ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Arithmétique. Sur le caractère de divisibilité des nombres par certains diviseurs

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 170-172
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__170_1>

ARITHMÉTIQUE.

Sur le caractère de divisibilité des nombres par certains diviseurs ;

Par M. GERGONNE.

SOIT N un nombre entier quelconque, écrit dans le système de numération dont b est la base. Concevons qu'on ait partagé ce nombre, en allant de droite à gauche, en tranches de m chiffres chacune, sauf la dernière qui pourra en avoir moins ; et soient, en allant aussi de droite à gauche, A_0, A_1, A_2, A_3,.... ces tranches, considérées comme autant de nombres isolés. On aura évidemment

$$N=A_0+A_1b^m+A_2b^{2m}+A_3b^{3m}+\ldots\ldots$$

Cette équation pourra ensuite être mise sous les trois formes suivantes

$$N=b^m(A_1+A_2b^m+A_3b^{2m}+\ldots)+A_0\;. \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}N=\{A_1(b^m-1)+A_2(b^{2m}-1)+A_3(b^{3m}-1)+\ldots\}\\ +(A_0+A_1+A_2+A_3+\ldots)\end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}N=\{A_1(b^m+1)+A_2(b^{2m}-1)+A_3(b^{3m}+1)+\ldots\}\\ +(A_0+A_2+A_4+\ldots)-(A_1+A_3+A_5+\ldots)\,.\end{aligned} \qquad (3)$$

En observant que les premières parties de ces diverses expressions de N sont respectivement divisibles par b^m, b^m-1, b^m+1, et conséquemment par tous diviseurs de ces trois nombres, on pourra établir les propositions suivantes.

1.° *Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre quelconque par un diviseur quelconque de la* m.me *puissance de la base du système, est le même que celui qu'on obtient en divisant sa première tranche de* m *chiffres à droite par ce diviseur.*

2.° *Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre quelconque par un diviseur quelconque du plus grand nombre de* m *chiffres est le même que celui qu'on obtient en divisant la somme de ses tranches de* m *chiffres par ce diviseur.*

3.° *Dans tout système de numération le reste de la division d'un nombre quelconque par l'un quelconque des diviseurs de la* m.me *puissance de la base augmentée d'une unité est le même que celui qu'on obtient en divisant par le même diviseur la somme des tranches de* m *chiffres de rangs impairs moins la somme des tranches de* m *chiffres de rangs pairs.*

Afin donc que la première division réussisse, dans chaque cas, il sera nécessaire et suffisant que la seconde, plus simple, réussisse également. Voilà donc autant de caractères de divisibilité des nombres par certains diviseurs.

Ainsi, par exemple, dans notre système de numération, la divisibilité d'un nombre par 37 tiendra à la divisibilité par 37 de la somme de ses tranches de trois chiffres; sa divisibilité par 7 dépendra de la divisibilité par 7 de la somme de ses tranches de trois chiffres de rangs impairs moins la somme de ses tranches de trois chiffres de rangs pairs.

Si l'on suppose $m=1$, on retombe sur les caractères connus de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 11.