ldots+Ayx+Ay+A\,. \qquad (2)$$

Cela posé, appliquons la transformation (2) à tous les termes *positifs* de l'équation (1), et nous aurons

$$ax^9 = ayx^8+ayx^7+ayx^6+ayx^5+ayx^4+ayx^3+ayx^2+ayx+ay+a\ ;$$

$$bx^8 = \ldots\ldots byx^7+byx^6+byx^5+byx^4+byx^3+byx^2+byx+by+b\ ,$$

$$ex^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots eyx^4+eyx^3+eyx^2+eyx+ey+e\ ,$$

$$hx^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots hyx+hy+h\ ,$$

$$l = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots l\ .$$

Introduisant ces développemens dans l'équation (1), rassemblant les termes affectés des mêmes puissances de $x$, et écrivant les premiers ceux de ces termes dont le coefficient renferme une partie négative, on obtiendra la transformée

$$\{(a+b)y-c\}x^7+\{(a+b)y-d\}x^6+\{(a+b+e)y-f\}x^4+\{(a+b+e)y-g\}x^3+\{(a+b+e+h)y-k\}x$$
$$+y\{ax^8+(a+b)x^5+(a+b+e)x^2+(a+b+e+h)\}+(a+b+e+h+l)=0\ . \qquad (3)$$

Or, il est clair que, pourvu qu'on ne prenne pas $y$ négatif ou, ce qui revient au même, $x$ positif plus petit que l'unité, les termes de la seconde ligne donneront toujours un résulsat positif quelque autre valeur qu'on puisse d'aillenrs prendre pour $x$; donc, pour que toute autre valeur, mise pour $x$ dans l'équation (1), ne donne point un résultat négatif, il suffit uniquement qu'elle ne rende point négative la première ligne de l'équation (3), ce qui arrivera infailliblement si elle ne rend négatif aucun des termes qui la composent.

Cette condition sera évidemment remplie, si l'on fait en sorte que les binômes

$$(a+b)y-c\ ,\ (a+b+e)y-f\ ,\ (a+b+e+h)y-k\ ,$$
$$(a+b)y-d\ ,\ (a+b+e)y-g\ ,$$

soient positifs; or, c'est ce qui arrivera nécessairement, si l'on ne prend pas $y$ ou $x-1$ moindre que la plus grande des fractions

$$\frac{c}{a+b}, \frac{d}{a+b}, \frac{f}{a+b+e}, \frac{g}{a+b+e}, \frac{k}{a+b+e+h},$$

ou, ce qui revient au même, si l'on ne prend pas $x$ moindre que le plus grand des cinq nombres

$$1+\frac{c}{a+b}, \ 1+\frac{d}{a+b}, \ 1+\frac{f}{a+b+e}, \ 1+\frac{g}{a+b+e}, \ 1+\frac{k}{a+b+e+h};$$

ce qui fournit la règle suivante.

*THÉORÈME I. En ajoutant successivement à l'unité une suite de fractions ayant pour numérateurs les coefficiens négatifs d'une équation proposée, pris positivement, et pour dénominateurs la somme de tous les coefficiens positifs qui les précèdent respectivement, le plus grand des nombres résultans pourra être pris pour limite supérieure des racines de cette équation.*

Il est entendu au surplus que, dans la pratique, il suffira de considérer le plus grand coefficient dans chacune des séries de termes négatifs.

Appliquons cette règle à la recherche d'une limite supérieure des racines de l'équation

$$2x^7+11x^6-10x^5-26x^4+31x^3+72x^2-230x-348=0;$$

cette limite sera le plus grand des deux nombres

$$1+\frac{26}{2+11} \quad \text{ou} \quad 1+\frac{26}{13};$$

$$1+\frac{348}{2+11+31+72} \quad \text{ou} \quad 1+\frac{348}{116};$$

ainsi, cette limite sera 4.

Si l'on veut obtenir la limite inférieure des mêmes racines; on remarquera qu'en changeant les signes des racines de la proposée, elle devient

$$2x^7-11x^6-10x^5+26x^4+31x^3-72x^2-230x+348=0\ ;$$

or, par la règle ci-dessus, on pourra prendre pour limite supérieure des racines de cette dernière le plus grand des nombres

$$1+\frac{11}{2}$$

$$1+\frac{230}{2+26+31} \quad \text{ou} \quad 1+\frac{230}{59}\ ;$$

ainsi, cette limite sera 7 ; d'où il résulte que toutes les racines réelles de la proposée sont comprises entre $+4$ et $-7$.

La méthode vulgaire, indiquée par M. Lacroix dans ses élémens, donne pour ces limites $+175$ et $-116$; la méthode plus parfaite de Lagrange, adoptée par M. Francœur, donne $+20$ et $-116$, on voit par là combien la nôtre leur est préférable. Je ne dis rien de la méthode des dérivées successives, attribuée à Mac-Laurain, laquelle n'est qu'un tâtonnement assez laborieux.

Reprenons la transformée (3). En vertu de la formule (2) on a

$$ax^8=ayx^7+ayx^6+ayx^5+ayx^4+ayx^3+ayx^2+ayx+ay+a.$$

Mais, en vertu de la même formule les termes $ayx^5$ et $ayx^2$ peuvent être développés comme il suit :

$$ayx^5=ay^2x^4+ay^2x^3+ay^2x^2+ay^2x+ay^2+ay\ ;$$

$$ayx^2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ay^2x+ay^2+ay\ ;$$

ce qui donnera, en substituant et ordonnant,

$$ax^8 = ayx^7 + ayx^6 + \begin{array}{l|l|l|l|l|l} ay^2 & x^4 + ay^2 & x^3 + ay^2 & x^2 + 2ay^2 & x + 2ay^2 & + 2ay \\ + ay & + ay & + ay & + ay & + ay & + a \end{array} .$$

Mais on aura encore, en vertu de la même formule (2),

$$(2ay^2 + ay)x^2 = \begin{array}{l|l|l} 2ay^3 & x + 2ay^3 & + 2ay^2 \\ + ay^2 & + ay^2 & + ay \end{array} ;$$

ce qui donnera, en substituant de nouveau

$$ax^8 = ayx^7 + ayx^6 + \begin{array}{l|l|l|l|} ay^2 & x^4 + ay^2 & x^3 + ay^3 & x + ay^3 \\ + ay & + ay & + 2ay^2 & + 3ay^2 \\ & & + ay & + 3ay \\ & & & + a \end{array} .$$

Par de semblables transformations, on trouvera

$$(a+b)x^5 = (a+b)yx^4 + (a+b)yx^3 + \begin{array}{l|l|} (a+b)y^2 & x + (a+b)y^2 \\ + (a+b)y & + 2(a+b)y \\ & + (a+b) \end{array} ;$$

$$(a+b+e)x^2 = (a+b+e)yx + \begin{array}{l|} (a+b+e)y \\ + (a+b+e) \end{array}$$

$$(a+b+e+h) = (a+b+e+h) .$$

En ajoutant ensemble tous ces résultats, il viendra

$$ax^8 + (a+b)x^5 + (a+b+e)x^2 + (a+b+e+h)$$

$$= ayx^7,$$

$$=ayx^7+ayx^6+\left.\begin{array}{r}ay^2\\+(2a+b)y\end{array}\right|x^4+\left.\begin{array}{r}ay^2\\+(2a+by)y\end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{r}ay^3\\+\ (3a+b)y^2\\+(3a+2b+e)y\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{r}ay^3\\+\quad(4a+b)y^2\\+\ (6a+3b+e)y\\+(4a+3b+2e+h)\end{array}\right|$$

substituant cette valeur dans l'équation (3), elle prendra la forme que voici :

$$\left.\begin{array}{r}\{ay^2+(a+b)y-c\}x^7+\{ay^2+(a+b)y-d\}x^6\\ +\{ay^3+(2a+b)y^2+(a+b+e)y-f\}x^4\\ +\{ay^3+(2a+b)y^2+(a+b+e)y-g\}x^3\\ +\{ay^4+(3a+b)y^3+(3a+2b+e)y^2+(a+b+e+h)y-k\}x\\ +\{ay^4+(4a+b)y^3+(6a+3b+e)y^2+(4a+3b+2e+h)y+(a+b+e+h+l)\}=0.\end{array}\right\}\quad(4)$$

Or, il est clair que, pourvu que $y$ soit positif, ou que $x$ soit plus grand que l'unité, la dernière ligne de cette équation sera toujours positive ; il suffira donc, pour que tout son premier membre le soit, de donner à $y$ une valeur positive qui ne rende négatif aucun des coefficiens des termes en $x$ ; or, comme tous les termes qui composent chacun de ces coefficiens sont positifs excepté le dernier, il suffira, pour satisfaire à cette condition, de prendre $y$ tel que dans aucun de ces coefficiens le premier terme ne soit moindre que le dernier, ce qui revient à faire

$$\begin{array}{ll}ay^2>c\,, & ay^3>f\,,\\ ay^2>d\,, & ay^3>g\,;\end{array}\quad ay^4>k\,,$$

le signe $>$ n'excluant pas l'égalité ; or, cela se réduit évidemment à prendre $x$ au moins aussi grand que le plus grand des nombres

$$1+\sqrt[2]{\frac{c}{a}}, \quad 1+\sqrt[3]{\frac{f}{a}}, \quad 1+\sqrt[2]{\frac{d}{a}}, \quad 1+\sqrt[3]{\frac{g}{a}}, \quad 1+\sqrt[4]{\frac{k}{a}};$$

ce qui fournit cette seconde règle :

*THÉORÈME II. Si, après avoir divisé successivement chacun des coefficiens négatifs d'une équation par le coefficient du premier terme, on extrait de chaque quotient une racine dont le degré soit le nombre des termes positifs qui précèdent le coefficient négatif dont il s'agit, le plus grand des nombres qu'on obtiendra en augmentant chacune de ces racines d'une unité pourra être pris pour limite supérieure des racines de l'équation proposée.*

Il est entendu au surplus que, dans l'application de cette règle, comme dans celle de la précédente, il suffira d'avoir égard au plus grand coefficient négatif de chaque série de termes consécutivement négatifs.

En faisant l'application de cette règle à l'équation déjà prise pour exemple, on trouvera, pour la limite des racines positives le plus grand des nombres,

$$1+\sqrt[2]{\frac{26}{2}}, \quad 1+\sqrt[4]{\frac{348}{2}};$$

et pour la limite des racines négatives, prise positivement, le plus grand des nombres

$$1+\sqrt[1]{\frac{11}{2}}, \quad 1+\sqrt[3]{\frac{230}{2}};$$

c'est-à-dire, que ces deux limites seront $+5$ et $-7$. On voit que cette règle rentre dans celle qu'indique M. Francœur.

Au lieu de faire abstraction des termes intermédiaires des polynômes en $y$ qui multiplient les diverses puissances de $x$, dans l'équation (4), on peut y avoir égard, et chercher à rendre ces polynômes tous positifs par l'application du *Théorème I*; on verra sur-le-champ qu'il faut pour cela prendre $y$ au moins égal au plus grand des nombres

$$1+\frac{c}{b+2a},\quad 1+\frac{f}{e+2b+4a},$$
$$1+\frac{k}{h+2e+4b+8a};$$
$$1+\frac{d}{b+2a},\quad 1+\frac{g}{e+2b+4a},$$

ce qui revient à prendre $x$ au moins égal au plus grand des nombres

$$2+\frac{c}{b+2a};\quad 2+\frac{f}{e+2b+4a},$$
$$2+\frac{k}{h+2e+4b+8a};$$
$$2+\frac{d}{b+2a};\quad 2+\frac{g}{e+2b+4a},$$

c'est-à-dire, qu'on peut prendre pour limite supérieure des racines le plus grand des nombres qu'on obtient en ajoutant à *deux* unités une suite de fractions ayant pour numérateurs les divers coefficiens négatifs pris positivement, et pour dénominateurs la somme des produits des coefficiens positifs qui les précèdent respectivement, et de droite à gauche, par les puissances successives de *deux*, à partir de sa puissance zéro, ou de l'unité.

Mais, de même que nous avons appliqué le *Théorème I* à l'équation (4), pour en conclure ce dernier, nous pouvons également lui appliquer celui-ci, et nous en conclurrons qu'en y prenant pour $y$ le plus grand des nombres

$$2+\frac{c}{(a+b)+2a}=2+\frac{c}{b+3a}\ ,$$

$$2+\frac{d}{(a+b)+2a}=2+\frac{d}{b+3a}\ ,$$

$$2+\frac{f}{(a+b+e)+2(2a+b)+4a}=2+\frac{f}{e+3b+9a}\ ;$$

$$2+\frac{g}{(a+b+e)+2(2a+b)+4a}=2+\frac{g}{e+3b+9a}\ ,$$

$$2+\frac{k}{(a+b+e+h)+2(3a+2b+e)+4(3a+b)+8a}$$

$$=2+\frac{k}{h+3e+9b+27a}\ ;$$

ou, ce qui revient au même, en prenant pour $x$ le plus grand des nombres

$$3+\frac{c}{b+3a}\ ;\quad 3+\frac{f}{e+3b+9a}\ ,$$

$$3+\frac{k}{h+3e+9b+27a}\ ;$$

$$3+\frac{d}{b+3a}\ ,\quad 3+\frac{g}{e+4b+9a}\ ;$$

on aura une limite supérieure des racines de cette équation ; c'est-à-dire qu'on peut prendre pour limite supérieure des racines d'une équation proposée le plus grand des nombres qu'on obtient en ajoutant à *trois* une suite de fractions ayant pour numérateurs les coefficiens négatifs de la proposée, pris positivement, et pour dénominateurs la somme des produits des coefficiens positifs qui les précèdent respectivement, de droite à gauche, par les puissances successives de *trois*, à partir de sa puissance zéro, c'est-à-dire, de l'unité.

On peut pareillement appliquer cette dernière règle à rendre positifs les coefficiens fonctions de $y$ de l'équation (4), et l'on trouvera que tout se réduit à ne pas prendre $x$ moindre que le plus grand des nombres

$$4+\frac{c}{b+4a}, \quad 4+\frac{f}{e+4b+16a}, \quad 4+\frac{k}{h+4e+16b+64a};$$
$$4+\frac{d}{b+4a}, \quad 4+\frac{g}{e+4b+16a};$$

et, comme rien ne limite ce raisonnement, on pourra dire généralement qu'on rendra positif le premier membre de l'équation (4), et conséquemment de l'équation (1), en prenant pour $x$ le plus grand des nombres

$$n+\frac{c}{b+an}, \quad n+\frac{f}{e+bn+an^2}; \quad n+\frac{k}{h+en+bn^2+an^3};$$
$$n+\frac{d}{b+an}, \quad n+\frac{g}{e+bn+an^2},$$

$n$ étant un nombre entier positif quelconque. De là résulte cette nouvelle règle.

*THÉORÈME III. En ajoutant successivement à un nombre entier positif arbitraire une suite de fractions ayant successivement pour numérateurs les coefficiens négatifs d'une équation proposée, pris positivement, et pour dénominateurs la somme des produits des coefficiens positifs qui les précèdent respectivement, de droite à gauche, par les puissances successives du nombre arbitraire, à partir de sa puissance zéro ou de l'unité; le plus grand des nombres* *résultans pourra être pris pour limite supérieure des racines de cette équation.*

Observons, 1.° que ce théorème renferme le *Théorème I*, comme cas particulier : c'est celui où le nombre arbitraire est l'unité ; 2.° que, dans son application, comme dans celle de celui-là, il suffit de faire entrer en considération le plus grand des coefficiens que renferme chaque série de termes consécutivement négatifs, de sorte qu'on n'a pas plus de nombres à calculer qu'il n'y a de ces séries ; 3.° qu'enfin, en prenant successivement pour le nombre arbitraire 1, 2, 3, .... on trouvera souvent une limite *minimum*, inférieure à celle que donnerait l'application du *Théorème I*.