ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Astronomie. Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 265-283

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__265_0>

ASTRONOMIE.

Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ;

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

(*Cinquième Mémoire*). (*)

143. PROBLÈME IX. *On demande de représenter les époques des conjonctions et des oppositions d'une planète quelconque avec son satellite, par une série ordonnée selon les puissances ascendantes de l'excentricité de la planète principale, en regardant le mouvement du satellite comme circulaire et uniforme ?*

144. *Solution.* Soient AIA′ (fig. 1) la demi-orbite de la planète principale, AA′ son grand axe, A son aphélie, A′ son périhélie, F le foyer de l'ellipse, occupé par le soleil; le satellite étant porté sur un épicycle dont le centre parcourt la circonférence de l'ellipse, conformément aux lois connues du mouvement planetaire. Supposons qu'au moment où la planète principale était à l'aphélie A de son orbite, le satellite ait été au point C de l'épicycle. Supposons de plus qu'au bout du temps t la planète ait parcouru l'arc AI de son orbite, et, ayant mené les lignes IE, IG, respectivement parallèles à AB, AC, supposons que, dans le même temps t, le satellite ait parcouru l'arc GH de la sienne.

(*) Voyez les pages 161 et 237 du IV.e volume de ce recueil, et les pages 1 et 221 de celui-ci.

145. Désignons par p le temps d'une révolution de la planète, et par q le temps d'une révolution du satellite. Soient de plus

a, le demi-grand axe de l'orbite de la planète ;

aCos.λ, son demi-petit axe ;

b, le rayon de l'orbite du satellite $=AB=AC=AI$;

φ, l'anomalie vraie AFI ;

$\varkappa$, l'anomalie excentrique correspondante ;

α, l'angle BAC, qui fixe le lieu du satellite, au moment du passage de la planète par son aphélie.

On aura conséquemment

aSin.λ, pour l'excentricité de l'orbite,

$a(1+\text{Cos.}\lambda)$ pour son aphélie FA ;

$a(1-\text{Cos.}\lambda)$ pour son périhélie FA′.

146. En conséquence, on aura les équations suivantes :

$$\text{Sin.}\varkappa=\frac{\text{Cos.}\lambda\text{Sin.}\varphi}{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi}, \qquad \text{Cos.}\varkappa=\frac{\text{Cos.}\varphi-\text{Sin.}\lambda}{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi},$$

$$\frac{2\varpi t}{p}=\varkappa+\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}\varkappa .$$

On tire des deux premières

$$d\varkappa=\frac{d\lambda\text{Sin.}\varphi+d\varphi\text{Cos.}\lambda}{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi},$$

et de la troisième

$$d\varkappa=-d\lambda\text{Sin.}\varphi+\frac{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos}\,\varphi}{\text{Cos.}^2\lambda}\cdot\frac{2\varpi dt}{p}.$$

Ces valeurs, égalées entre elles, donneront

$$d\varphi=\frac{2\varpi(1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)^2}{p\text{Cos.}^3\lambda}dt-\frac{\text{Sin.}\varphi(2-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)}{\text{Cos.}\lambda}d\lambda .$$

D'un autre côté, on a, pour l'expression littérale de l'angle IFH

$$\text{Tang.IFH , ou Ang.IFH}=-\frac{b\text{Sin.}\left(\alpha+\frac{2\varpi t}{q}-\varphi\right)}{a+b\text{Cos.}\left(\alpha+\frac{2\varpi t}{q}-\varphi\right)} .$$

Cet angle devant s'évanouir en cas de syzygie, on aura

$$\alpha+\frac{2\varpi t}{q}-\varphi=n\varpi\,,$$

ou

$$\varphi=\alpha-n\varpi+\frac{2\varpi t}{q}\,,\quad \text{et}\quad d\varphi=\frac{2\varpi dt}{q}\,;$$

donc

$$\frac{2\varpi dt}{q}=\frac{2\varpi(1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)^2}{p\text{Cos.}^3\lambda}dt-\frac{\text{Sin.}\varphi(2-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)}{\text{Cos.}\lambda}d\lambda\,;$$

en conséquence

$$-\frac{2\varpi dt}{pqd\lambda}=\frac{\text{Cos.}^2\lambda\text{Sin.}\varphi(2-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)}{p\text{Cos.}^3\lambda-q(1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)^2}\,.$$

Tel est le rapport différentiel $dt : d\lambda$, dont il faudra déduire les coefficiens de la série que nous cherchons.

147. Pour donner à nos formules la simplicité que nos développemens exigent, soient

$$\text{Sin.}\lambda=x\,,\quad \text{Cos.}\varphi=y\,,$$

$$\text{Cos.}\lambda=u\,,\quad \text{Sin.}\varphi=v\,;$$

donc

$$\frac{dx}{d\lambda}=\ u\,,\quad \frac{dy}{d\lambda}=-\frac{vd\varphi}{d\lambda}=-\frac{2\varpi v}{q}\cdot\frac{dt}{d\lambda}\,,$$

$$\frac{du}{d\lambda}=-x\,,\quad \frac{dv}{d\lambda}=+\frac{yd\varphi}{d\lambda}=+\frac{2\varpi y}{q}\cdot\frac{dt}{d\lambda}\,.$$

On aura ainsi

$$-\frac{2\varpi dt}{qd\lambda}=\frac{pu^2v(2-xy)}{pu^3-q(1-xy)^2}\,;$$

et si, pour abréger, on désigne cette fraction par h, on aura

$$\frac{dx}{d\lambda}=+u\,,\quad \frac{dy}{d\lambda}=+hv\,,$$

$$\frac{du}{d\lambda}=-x\,,\quad \frac{dv}{d\lambda}=-hy\,.$$

Il paraît convenable de faire encore, pour abréger, $r=1-xy$, il en résulte

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}=-uy-hvx\;;$$

on a alors

$$h=\frac{pu^2v(1+r)}{pu^3-qr^2}\;;$$

ce qui donne

$$-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{pr(2x+y-xy)-quvr^2}{pu^3-qr^2}\;.$$

148. Si, d'après le but du problème, on désigne par t le temps au bout duquel il arrive une syzygie, on aura

$$t=A+B\lambda+C\lambda^2+\ldots\ldots\;;$$

et les coefficiens A, B, C,..... formeront les inconnues du problème. Le premier terme A est ce que devient t dans le cas de $\lambda=0$, lequel fournit

$$\frac{2\varpi t}{p}=\varkappa=\varphi=\alpha-n\varpi+\frac{2\varpi t}{q}\;;$$

d'où l'on tire

$$t=\frac{pq(n\varpi-\alpha)}{2\varpi(p-q)}\;;$$

et telle est la valeur du premier terme de la série. On aura donc

$$A=\frac{pq(n\varpi-\alpha)}{2\varpi(p-q)}\;.$$

149. Le coefficient B est ce que devient le rapport différentiel $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}$, dans le même cas de $\lambda=0$, qui est celui de $x=0$, $u=1$, $\varphi=\frac{q(n\varpi-\alpha)}{p-q}=\frac{2\varpi A}{p}$; d'où $y=\mathrm{Cos.}\frac{2\pi A}{p}$, $v=\mathrm{Sin.}\frac{2\pi A}{p}$. Il en résultera

$$B = -\frac{2pq}{2\pi(p-q)}\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi A}{p}\,,$$

en sorte que le second terme de la série est

$$-\frac{pq\lambda}{\pi(p-q)}\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi A}{p}\,.$$

150. Il faudra passer de là aux rapports différentiels $\frac{d^2t}{d\lambda^2}$, $\frac{d^3t}{d\lambda^3}$, $\frac{d^4t}{d\lambda^4}$,... On peut remarquer que tous les termes dont ces rapports sont composés sont compris sous la forme

$$\frac{u^m \,.\, r^\varepsilon \,.\, v \,.\, s}{(pu^3-qr^2)^n}\,;$$

la lettre s désignant une fonction rationnelle et entière de x et y ; tellement que $ds = M dx + N dy$, tandis que $dr = -y dx - x dy$. Le problème est donc réduit à trouver la différentielle de la fonction fractionnaire

$$z = \frac{u^m r^\varepsilon v s}{(pu^3-qr^2)^n}\,.$$

151. On en tire

$$\text{Log.}z = m\text{Log.}u + \varepsilon\text{Log.}r + \text{Log.}v + \text{Log.}s - n\text{Log.}(pu^3-qr^2)\,;$$

donc

$$\frac{dz}{z} = \frac{m du}{u} + \frac{\varepsilon dr}{r} + \frac{dv}{v} + \frac{M dx + N dy}{s} - \frac{n(3pu^2 du - 2qr dr)}{pu^3-qr^2}\,;$$

ou, en divisant par $d\lambda$

$$\frac{dz}{z d\lambda} = -\frac{mx}{u} - \frac{\varepsilon uy}{r} - \frac{hy}{v} + \frac{Mu + Nhv}{s} + \frac{3npu^2x}{pu^3-qr^2} - \frac{2nqr(uy + hvx)}{pu^3-qr^2}\,,$$

multipliant enfin de part et d'autre par $urvs(pu^3-qr^2)$

$$urv(pu^3-qr^2)\frac{dz}{z d\lambda} = -mrvxs(pu^3-qr^2) - pu^3vry(1+r)s$$

$$-\varepsilon vu^3ys(pu^3-qr^2) - \varepsilon pu^3v^3x(1+r)s$$

$$+Mru^2\varrho(pu^3-qr^2)+pNu^3\varrho^3r(1+r)$$
$$+3npr\,u^3\varrho xs$$
$$-2nqr^2u^2\varrho ys \qquad -2nhqr^2u\varrho^2xs\ .$$

152. Donc, si l'on fait, pour abréger,

$$F=-mrxs-\varepsilon u^2ys+3nrxs-r(1+r)ys-\varepsilon(1+r)\varrho^2xs$$
$$+Mru^2+Nr(1+r)\varrho^2\ ,$$
$$G=F+H+2n(1+r)\varrho^2xs\ ,$$
$$H=-mrxs-\varepsilon u^2ys+2nu^2ys+Mru^2\ ;$$

on aura finalement

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{u^{m-1}r^{\varepsilon-1}\varrho}{(pu^3-qr^2)^{n+2}}(p^2u^6F-pqr^2u^3G+q^2r^4H)$$
$$=\frac{p^2u^{m+5}r^{\varepsilon-1}\varrho F-pqu^{m+2}r^{\varepsilon-1}\varrho G+q^2u^{m-1}r^{\varepsilon+3}\varrho H}{(pu^3-qr^2)^{n+2}}\ .$$

153. Les trois coefficiens F, G, H, sont des fonctions rationnelles et entières de x et y. On trouve, en les développant,

$$F=(3n-m-2\varepsilon)xs-(\varepsilon+2)ys+(m-3n+2\varepsilon)x^2ys+(2\varepsilon+3)xy^2s$$
$$-(\varepsilon+1)x^2y^3s+ru^2M+r(1+r)\varrho^2N\ ,$$
$$G=(2n-2m-2s)xs+(2n-2\varepsilon-2)ys+(2m-7n+3\varepsilon)x^2ys$$
$$+(2\varepsilon-4n+3)xy^2s+(2n-\varepsilon-1)x^2y^3s+2Mru^2+Nr(1+r)\varrho^2\ ,$$
$$H=-mxs+(2n-\varepsilon)ys+(m-2n+\varepsilon)x^2ys+Mru^2\ .$$

On peut remarquer que la première de ces trois fonctions, savoir F, est divisible par $r=1-xy$; on trouve

$$\frac{F}{r}=(3n-m-2\varepsilon)xs-(\varepsilon+2)ys+1(\varepsilon+1)xy^2s+u^2M+(1+r)\varrho^2N\ .$$

Exemple I. Ayant trouvé

$$-\frac{2\pi dt}{q d\lambda}=\frac{pu^2\varphi(2-xy)}{pu^3-qr^2},$$

on demande $\frac{d^2t}{d\lambda^2}$?

Faisant

$$z=\frac{u^2\varphi(2-xy)}{pu^3-qr^2},$$

on aura

$$-\frac{2\pi dt}{q d\lambda}=pz;$$

donc

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2}=-\frac{pq}{2\pi}\cdot\frac{dz}{d\lambda};$$

reste donc à trouver $\frac{dz}{d\lambda}$.

Comparant à la formule générale

$$\frac{u^m\varphi r^{\varepsilon}s}{(pu^3-qr^2)^n},$$

on trouve

$$m=2\,,\quad s=2-xy\,;$$
$$\varepsilon=0\,,\quad M=-y\,,$$
$$n=1\,,\quad N=-x\,;$$

on en tire

$$F=r(-5y+x^2y+6xy^2-2x^2y^3)\,,$$
$$G=2r(2x-y)\,,$$
$$H=r(-2x+y+x^2y)\,,$$

donc

$$\frac{dz}{d\lambda}=\frac{1}{(pu^3-qr^2)^3}\left\{\begin{array}{l} p^2u^7\varphi(-5y+x^2y+6xy^2-2x^2y^3) \\ -2pqu^4r^2\varphi(2x-y) \\ +q^2ur^4\varphi(-4x+3y+3x^2y-xy^2-x^3y^2) \end{array}\right\};$$

donc

$$\frac{2\pi}{pq}\cdot\frac{d^2t}{d\lambda^2}=\frac{1}{(pu^3-qr^2)^3}\left\{\begin{array}{l}p^2u^7v(5y-x^2y-6xy^2+2x^2y^3)\\+2pqu^4r^2v(2x-y)\\+q^2ur^4v(4x-3y-3x^2y+xy^2+x^3y^2)\end{array}\right\}$$

154. Le troisième coefficient C de la série est ce que devient la fraction $\frac{d^2t}{2d\lambda}$, dans le cas de $\lambda=0$, qui est celui de $x=0$, $u=0$, $\varphi=\frac{2\pi A}{p}$, $y=\text{Cos.}\frac{2\pi A}{p}$, $v=\text{Sin.}\frac{2\pi A}{p}$, et $r=1$. On aura donc

$$C=\frac{pq(5p+3q)}{4\varpi(p-q)^2}\,\text{Sin.}\frac{2\varpi A}{p}\,\text{Cos.}\frac{2\varpi A}{p},$$

ou

$$C=\frac{pq(5p+3q)}{8\varpi(p-q)^2}\,\text{Sin.}\frac{4\varpi A}{p};$$

le troisième terme sera donc

$$\frac{pq(5p+3q)}{8\varpi(p-q)^2}\,\lambda^2\text{Sin.}\frac{4\varpi A}{p}.$$

155. On vient de trouver la valeur littérale de $\frac{2\varpi}{pq}\cdot\frac{d^2t}{d\lambda^2}$, composée de trois fractions telles que

$$\frac{p^2u^7vS'+2pqu^4vS''+q^2ur^4vS'''}{(pu^3-qr^2)^3},$$

dans lesquelles

$$S'=5y-x^2y-6xy^2+2x^2y^3,$$
$$S''=2x-y,$$
$$S'''=4x-3y-3x^2y+xy^2+x^3y^2.$$

Pour passer à $\frac{d^3t}{d\lambda^3}$, il faut appliquer la formule générale à chacune des trois fonctions S', S'', S''' en particulier. En conséquence, nous aurons les différentielles qui suivent.

Exemple II. On demande la différentielle de

$$z' = \frac{u^7 v S'}{(pu^3 - qr^2)^3} \; ?$$

On a ici $m = 7$, $S' = 5y - x^2y - 6xy^2 + 2x^2y^3$,

$\varepsilon = 0$, $M' = -2xy - 6y^2 + 4xy^3$,

$n = 3$, $N' = 5 - x^2 - 12xy + 6x^2y^2$,

d'où il résulte

$$\begin{aligned}\frac{F'}{r} = 10 &- 2x^2 - 21xy - 26y^2 \\ &+ x^3y + 22x^2y^2 + 50xy^3 \\ &- 8x^3y^3 - 34x^2y^4 + 8x^3y^5 \;;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{G'}{r} = 10 &- 2x^2 + 2xy - 2y^2 \\ &- 2x^3y - 8x^2y^2 - 12xy^3 \\ &+ 4x^3y^3 + 14x^2y^4 - 4x^3y^5 \;,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H' = \; &- 37xy + 24y^2 \\ &- 19x^3y + 49x^2y^2 - 26xy^3 \\ &- 3x^4y^2 - 30x^3y^3 + 8x^2y^4 \\ &+ 6x^4y^4 \;:\end{aligned}$$

En suite de quoi on aura finalement

$$\frac{dz'}{d\lambda} = \frac{u^6 v}{(pu^3 - qr^2)^5} \left(p^2u^6 \frac{F'}{r} - pu^3r^2 \frac{G'}{r} + q^2r^3 H' \right).$$

156. *Exemple III.* On demande la différentielle de

$$z'' = \frac{u^4 r^2 v s''}{(pu^3 - qr^2)^3} \; ?$$

On a ici $m = 4$, $s'' = 4x - 2y$,

$\varepsilon = 2$, $M'' = 4$;

$n = 3$, $N'' = -2$;

donc

$$\frac{F''}{r}=-16xy+12y^2$$
$$+12x^2y^2-8xy^3\ ;$$

$$G''=4+28x^2-20xy+4y^2$$
$$-21x^3y-8x^2y^2+4xy^3$$
$$+12x^3y^3-4x^2y^4\ ,$$

$$H''=-4-12x^2+28xy-8y^2$$
$$-4x^3y\ ,$$

d'où il résulte

$$\frac{dz''}{d\lambda}=\frac{u^3r^2v}{(pu^3-qr^2)^5}\left(p^2u^6\ \frac{F''}{r}-pqru^3G''+q^2r^3H''\right).$$

157. *Exemple IV.* On demande la différentielle de

$$z'''=\frac{ur^4vs'''}{(pu^3-qr^2)^3}\ ?$$

On a, pour ce cas, $m=1$, $S'''=4x-3y-3x^2y+xy^2+x^3y^2$,
$s=4$, $M'''=4-6xy+y^2+3x^2y^2$,
$n=3$, $N'''=-3-3x^2+2xy+2x^3y$;

ce qui donne

$$\frac{F'''}{r}=-2+10x^2-23xy+25y^2$$
$$+13x^3y+44x^2y^2-28xy^3$$
$$-5x^4y^2-28x^3y^3+7x^2y^4$$
$$+7x^4y^4$$

$$G'''=+2+30x^2-56xy+20y^2$$
$$-28x^3y+50x^2y^2-16xy^3$$
$$+5x^4y^2-19x^3y^3+5x^2y^4$$
$$+x^5y^3+5x^4y^4-x^3y^5$$
$$-x^5y^5\ ,$$

$$H''' = +4 - 8x^2 + xy - 5y^2$$
$$+9x^3y + 4x^2y^2 + xy^3$$
$$-7x^4y^2 - x^3y^3$$
$$+2x^5y^3 ;$$

on aura finalement

$$\frac{dz'''}{d\lambda} = \frac{r^4 v}{(pu^3 - qr^2)^5}\left(p^2u^6\,\frac{F'''}{r} - pqr^2u^3G''' + q^2r^3H'''\right).$$

158. Mettant ensemble les expressions différentielles des trois numéros précédens, on trouve

$$\frac{2\pi}{pq}\cdot\frac{d^3t}{d\lambda^3} = \frac{v}{r(pu^3-qr^2)^5}\left\{\begin{array}{l} p^4u^{12}F' \\ +p^3qu^9r^2(F''-G') \\ +p^2q^2u^6r^4(F'''-G''+H') \\ +pq^3u^3r^6(-G'''+H'') \\ +q^4r^8H''' . \end{array}\right\}$$

Or, on trouve, après les réductions

$$F' = +10$$
$$-2x^2 - 31xy - 26y^2$$
$$+3x^3y + 43x^2y^2 + 76xy^3$$
$$-x^4y^2 - 30x^3y^3 - 84x^2y^4$$
$$+8x^4y^4 + 42x^3y^5 - 8x^4y^6$$

$$F'' - G' = -10$$
$$+2x^2 - 8xy + 14y^2$$
$$+38x^2y^2 - 10xy^3$$
$$-2x^4y^2 - 24x^3y^3 - 18x^2y^4$$
$$+4x^4y^4 + 18x^3y^5 - 4x^4y^6,$$

$$\begin{aligned}F''' - G'' + H' = &-6\\ &-38x^2 - 38xy + 45y^2\\ &+52x^3y + 124x^2y^2 - 83xy^3\\ &-21x^4y^2 - 114x^3y^3 + 47x^2y^4\\ &+5x^5y^3 + 41x^4y^4 - 7x^3y^5\\ &-7x^5y^5\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-G''' + H'' = &+2\\ &+50x^2 + 76xy - 28y^2\\ &+32x^3y - 53x^2y^2 + 16xy^3\\ &-5x^4y^2 + 19x^3y^3 - 5x^2y^4\\ &-x^5y^3 - 5x^4y^4 + x^3y^5\\ &+x^5y^5\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H''' = &+4\\ &-8x^2 + xy - 5y^2\\ &+9x^3y + 4x^2y^2 + xy^3\\ &-7x^4y^2 - x^3y^3\\ &+2x^5y^3\ .\end{aligned}$$

159. Le quatrième coefficient D est encore ce que devient le rapport différentiel $\frac{d^3t}{6d\lambda^3}$, dans le cas de $\lambda=0$, qui est celui de $x=0$, $u=1$, $r=1$, $\varphi=\frac{2\varpi A}{p}$ ou $\varphi=\frac{q(n\varpi-\alpha)}{p-q}$, et ensuite $y=\text{Cos.}\varphi$ et $v=\text{Sin.}\varphi$, en désignant ici par φ l'angle $\frac{2\varpi A}{p}=\frac{q(n\varpi-\alpha)}{p-q}$. Cette supposition donne

$$\begin{aligned}F' &= +10-26\text{Cos.}^2\varphi\ ,\\ F''-G' &= -10+14\text{Cos.}^2\varphi\ ,\\ F'''-G''+H' &= -\ 6+45\text{Cos.}^2\varphi\ ,\\ -G'''+H'' &= +\ 2-28\text{Cos.}^2\varphi\ ,\\ H''' &= +\ 4\quad 5\text{Cos.}^2\varphi\ ;\end{aligned}$$

on aura donc

$$\frac{2\varpi}{pq}D = \frac{\text{Sin.}\phi}{6(p-q)^5}\left\{\begin{array}{l}(10p^4-10p^3q-\ 6p^2q^2+\ 2pq^3+4q^4)\\ -(26p^4-14p^3q-45p^2q^2+28pq^3+5q^4)\text{Cos.}^2\phi\end{array}\right. :$$

Les deux termes de cette fraction sont divisibles par le quarré $(p-q)^2$, ce qui donne

$$\frac{2\varpi}{pq}D = \frac{\{(10p^2+10pq+4q^2)-(26p^2+38pq+5q^2)\text{Cos.}^2\phi\}\,\text{Sin.}\phi}{6(p-q)^3};$$

en conséquence

$$D = \frac{pq\{(10p^2+10pq+4q^2)-(26p^2+38pq+5q^2)\text{Cos.}^2\phi\}\,\text{Sin.}\phi}{12\varpi(p-q)^3}.$$

160. En appliquant les mêmes formules à la recherche du coefficient suivant E, j'ai trouvé

$$E = \frac{pq\text{Sin.}\phi\text{Cos.}\phi}{48\varpi(p-q)^4}\left\{\begin{array}{l}-(145p^3+291p^2q+101pq^2+9q^3)\\ +(206p^3+514p^2q+173pq^2+9q^3)\text{Cos.}^2\phi\end{array}\right\}.$$

En conséquence, voici le tableau des cinq premiers coefficiens A, B, C, D, E, de la série $A+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3+E\lambda^4+\ldots\ldots$, qui fait connaître les époques de toutes les conjonctions et oppositions du satellite avec la planète principale, qui peuvent avoir lieu dans un temps quelconque. On se rappellera que n désigne un nombre entier quelconque, *pair* dans les conjonctions, *impair* dans les oppositions du satellite vu de la planète. Nous continuerons d'employer la lettre ϕ, pour désigner l'angle $\frac{2\varpi A}{p} = \frac{q(n\varpi-\alpha)}{p-q}$. On aura

$$\begin{aligned}
2(p-q)\varpi A &= +\ pq(n\varpi-\alpha)\ ,\\
2(p-q)\varpi B &= -2pq\text{Sin.}\phi\ ,\\
4(p-q)^2\varpi C &= +\ pq(5p-3q)\text{Sin.}\phi\text{Cos.}\phi\ ;\\
12(p-q)^3\varpi D &= +pq(\ 10p^2+10pq+4q^2)\text{Sin.}\phi\\
&\quad -pq(\ 26p^2+38pq+5q^2)\text{Sin.}\phi\text{Cos.}^2\phi\ ;\\
48(p-q)^4\varpi E &= -pq(145p^3+291p^2q+101pq^2+9q^3)\text{Sin.}\phi\text{Cos.}\ \phi\\
&\quad +pq(206p^3+514p^2q+173pq^2+9q^3)\text{Sin.}\phi\text{Cos.}^2\phi\ ;
\end{aligned}$$

et ainsi des autres.

161. La révolution sydérale de Jupiter, exprimée en jours, est 4332,596308; telle est donc la valeur numérique de p. Quant à celles de ses satellites, on trouve

Pour le premier 1,7691378,
Pour le second 3,5511810,
Pour le troisième . . . 7,1545528,
Pour le quatrième . . . 16,6887697.

Le rapport $p:q$ est donc, pour les quatre satellites, ainsi qu'il suit :

Ponr le premier . . . . $p:q=2449:1$,
Pour le second . . . . $p:q=1220:1$,
Pour le troisième . . . $p:q=606:1$,
Pour le quatrième . . . $p:q=260:1$.

La fraction $\frac{q}{p}$ est donc très-petite pour tous les quatre satellites, et sur-tout pour les deux premiers dont les mouvemens se rapprochent le plus du mouvement uniforme et circulaire, dont les inégalités sont les moins sensibles, et dont les syzygies, très-fréquentes, ont le plus d'intérêt pour nous. En se bornant à la première puissance de cette fraction, on aura $\varphi=\frac{q(n\varpi-\alpha)}{p}$ et ensuite

$$2\varpi A=+q(n\varpi-\alpha),$$
$$2\varpi B=-2q\text{Sin.}\varphi,$$
$$4\varpi C=+5q\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi,$$
$$12\varpi D=+q\text{Sin.}\varphi(10-26\text{Cos.}^2\varphi),$$
$$48\varpi E=-q\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi(145-206\text{Cos.}^2\varphi);$$

et ainsi des autres.

162. La série que l'on vient de trouver comprend donc ce qu'on a appelé la *première inégalité* des éclipses. Pour en faire l'application, commençons par démontrer quelques formules générales qui concernent ces éclipses ; en nous occupant de la longitude seule, et en supposant ainsi l'orbite du satellite dans le plan même de celle de la planète principale. De plus, nous continuerons de regarder celle du satellite comme circulaire.

163. Soient donc S (fig. 2) le centre et SA=SB le rayon du soleil, dont la circonférence est ainsi représentée dans la figure. Représentons l'orbite de la terre par le cercle décrit du centre S avec le rayon ST. Soient I le centre et ID=IO le rayon de Jupiter, D et D′ deux points opposés de sa surface. Du centre I avec le rayon IL décrivons une circonférence de cercle, que nous prendrons pour l'orbite de quelqu'un de ses satellites. Menant de part et d'autre les deux tangentes BD, BD′ aux circonférences du soleil et de Jupiter, on aura en C le sommet du cône ténébreux que cette planète laisse derrière elle. Le satellite, en parcourant l'arc GG′ de son orbite, aura son immersion dans l'un de ces deux points et son émersion dans l'autre. Pour que l'une et l'autre puissent être apperçues de la terre, il faut que la tangente GO, menée du point G au bord opposé de la circonférence de Jupiter, traverse, après avoir été prolongée, l'orbite de la terre, dans les deux points H et K. Tant que ces intersections seront possibles, la durée entière de l'éclipse pourra être observée ; mais il faudra se borner à observer l'une de ses deux phases, lorsque la tangente GFD prolongée passera entièrement à côté de l'orbite de la terre. Reste donc à trouver l'expression littérale des deux angles ISH et ISK.

164. Les quantités données du problème sont au nombre de cinq, savoir :

a=SA=SB, rayon du soleil,

b=ID=ID′, rayon de Jupiter,

c=ST=SH=SK, distance moyenne des centres du soleil et de la terre,

h=IS, distance moyenne de Jupiter au soleil,

d=IL=IG=IG′, distance du centre de Jupiter à son satellite.

165. Pour dresser la table des valeurs numériques de ces quantités, j'ai employé les dimensions et distances rapportées sous les n.os 57, 106 et 110 du troisième volume de l'*Astronomie physique* de Biot. Comme le rayon du soleil est égal à 109, 98 fois celui de la terre, j'ai divisé tous les nombres par 109, 98; au moyen de quoi le rayon du soleil devient l'unité commune de tous les nombres de la table. J'ai désigné par d, d', d'', d''' les distances du centre de Jupiter à celui de ses premier, second, troisième et quatrième satellites, respectivement, et j'ai obtenu ce qui suit :

$$\begin{array}{ll} a=\quad 1,00000\,, & d\ \ =0,61136\,, \\ b=\quad 0,10517\,, & d'\ =0,97270\,, \\ c=\ 219,19403\,, & d''=1,55154\,, \\ h=1140,41663\,; & d'''=2,72907\,. \end{array}$$

166. La première chose qui se présente, c'est la longueur du cône ténébreux de Jupiter, ainsi que son angle au sommet. On aura, par les formules connues,

$$\mathrm{CI}=\frac{bh}{a-b}\ ,\quad \mathrm{CS}=\frac{ah}{a-b}\ ,\quad \mathrm{Sin.DCI}=\frac{a-b}{h}\ ;$$

ce qui fait donc la distance moyenne de Jupiter au soleil $\gamma=134,039$, et l'angle C, que l'on pourra fort bien obtenir, avec son sinus et sa tangente, sera $=2'.42''$.

167. Pour passer de là à la position du point F, soit FI$=y$; donc FL$=d-y$ et DF$=\sqrt{y^2-b^2}$. On aura CL$=\dfrac{bh}{a-b}-d$ ou CL$=\dfrac{bh+bd-ad}{a-b}$; quantité que, pour abréger, nous désignerons par f. De CL$=f$, nous tirerons GL$=f$Tang.C, en continuant de désigner par C l'angle DCI. On aura ensuite la proportion FD : DI = FL : GL ou, en élevant au quarré $y^2-b^2 : b^2=(d-y)^2 : f^2\mathrm{Tang.}^2\mathrm{C}$. Développant cette équation, on trouve

FI

$$FI \text{ ou } = y \frac{-b^2d+bf\,\text{Tang.}C\sqrt{d^2-b^2+f^2\text{Tang.}^2C}}{f^2\text{Tang.}^2C-b^2},$$

et par conséquent

$$FL \text{ ou } d-y=\frac{f^2 d\,\text{Tang.}^2C-bf\,\text{Tang.}C\sqrt{d^2-b^2+f^2\text{Tang.}^2C}}{f^2\text{Tang.}^2C-b^2}.$$

On a eu $\text{Sin.}C=\frac{a-b}{h}$, ce qui donne

$$\text{Cos.}C=\frac{\sqrt{h^2-a^2+2ab-b^2}}{h},$$

et par conséquent

$$\text{Tang.}C=\frac{a-b}{\sqrt{h^2-(a-b)^2}};$$

or, comme

$$h=1140{,}41663,$$

$$a-b=\quad 0{,}89453,$$

on voit que le quarré de $a-b$ disparaît complètement devant celui de h, ce qui donne $\text{Tang.}C=\frac{a-b}{h}$ et $f\,\text{Tang.}C=b-\frac{(a-b)d}{h}$. Par cette même raison, la racine de $d^2-b^2+f^2\text{Tang.}^2C$ se réduira à d. On aura ainsi

$$FL=\frac{df\,\text{Tang.}C}{f\,\text{Tang.}C+b},\quad IF=\frac{bd}{f\,\text{Tang.}C+b}.$$

On trouvera ensuite

$$\text{Sin.}F=\frac{f\,\text{Tang.}C+b}{d}=\frac{2b}{d}-\frac{a-b}{h},$$

$$FS=\frac{2bh^2+2bdh-adh}{2bh-(a-b)d},$$

$$QS=\frac{2bh+2bd-ad}{d},$$

donc

$$\text{Cos.QSH} = \frac{2bh + 2bd - ad}{cd},$$

ou

$$\text{Cos.QSH} = \frac{b}{C} + \frac{h}{C}\,\text{Sin.F}.$$

On aura enfin

$$\text{Ang.TSH} = 90^\circ = (\text{F} + \text{QSH})\,,\ \text{Ang.TSK} = 90^\circ - (\text{F} - \text{QSH})\,;$$

et la position des points H et K de l'orbite terrestre sera rigoureusement déterminée.

168. En appliquant le calcul numérique à ces formules ; en employant de plus les notations F, F', F'', F''', pour désigner les points F et les angles SFQ qui répondent aux premier, deuxième, troisième et quatrième satellites, respectivement, on trouve

$$\begin{aligned}
\text{Log.Sin.F} &= 9.5356327\,, & \text{Ang.F} &= 20.^\circ\ 4'\ 34'',\\
\text{Log.Sin.F}' &= 9.3338680\,, & \text{Ang.F}' &= 12.^\circ\ 27'\ 26'',\\
\text{Log.Sin.F}'' &= 9.1296533\,, & \text{Ang.F}'' &= 7.^\circ\ 44'\ 47'',\\
\text{Log.Sin.F}''' &= 8.8824661\,, & \text{Ang.F}''' &= 4.^\circ\ 22'\ 30''.
\end{aligned}$$

On trouve ensuite les distances IF, ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}
\text{Log IF} &= 9.4862672\,, & \text{Dist.IF} &= 0{,}306385,\\
\text{Log.IF}' &= 9.6880319\,, & \text{Dist.IF}' &= 0{,}487564,\\
\text{Log.IF}'' &= 9.8922466\,, & \text{Dist.IF}'' &= 0{,}780273,\\
\text{Log.IF}''' &= 0.1394338\,, & \text{Dist.IF}''' &= 1{,}378585.
\end{aligned}$$

169. Passant de là au calcul des angles QSH, on trouve,

Pour le 1.er satellite . . . Cos.QSH $= 1{,}786422$,

2.me . . . . Cos.QSH $= 1{,}122764$,

3.me . . . . Cos.QSH $= 0{,}7017543$,

4.me . . . . Cos.QSH $= 0{,}3973979$.

Les valeurs numériques des deux premiers cosinus, plus grandes que l'unité, font voir que la durée des éclipses du premier satellite ne pourra jamais être observée, et qu'on ne pourra pas observer non plus celle des éclipses du second, dans les moyennes distances de la terre et de Jupiter au soleil; mais cette observation sera possible dans les deux autres.

On trouve

Pour le troisième, $\text{Ang.QSH} = 45°25'56''$,

Pour le quatrième, $\text{Ang.QSH} = 66°35'\ 4''$;

d'où il résulte

$$\text{Pour le troisième,}\ \begin{cases} \text{Ang.TSH} = \ 36°49'27'', \\ \text{Ang.TSK} = 127°41'19'', \end{cases}$$

$$\text{Pour le quatrième,}\ \begin{cases} \text{Ang.TSH} = \ 19°\ 2'26'', \\ \text{Ang.TSK} = 152°12'34''. \end{cases}$$