6529

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages. La couverture de chaque livraison présente l'annonce des ouvrages nouveaux et des concours académiques.

On peut souscrire indifféremment,

Au bureau des *Annales*, rue d'Avignon, n.° 130, à Nismes, (Gard),

Chez madame *veuve Courcier*, imprimeur-libraire pour les mathématiques, quai des Augustins, n.° 57, à Paris,

Et à tous les bureaux de poste.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France, et 24 fr. pour l'étranger. Il en coûte moitié pour six mois; et le prix de chacun des cinq premiers volumes est inférieur de 3 fr. à celui de la souscription annuelle. Les lettres et l'argent doivent être affranchis.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche	I.	Après la page	60.
	II.		300.

ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur de mathématiques transcendantes, des académies de Nismes, de Nancy et de Turin.

TOME CINQUIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. BLACHIER-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez la dame Veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.

1814 ET 1815.

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ASTRONOMIE.

Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ;

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

(*Troisième mémoire.*) (*)

68. Dans notre second mémoire nous avons entrepris la solution du problème de déterminer les élémens de l'orbite d'un corps, planétaire ou cométaire, moyennant un nombre suffisant d'obser-

(*) Voyez les pages 161 et 237 du IV.e volume de ce recueil.

vations. On sait que ces élémens sont au nombre de *six* : la longitude du nœud, l'inclinaison de l'orbite, la position de la ligne des apsides, le grand axe, l'excentricité et l'instant du passage par l'une des deux apsides. En continuant de désigner par λ l'angle que constitue l'excentricité de l'orbe terrestre, chacune de ces six inconnues pourra être représentée par une série telle que $A+B\lambda+C\lambda^2+\ldots$; elle sera très-convergente, étant disposée selon les puissances de λ que l'on sait être une fraction angulaire égale à un soixantième à peu près. Le premier terme A sera ce que devient cette série dans le cas de $\lambda=0$: c'est celui d'un mouvement uniforme et circulaire. Ce premier terme constitue proprement la difficulté du problème; les coefficiens des autres se trouveront en suivant une marche analogue à celle de nos problèmes précédens, et qui sera le résultat de quelques différentiations successives.

69. Dans le problème VII qui a précédé immédiatement celui-ci, nous avons supposé la position du plan de l'orbite connue; deux observations suffisaient alors pour trouver, dans tous les cas, les valeurs générales et rigoureuses des quatre inconnues qu'il restait à déterminer. Si cette position n'est pas connue d'avance, il y aura deux inconnues de plus, ce qui rend le problème beaucoup plus difficile. Il sera convenable alors de s'occuper d'une méthode générale qui puisse nous conduire à la détermination du plan de l'orbite, indépendamment des autres inconnues. Les essais que nous avons faits pour y parvenir seront l'objet du problème qui suit.

70. *PROBLÈME VIII. Trois observations d'une planète ou d'une comète étant données, déterminer les deux élémens desquels dépend la position du plan de son orbite : savoir la longitude du nœud, et l'angle que fait le plan de cet orbite avec celui de l'écliptique ?*

71. *Solution.* Les notations que nous avons employées dans les trois problèmes précédens seront conservées. Soient donc

δ...l'angle ESN ; longitude du nœud.

β...l'angle MNL ; inclinaison de l'orbite.

ε...l'angle ASN , que fait la ligne des nœuds avec celle des apsides.

b...le demi-grand axe de l'orbite de la planète ou de la comète.

μ...l'excentricité de l'orbite ; ce qui donne

bCos.μ...pour le demi-petit axe ;

bSin.μ... pour la distance du foyer au centre.

a...le demi-grand axe de l'orbite de la terre supposé circulaire.

p...le temps périodique de la terre, dont le mouvement est supposé uniforme.

q...le temps périodique de l'astre.

Le premier de ces termes est connu. Quant à l'autre , le théorème *Képlérien* $p^2 : q^2 = a^3 : b^3$ nous fait voir qu'il dépend du demi-grand axe b, et que les deux quantités b et q ne forment qu'une seule inconnue.

72. Aux *cinq* élémens désignés par les lettres β, δ, ε, μ, b il faut en ajouter un sixième : c'est celui qui doit fixer le moment du passage de la comète par l'aphélie de son orbite. Nous supposerons donc que , dans cet instant , la terre était au point B de la sienne. La sixième inconnue sera donc

μ...l'angle NSB que faisait la ligne des nœuds avec le rayon vecteur de la terre SB , à l'instant du passage de l'astre par l'aphélie de son orbite. (*)

73. Nous continuerons d'employer la lettre φ pour désigner l'*Anomalie vraie* , et la lettre $\varkappa$ pour exprimer l'*Anomalie excentrique.* La longitude de la terre , supposée au point T de son orbite , ou l'angle EST , sera désignée par θ ; ce qui rend l'angle NST$=\theta-\delta$, et l'angle BST$=\theta-\delta-\mu$. Et comme l'astre emploie le même temps pour parcourir l'arc AM de son orbite , et pour décrire ainsi l'ano-

(*) On suppose toujours qu'on a sous les yeux la figure du *Deuxième mémoire.*

malie vraie φ, à laquelle répondent l'excentrique $\varkappa$ et le rayon vecteur $SM=r$, on aura les équations qui suivent :

$$r=\frac{b\text{Cos.}^2\mu}{1-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi};$$

$$\text{Sin.}\varkappa=\frac{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varphi}{1-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi},$$

$$\text{Cos.}\varkappa=\frac{\text{Cos}\,\varphi-\text{Sin.}\mu}{1-\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi}.$$

$$\frac{p}{q}(\theta-\delta-\mu)=\varkappa+\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varkappa.$$

74. En éliminant de toutes ces formules l'anomalie vraie φ, et en conservant la seule anomalie excentrique $\varkappa$, à laquelle nous aurons soin de tout réduire, les égalités précédentes seront transformées dans celles qui suivent :

$$\text{Sin.}\varphi=\frac{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varkappa}{1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa};$$

$$\text{Cos.}\varphi=\frac{\text{Cos.}\varkappa+\text{Sin.}\mu}{1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa};$$

$$r=b(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa);$$

ce qui donne

$$r\text{Sin.}\varphi=b\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varkappa,$$

$$r\text{Cos.}\varphi=b(\text{Cos.}\varkappa+\text{Sin.}\mu).$$

75. En abaissant du point M qui est le lieu de l'astre dans son orbite, la perpendiculaire MN sur la ligne des nœuds, les deux coordonnées de ce point seront exprimées comme il suit :

$$MN=r\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)=bP,$$

$$SN=r\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)=bQ;$$

ce qui donne

$$P=(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x)\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)\ ;$$

$$Q=(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x)\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)\ ;$$

et, en développant moyennant les formules du n.° 74,

$$P=\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\mu+\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}x-\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}x\text{Cos.}\mu\ ,$$

$$Q=\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\mu+\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}x+\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}x\text{Cos.}\mu\ .$$

Nous continuerons d'employer les lettres P et Q, dont nous avons déjà reconnu la nécessité indispensable pour la solution générale du problème.

76. Les mêmes quantités P et Q peuvent encore être autrement exprimées, par la longitude et la latitude géocentriques au moment de l'observation. En continuant de désigner

Par A... la longitude géocentrique,
Par B... la latitude géocentrique ;

nous avons fait voir (55) que

$$\frac{bP}{a}=\frac{\text{Cos.}\beta\text{Cos.}(\theta-\delta)+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\theta-A)\text{Cot.}B}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A)\text{Cot.}B}\ ;$$

$$\frac{bQ}{a}=\frac{\text{Sin.}(\theta-\delta)}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A)\text{Cot.}B}\ .$$

Égalant entre elles les deux expressions équivalentes de P, aussi bien que celles de Q, on aura donc deux équations renfermant d'un côté l'excentricité μ, l'anomalie excentrique x et l'angle ε que fait la ligne des nœuds avec celle des apsides, et de l'autre le rapport $\frac{a}{b}$ des axes et les deux angles β et δ, desquels dépend la position du plan de l'orbite.

77. Ainsi donc, pour résoudre complètement le problème proposé, nous avons besoin de trois observations. Elles nous fourniront immédiatement les trois longitudes géocentriques A, A', A'', les trois latitudes géocentriques B, B', B'', et les trois angles θ, θ', θ'',

dont les différences seront supposées proportionnelles aux temps. Outre les six inconnues déjà mentionnées (71, 72), nous aurons encore les trois anomalies excentriques κ, κ', κ'' qu'il faudra déterminer également. Le nombre des inconnues étant ainsi porté à neuf, il faudra, pour résoudre le problème, *neuf* équations indépendantes entre elles. *Six* de ces équations seront fournies en égalant entre elles les deux expressions équivalentes de P, celles de P' celles de P'', et de même celles de Q, de Q', de Q''. On aura de plus les trois équations (73), savoir :

$$\frac{p}{q}(\theta - \delta - \nu) = \kappa + \text{Sin.}\mu\,\text{Sin.}\kappa \quad ,$$

$$\frac{p}{q}(\theta' - \delta - \nu) = \kappa' + \text{Sin.}\mu\,\text{Sin.}\kappa' \quad ,$$

$$\frac{p}{q}(\theta'' - \delta - \nu) = \kappa'' + \text{Sin.}\mu\,\text{Sin.}\kappa'' \quad .$$

Ici on pourra, par une simple soustraction, éliminer l'inconnue ν, on obtiendra ainsi les deux équations qui suivent :

$$\frac{p}{q}(\theta' - \theta) = \kappa' - \kappa + \text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\kappa' - \text{Sin.}\kappa) \quad ;$$

$$\frac{r}{q}(\theta'' - \theta') = \kappa'' - \kappa' + \text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\kappa'' - \text{Sin.}\kappa') \quad .$$

Nous remarquerons qu'en divisant l'une de ces deux dernières équations par l'autre, on aura l'équation symétrique qui suit, et qui est débarrassée du rapport $\frac{p}{q}$, savoir :

$$\begin{aligned} 0 = {} & \theta\,(\kappa' - \kappa'') + \theta\,\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\kappa' - \text{Sin.}\kappa'') \\ & + \theta'(\kappa'' - \kappa\,) + \theta'\,\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\kappa'' - \text{Sin.}\kappa\,) \\ & + \theta''(\kappa - \kappa'\,) + \theta''\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\kappa - \text{Sin.}\kappa'\,) \quad . \end{aligned}$$

78. En nous arrêtant aux deux équations obtenues en éliminant l'angle ν, le problème sera réduit à *huit* équations, renfermant un

pareil nombre d'inconnues. Pour le réduire ultérieurement aux deux seules inconnues β et δ, lesquelles déterminent la position du plan de l'orbite, il faudrait donc éliminer successivement les six autres inconnues, savoir : les trois anomalies excentriques $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$; l'angle ε; l'excentricité μ, et le rapport $\frac{p}{q}$ ou $\frac{a}{b}$; or, cette élimination est analitiquement impossible, tant que l'on conservera la forme transcendante des deux dernières équations, renfermant à la fois les anomalies excentriques $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, et les sinus de ces mêmes anomalies. Reste donc à exprimer les unes par les autres. De pareilles expressions, au défaut d'être rigoureuses, pourront au moins être approchées; et ces approximations seront applicables à notre problème, pour peu que les observations qu'on emploîra ne soient pas très-éloignées l'une de l'autre.

79. *PREMIÈRE APPROXIMATION. L'angle est égal à son sinus.* Cela donne $\psi = \text{Sin.}\psi$, en désignant l'angle par ψ. On a rigoureusement $\psi = \text{Sin.}\psi + \frac{1}{6}\text{Sin.}^3\psi + \frac{3}{40}\text{Sin.}^5\psi + \ldots$; l'erreur est donc égale à $\frac{1}{6}\text{Sin.}^3\psi + \frac{3}{40}\text{Sin.}^5\psi + \ldots$ En prenant ici pour ψ la différence de nos deux anomalies excentriques ou $\varkappa' - \varkappa$, l'équation

$$\frac{p}{q}(\theta' - \theta) = \varkappa' - \varkappa + \text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa' - \text{Sin.}\varkappa)$$

prendra la forme

$$\frac{p}{q} = 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\varkappa' - \varkappa)\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\varkappa' - \varkappa) + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(\varkappa' + \varkappa)\};$$

et sera devenue entièrement algébrique. La supposition $\psi = \text{Sin.}\psi$ ne peut être employée sans erreur sensible qu'autant que l'observation moyenne ne diffère des deux autres que de l'intervalle de quelques jours; cependant, elle sert de base aux méthodes de *du Sejour* et d'*Olbers*, comme nous le verrons bientôt; et, dans tous les cas, elle fournit une première approximation fort utile.

80. *Seconde approximation. L'angle ψ est égal à* $\frac{3\text{Sin.}\psi}{2+\text{Cos.}\psi}$. Il n'en diffère effectivement que de $\frac{\psi^5}{180}+\ldots$, ce qui fait

$$0{,}0002\,,\ \text{pour}\ \psi=30^\circ\,,$$
$$0{,}0018\,,\ \text{pour}\ \psi=45^\circ\,,$$
$$0{,}0080\,,\ \text{pour}\ \psi=60^\circ\,.$$

Pour un angle moindre que 30°, la différence est insensible. Ce théorème se trouve dans l'ouvrage de Snellius, nommé *Cyclométricus* (Lugd. Batav. 1621) ; mais des auteurs très-instruits, en le faisant remonter plus haut de près de deux siècles, en attribuent l'honneur au celèbre et savant cardinal Nicolaus Cusanus. Cette formule fournit, pour la solution du problème, une approximation plus exacte, mais elle conduit à des équations plus compliquées.

81. *Troisième approximation. L'angle ψ est égal à* $\frac{14+\text{Cos.}\psi}{9+6\text{Cos.}\psi}\text{Sin.}\psi$. Il n'en diffère effectivement que de $\frac{\psi^7}{2100}+\ldots$, ce qui fait

$$0{,}000005\,,\ldots\ \text{pour}\ \psi=30^\circ\,,$$
$$0{,}000100\,,\ldots\ \text{pour}\ \psi=45^\circ\,,$$
$$0{,}000800\,,\ldots\ \text{pour}\ \psi=60^\circ\,.$$

En faisant usage de cette troisième formule, on pourra employer des observations de quelques mois d'intervalle.

82. Dionis du Séjour, dans son *Quatorzième mémoire analitique* (*Acad. des sciences*, *année* 1779, *pag.* 155), a substitué au secteur curviligne de l'astre, qui est proportionnel au temps, l'aire rectiligne comprise entre les rayons vecteurs et la corde correspondante. On a, pour le premier,

$$\frac{p}{q}(\theta'-\theta)=x'-x+\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}x'-\text{Sin.}x)\ ;$$

et on aurait pour l'autre

$$\frac{p}{q}(\theta'-\theta)=\text{Sin.}(x'-x)+\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}x'-\text{Sin.}x)\ .$$

Cet astronome suppose donc tacitement que la différence entre les deux anomalies excentriques est assez petite pour être sensiblement confondue avec son sinus. Le théorème auquel cette supposition l'a conduit, et qui lui a servi pour déterminer la position du plan de l'orbite, est identique avec celui qu'Olbers a publié, dans un traité allemand en 1797, et qui revient encore au principe employé par du Séjour. Cependant cet astronome ne paraît pas en avoir tiré tout le parti qu'il pouvait, parce que, dans son traité, il s'est renfermé dans le seul cas particulier, et peu probable, du mouvement parabolique. (*)

83. Comme nous avons (75)

(*) En poussant ces approximations plus loin, j'ai trouvé

$$\text{IV.}\ \frac{\psi}{\text{Sin.}\psi}=\frac{80+25\text{Cos.}\psi}{54+48\text{Cos.}\psi+3\text{Cos.}2\psi}\ ,$$

$$\text{V.}\ \frac{\psi}{\text{Sin.}\psi}=\frac{213+101\text{Cos.}\psi+\text{Cos.}2\psi}{150+150\text{Cos.}\psi+15\text{Cos.}2\psi}\ ,$$

$$\text{VI.}\ \frac{\psi}{\text{Sin.}\psi}=\frac{1337+924\text{Cos.}\psi+49\text{Cos.}2\psi}{1000+1125\text{Cos.}\psi+180\text{Cos.}2\psi+5\text{Cos.}3\psi}\ ,$$

$$\text{VII.}\ \frac{\psi}{\text{Sin.}\psi}=\frac{31512+26274\text{Cos.}\psi+2264\text{Cos.}2\psi+10\text{Cos.}3\psi}{24500+29400\text{Cos.}\psi+5880\text{Cos.}2\psi+280\text{Cos.}3\psi}\ .$$

Les erreurs de ces formules approximatives sont respectivement égales à la *neuvième*, la *onzième*, la *treizième* et la *quinzième* puissances de l'angle ψ. En calculant, d'après ces mêmes formules, l'arc de 60°, on le trouve

d'après IV ,... $\frac{185}{306}\sqrt{3}$: erreur 0,00004855 ,

d'après V ,... $\frac{163}{435}\sqrt{3}$: erreur 0,000003614665 ,

d'après VI ,... $\frac{3540}{5870}\sqrt{3}$: erreur 0,000000219670 ,

d'après VII,... $\frac{43507}{71960}\sqrt{3}$: erreur 0,000000018055 .

$$bP\;=r\ \text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)\ ,$$
$$bQ\;=r\ \text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)\ ,$$
$$bP'=r'\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi')\ ,$$
$$bQ'=r'\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi')\ ;$$

nous en déduirons

$$b^2(PQ'-P'Q)=rr'\text{Sin.}(\varphi'-\varphi)\ ;$$

ce qui devient, en réduisant

$$PQ'-P'Q=\text{Cos.}\mu\text{Sin.}(\varkappa'-\varkappa)+\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa'-\text{Sin.}\varkappa)\ .$$

De plus, nous avons (77)

$$\frac{p}{q}(\theta'-\theta)=(\varkappa'-\varkappa)+\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa'-\text{Sin.}\varkappa)\ ,$$

ce qui devient, en remplaçant l'angle $\varkappa'-\varkappa$ par son sinus

$$\frac{p}{q}(\theta'-\theta)=\text{Sin.}(\varkappa'-\varkappa)+\text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa'-\text{Sin.}\varkappa)\ .$$

Il en résulte

$$PQ'-P'Q=\frac{p}{q}(\theta'-\theta)\text{Cos.}\mu\ .$$

On aura de même

$$P'Q''-P''Q'=\frac{p}{q}(\theta''-\theta')\text{Cos.}\mu\ ,$$
$$P\,Q''-P''Q=\frac{p}{q}(\theta''-\theta\,)\text{Cos.}\mu\ ;$$

d'où l'on tire

La dernière peut être appliquée, sans erreur sensible, à tout angle moindre que 90°.

Ces approximations, qu'il serait facile de pousser plus loin, peuvent, dans certains cas, dispenser de l'usage des tables, et donner lieu à d'autres applications utiles. Elles donnent en particulier des approximations faciles du nombre ϖ, et c'est même dans cette vue que Snellius s'était occupé de la formule $\frac{\psi}{\text{Sin.}\psi}=\frac{3}{2+\text{Cos.}\psi}$.

$$PQ'-P'Q+P'Q''-P''Q'+P''Q-PQ''=0 :$$

équation essentielle, et remarquable par sa simplicité.

84. Divisant les trois premières de ces équations l'une par l'autre, on aura

$$\frac{PQ'-P'Q}{PQ''-P''Q}=\frac{\theta'-\theta}{\theta''-\theta},$$

$$\frac{P'Q''-P''Q'}{PQ''-P''Q}=\frac{\theta''-\theta'}{\theta''-\theta}.$$

Ainsi donc, tant que les observations seront assez rapprochées pour que les angles $\varkappa'-\varkappa$, $\varkappa''-\varkappa'$ puissent être confondus avec leurs sinus, sans erreur sensible, les trois différences des produits $PQ'-P'Q$, $P'Q''-P''Q'$, $PQ''-P''Q$, seront proportionnelles aux intervalles des temps. Il en résulte deux équations entièrement algébriques, qui ne renferment d'autres inconnues que les deux seuls angles β, δ, desquels dépend la position du plan de l'orbite, et dont nous pourrons tirer, avec facilité, les expressions litérales de ces inconnues.

85. Procédons d'abord au développement de ces trois différences de produits. Faisons $\frac{b}{a}=m$; on aura

$$mP=\frac{\text{Cos.}\beta\text{Cos.}(\theta-\delta)+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\theta-A)\text{Cot.}B}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A)\text{Cot.}B},$$

$$mP'=\frac{\text{Cos.}\beta\text{Cos.}(\theta'-\delta)+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\theta'-A')\text{Cot.}B'}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A')\text{Cot.}B'},$$

$$mP''=\frac{\text{Cos.}\beta\text{Cos.}(\theta''-\delta)+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\theta''-A'')\text{Cot.}B''}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin}\,\beta\text{Sin.}(\delta-A'')\text{Cot.}B''};$$

$$mQ=\frac{\text{Sin.}(\theta-\delta)}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin}\,\beta\text{Sin:}(\delta-A)\text{Cot.}B},$$

$$mQ'=\frac{\text{Sin.}(\theta'-\delta)}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A')\text{Cot.}B'},$$

$$mQ''=\frac{\text{Sin.}(\theta''-\delta)}{\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A'')\text{Cot.}B''}.$$

86. Pour présenter ces développemens sous la forme la plus simple, nous ferons d'abord

$$\theta'-\theta=t \ ,$$
$$\theta''-\theta'=t' \ ,$$
$$\theta''-\theta=h \ ;$$

de manière que $h=t+t'$; ces trois lettres désigneront ainsi les intervalles des temps. De plus, nous désignerons les trois dénominateurs par D, D', D''; de manière que

$$D\ =\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A\ )\text{Cot.}B \ ,$$
$$D'=\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A')\text{Cot.}B' \ ,$$
$$D''=\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\beta\text{Sin.}(\delta-A'')\text{Cot.}B'' \ .$$

Enfin nous emploîrons les lettres M, N, O pour exprimer les trois différences de produit qui suivent :

$$M=\text{Sin.}(\theta-A\ )\text{Sin.}(\theta'-\delta)\text{Cot.}B-\text{Sin}(\theta'-A')\text{Sin.}(\theta-\delta)\text{Cot.}B' \ ,$$
$$N=\text{Sin.}(\theta-A\ )\text{Sin.}(\theta''-\delta)\text{Cot.}B-\text{Sin.}(\theta''-A'')\text{Sin.}(\theta-\delta)\text{Cot.}B'' \ ,$$
$$O=\text{Sin.}(\theta'-A')\text{Sin.}(\theta''-\delta)\text{Cos.}B-\text{Sin.}(\theta''-A'')\text{Sin.}(\theta'-\delta)\text{Cot.}B'' \ .$$

87. En faisant usage de ces notations, on aura, de la manière suivante, les développemens qu'on demandait, savoir :

$$D\,D'(P\,Q'-P'\,Q\,)=\text{Cos.}\beta\text{Sin.}t+M\text{Sin.}\beta \ ,$$
$$D\,D''(P\,Q''-P''Q\,)=\text{Cos.}\beta\text{Sin.}h+N\text{Sin.}\beta \ ,$$
$$D'D''(P'Q''-P''Q')=\text{Cos.}\beta\text{Sin.}t'+O\text{Sin.}\beta \ .$$

88. Reste donc simplement à substituer les expressions que nous venons d'obtenir dans les égalités (84), savoir

$$h(P\,Q'-P'\,Q\,)=t\,(PQ''-P''Q) \ ,$$
$$h(P'Q''-P''Q')=t'(PQ''-P''Q) \ .$$

En mettant ici à la place de D, D', D'', leurs valeurs respectives, tirées de (86); ensuite à la place de $PQ'-P'Q$, $P'Q''-P''Q'$,

$PQ''-P''Q$, leurs valeurs données (87), on aura les deux équations du second degré qui suivent :

$$
\begin{aligned}
0= & (h\text{Sin}.t-t\text{Sin}.h)\text{Cos}.^2\beta \\
& +h\text{Sin}.t\text{Sin}.(\delta-A'')\text{Cot}.B''\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta \\
& -t\text{Sin}.h\text{Sin}.(\delta-A')\text{Cot}.B'\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta \\
& + \qquad (hM-tN)\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta \\
& +hM\text{Sin}.(\delta-A'')\text{Cot}.B''\text{Sin}.^2\beta \\
& -tN\text{Sin}..(\delta-A')\text{Cot}.B'\text{Sin}.^2\beta\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0= & (h\text{Sin}.t'-t'\text{Sin}.h)\text{Cos}.^2\beta \\
& +h\text{Sin}.t'\text{Sin}.(\delta-A)\text{Cot}.B\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta \\
& -t'\text{Sin}.h\text{Sin}.(\delta-A')\text{Cot}.B'\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta \\
& + \qquad (hO-t'N)\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta \\
& +hO\text{Sin}.(\delta-A)\text{Cot}.B\text{Sin}.^2\beta \\
& -t'N\text{Sin}.(\delta-A')\text{Cot}.B'\text{Sin}.^2\beta\ .
\end{aligned}
$$

89. Ici je remarquerai d'abord que, tant qu'il n'y aura qu'un intervalle de cinq à six jours entre la première et la seconde, de même qu'entre la seconde et la troisième observations, la valeur numérique des deux différences de produits $h\text{Sin}.t-t\text{Sin}.h$, $h\text{Sin}.t'-t'\text{Sin}.h$ sera au-dessous d'un *dix millième*, et qu'ainsi il sera permis de supprimer les premiers termes de nos équations, sans erreur sensible. Divisant alors par Sin.β, elles seront rabaissées au premier degré, et donneront, pour Tang.β les deux expressions équivalentes qui suivent

$$-\text{Tang}.\beta=\frac{h\text{Sin}.t\text{Sin}.(\delta-A'')\text{Cot}.B''-t\text{Sin}.h\text{Sin}.(\delta-A')\text{Cot}.B'+hM-tN}{hM\text{Sin}.(\delta-A'')\text{Cot}.B''-tN\text{Sin}.(\delta-A')\text{Cot}.B'},$$

$$-\text{Tang}.\beta=\frac{h\text{Sin}.t'\text{Sin}.(\delta-A)\text{Cot}.B-t'\text{Sin}.h\text{Sin}.(\delta-A')\text{Cot}.B'+hO-t'N}{hO\text{Sin}.(\delta-A)\text{Cot}.B-t'N\text{Sin}.(\delta-A'')\text{Cot}.B'}.$$

90. Essayons de donner aux numérateurs et aux dénominateurs

de ces deux fractions la forme connue de binôme, savoir $F\text{Cos.}\vartheta - G\text{Sin.}\vartheta$. Dans cette vue, nous ferons, pour abreger,

$$a = \text{Cos.}A\ \text{Cot.}B\ ,\quad a' = \text{Sin.}A\ \text{Cot.}B\ ,$$
$$b = \text{Cos.}A'\ \text{Cot.}B'\ ,\quad b' = \text{Sin.}A'\ \text{Cot.}B'\ ,$$
$$c = \text{Cos.}A''\ \text{Cot.}B''\ ;\quad c' = \text{Sin.}A''\ \text{Cot.}B''\ .$$

$$m = \text{Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B\text{Sin.}\theta' - \text{Sin.}(\theta' - A')\text{Cot.}B'\ \text{Sin.}\theta\ ,$$
$$n = \text{Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B\text{Sin.}\theta'' - \text{Sin.}(\theta'' - A'')\text{Cot.}B''\text{Sin.}\theta'\ ,$$
$$o = \text{Sin.}(\theta' - A')\text{Cot.}B'\text{Sin.}\theta'' - \text{Sin.}(\theta'' - A'')\text{Cot.}B''\text{Sin.}\theta\ ;$$

$$m' = \text{Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B\ \text{Cos.}\theta' - \text{Sin.}(\theta' - A')\text{Cot.}B'\ \text{Cos.}\theta\ ,$$
$$n' = \text{Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B\ \text{Cos.}\theta'' - \text{Sin.}(\theta'' - A'')\text{Cot.}B''\text{Cos.}\theta\ ,$$
$$o' = \text{Sin.}(\theta' - A')\text{Cot.}B'\ \text{Cos.}\theta'' - \text{Sin.}(\theta'' - A'')\text{Cot.}B''\text{Cos.}\theta'\ .$$

91. Enfin, proposons la dernière notation que la nature du problème exige, et qui paraît nécessaire pour présenter l'inconnue sous la forme la plus simple : savoir,

$$D = hm - tn - c'h\text{Sin.}t + b't\text{Sin.}h\ ,$$
$$E = hm' - tn' - ch\text{Sin.}t + bt\text{Sin.}h\ ,$$
$$F = b'tn - c'hm\ ,$$
$$G = b'tn' + btn - c'hm' - chm\ ,$$
$$H = btn' - chm'\ ;$$
$$D' = ho - t'n - a'h\text{Sin.}t' + b't'\text{Sin.}h\ ,$$
$$E' = ho' - t'n' - ah\text{Sin.}t' + bt'\text{Sin.}h\ ,$$
$$F' = b't'n - a'ho\ ,$$
$$G' = bt'n + b't'n' - aho - a'ho'\ ,$$
$$H' = bt'n' - aho'\ .$$

92. Les deux expressions (89) deviendront alors

$$-\mathrm{Tang.}\beta=\frac{D\mathrm{Cos.}\delta-E\mathrm{Sin.}\delta}{F\mathrm{Cos.}^2\delta-G\mathrm{Sin}\,\delta\mathrm{Cos.}\delta+H\mathrm{Sin.}^2\delta},$$

$$-\mathrm{Tang.}\beta=\frac{D'\mathrm{Cos.}\delta-E'\mathrm{Sin.}\delta}{F'\mathrm{Cos.}^2\delta-G'\mathrm{Sin.}\delta\mathrm{Cos.}\delta+H'\mathrm{Sin.}^2\delta}.$$

93. Reste donc, pour trouver l'angle inconnu δ, à égaler ensemble ces deux fractions qui, par la nature du problème, doivent être équivalentes. On aura l'équation du troisième degré qui suit :

$$\begin{aligned}0=&(DF'-D'F)\\ &-(DG'-D'G+EF'-E'F)\mathrm{Tang.}\,\delta\\ &+(DH'-D'H+EG'-E'G)\mathrm{Tang.}^2\delta\\ &+(EH'-E'H)\mathrm{Tang.}^3\delta\,.\ (*)\end{aligned}$$

94. La tangente de l'angle inconnu δ, duquel dépend la détermination de tous les autres élémens est donc la racine d'une équation assez simple du troisième degré; et la nature du problème nous permet de présumer qu'elle est la seule réelle. Remarquons que nous ne nous sommes permis aucune supposition sur la nature de l'orbite, le grand système de la gravitation universelle nous apprenant uniquement que c'est une section conique. En appliquant, dans chaque cas particulier, les valeurs numériques données par les observations aux expressions littérales de nos formules, nous verrons si c'est une parabole, une ellipse ou bien une hyperbole. Dispensés de l'emploi ordinaire et très-pénible des fausses positions, nous devons remarquer que notre solution, de même que toutes celles de l'algèbre élémentaire, conduit directement au but qu'on s'était proposé. En supposant à la terre un mouvement circulaire et uniforme, pendant l'intervalle qui sépare les observations, nous avons fait disparaître de nos formules la ligne a, demi-grand axe de l'orbe

(*) En ne supposant point nulles les deux différences $h\mathrm{Sin.}t-t\mathrm{Sin.}h$ et $h\mathrm{Sin.}t'-t'\mathrm{Sin.}h$, l'équation finale qui donne Tang.δ est beaucoup plus compliquée ; mais elle ne s'élève néanmoins qu'au quatrième degré.

terrestre ; cette supposition ne peut donc influer sur les résultats que sous le simple rapport de l'inégalité de nos trois rayons vecteurs : inégalité insensible pendant l'intervalle de temps que nous avons supposé. Il nous reste donc à enseigner la petite correction qu'il faut employer, pour faire coïncider l'orbite calculée par notre méthode avec des observations plus éloignées ; et ce sera l'objet d'un autre mémoire.

95. Ayant trouvé l'angle ϑ, on trouvera l'inclinaison de l'orbite, ou l'angle β, moyennant l'une ou l'autre des deux formules (92), dont l'identité pourra servir d'ailleurs à vérifier le calcul. Connaissant ainsi les deux angles desquels dépend la position de l'orbite, rien n'empêchera de procéder à l'évaluation numérique des fractions P, P', P'', Q, Q', Q'', moyennant les formules (85) ; on verra si les trois différences de produits $PQ'-P'Q$, $P'Q''-P''Q'$, $PQ''-P''Q$ sont entre elles dans la raison des intervalles des temps, et si la troisième est égale à la somme des deux autres. Cette condition étant remplie, on sera sûr qu'aucune erreur n'a pu se glisser dans l'évaluation numérique des formules générales.

96. Toutefois, rappelons-nous que les formules (85) ne nous font pas trouver les quantités P, P', P'', Q, Q', Q'', mais les produits $\frac{bP}{a}$, $\frac{bP'}{a}$, $\frac{bP''}{a}$, $\frac{bQ}{a}$, $\frac{bQ'}{a}$, $\frac{bQ''}{a}$; la fraction $\frac{b}{a}$, qui désigne le rapport entre les demi-grands axes des deux orbites, étant elle-même une des inconnues du problème. Pour éviter toute erreur, nous désignerons par la lettre n, la fraction $\frac{a}{b}$, et nous ferons

$$\begin{array}{lll} P=nM, & Q=nN, & R=nO, \\ P'=nM', & Q'=nN', & R'=nO', \\ P''=nM'', & Q''=nN'', & R''=nO''. \end{array}$$

Comme nous avons déjà employé la lettre R pour désigner la racine

racine quarrée de P^2+Q^2, nous désignerons de même par O celle de M^2+N^2 ; il en sera de même, lorsque ces lettres seront affectées d'un ou de deux accens.

97. La position du plan étant déterminée, le nombre des inconnues sera réduit à *six* : savoir,

Les trois anomalies excentriques κ, κ', κ',

L'excentricité . . . . μ,

L'angle que fait la ligne des apsides avec la ligne des nœuds ε,

Le rapport des deux axes n.

Pour les déterminer, nous aurons les *huit* équations qui suivent

$$(1)\quad nM = \text{Cos}\,\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Cos}\,\varepsilon\,\text{Cos}.\kappa - \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.\kappa \;;$$

$$(2)\quad nM' = \text{Cos}\,\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Cos}.\kappa' - \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.\kappa' \;,$$

$$(3)\quad nM'' = \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Cos}.\kappa'' - \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.\kappa'' \;;$$

$$(4)\quad nN = \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.\kappa + \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.\kappa \;,$$

$$(5)\quad nN' = \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.\kappa' + \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.\kappa' \;,$$

$$(6)\quad nN'' = \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Sin}.\mu + \text{Sin}.\varepsilon\,\text{Cos}.\kappa'' + \text{Cos}.\varepsilon\,\text{Cos}.\mu\,\text{Sin}.\kappa'' \;;$$

$$(7)\quad (\theta' - \theta)\sqrt{n^3} = \kappa' - \kappa + \text{Sin}.\mu(\text{Sin}.\kappa' - \text{Sin}.\kappa) \;,$$

$$(8)\quad (\theta'' - \theta')\sqrt{n^3} = \kappa'' - \kappa' + \text{Sin}.\mu(\text{Sin}.\kappa'' - \text{Sin}.\kappa') \;.$$

Six équations suffisent pour trouver les inconnues qui nous restent. On pourra employer les équations (1, 2, 4, 5, 7), en employant la première et la seconde observations ; ou bien les équations (2, 3, 5, 6, 8), si l'on veut faire usage de la seconde et de la troisième. Les deux solutions doivent donner le même résultat, et serviront à vérifier l'une par l'autre.

98. En choisissant les deux premières observations qui nous fournissent les six quantités connues M, M', N, N', θ, θ', nous aurons les cinq équations qui suivent :

$$nM = \text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\mu + \text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\varkappa - \text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varkappa$$
$$nM' = \text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\mu + \text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\varkappa' - \text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varkappa'$$
$$nN = \text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\mu + \text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\varkappa + \text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varkappa$$
$$nN' = \text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\mu + \text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\varkappa' + \text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varkappa'$$
$$(\theta' - \theta)\sqrt{n^3} = (\varkappa' - \varkappa) + \text{Sin.}\mu(\text{Sin.}\varkappa' - \text{Sin.}\varkappa).$$

99. L'élimination de l'angle ε nous fournit le moyen de réduire à *trois* les quatre premières de ces équations. Nous avons déjà observé, dans le précédent mémoire, que

$$R - R' \quad \text{ou} \quad n(O - O') = 2\text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varphi\text{Sin.}\psi\ ,$$
$$PQ' - P'Q \quad \text{ou} \quad n^2(MN' - M'N) = 2\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(\text{Cos.}\psi + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi)\ ,$$
$$RR' - PP' - QQ' \quad \text{ou} \quad n^2(OO' - MM' - NN') = 2\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi\ ;$$

de même que, dans le problème précédent, nous avons employé les lettres φ et ψ pour désigner la demi-somme et la demi-différence des deux anomalies excentriques, tellement que $\varkappa' = \varphi + \psi$, et $\varkappa = \varphi - \psi$. Moyennant cette notation, la dernière équation prendra la forme qui suit :

$$(\theta' - \theta)\sqrt{n^3} = 2\psi + 2\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi\text{Sin.}\psi\ .$$

100. Pour présenter nos quatre équations sous la forme la plus simple dont elles peuvent être susceptibles, nous emploîrons les quatre lettres a, b, c, d, de la manière qui suit : soient

$$2a = O - O'\ ,$$
$$2b = MN' - M'N\ ,$$
$$2c^2 = OO' - MM' - NN'\ ,$$
$$2d = \theta - \theta'\ ;$$

elles deviendront alors

$$n\ a = \text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varphi\text{Sin.}\psi\ ,$$
$$n^2b = \text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(\text{Cos.}\psi + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi)\ ,$$

$$n^3 c = \text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi,$$
$$d\sqrt{n^3} = \psi + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi\text{Sin.}\psi.$$

101. Pour tirer de ces quatre équations les valeurs numériques de nos quatre inconnues, dans des cas quelconques, et sans aucun emploi de moyens approximatifs, il faut employer les fausses positions. Ainsi, supposant une valeur quelconque à l'angle φ, la première et la troisième équations nous fourniront $\frac{a}{c} = \text{Tang.}\mu\text{Sin.}\varphi$; ce qui fera connaître l'excentricité μ. Divisant de même le quarré de la troisième par la seconde, on aura

$$\frac{c^2}{b} = \frac{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi}{\text{Cos.}\varphi + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\psi},$$

ou

$$b\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi - c^2\text{Cos.}\psi = c^2\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi,$$

d'où l'on tirera facilement l'angle ψ, moyennant un nouvel angle, tel que $\text{Tang.}\lambda = \frac{c^2}{b\text{Cos.}\mu}$, et qui fournira $\text{Sin.}(\psi - \lambda) = \text{Sin.}\lambda\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi$. On aura ensuite

$$n = \frac{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi}{c};$$

et les quatre inconnues étant ainsi supposées connues, on en fera l'épreuve sur la quatrième équation; on aura soin de noter l'erreur qui en sera résultée, et qui conduira à une seconde position plus approchante que l'autre.

102. On pourra cependant se passer de l'emploi des fausses positions, dans le cas où les observations sont assez rapprochées pour que, sans erreur sensible, on puisse faire $\text{Sin.}\psi = \psi$, et $\text{Cos.}\psi = 1$. Nos quatre équations deviendront alors

$$n\,a = \text{Sin}\,\mu\text{Sin}\,\varphi\text{Sin.}\psi,$$
$$n^2 b = \text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(1 + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi),$$

$$nc = \text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi \ ,$$

$$d\sqrt{n^3} = \text{Sin.}\psi(1+\mu\text{Cos.}\varphi)$$

Il sera très-facile, dans cette supposition, d'exprimer les angles μ, φ, ψ, en n, de la manière suivante :

$$\text{Sin.}^2\varphi = \frac{na^3b(2c-nb)}{a^3c+(nb-c)^2c^2} \ ,$$

$$\text{Sin.}^2\psi = \frac{nc^2(a^2+c^2)}{b(2c-nb)} \ ,$$

$$\text{Cos.}^2\mu = \frac{nb(2c-nb)}{a^2+c^2} \ ;$$

et substituant, on aura pour n, qui forme la principale inconnue du problème, l'expression très-simple qui suit :

$$n = \frac{2cd^2-(a^2+c^2)b}{bd^2} \ .$$

103. Cette expression nous fait connaître, sur-le-champ, les trois cas de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole. Tant qu'on aura $2cd^2 > (a^2+c^2)b$, le grand axe de l'orbite sera *positif*, ce qui indique l'*ellipse*. Dans le cas opposé, de $2cd^2 < (a^2+c^2)b$, l'axe, devenu *négatif*, indiquera l'*hyperbole*. On reconnaîtra la *parabole* à ce qu'on aura alors $2cd^2 = (a^2+c^2)b$. Le cercle se reconnaîtra sur-le-champ à l'égalité des trois rayons vecteurs, qui sont proportionnels aux radicaux R, R', R'', ou bien O, O', O''. On aura, dans ce dernier cas, $\text{Sin.}\mu = 0$, et $\text{Cos.}\mu = 1$; ce qui donne

$$n^2b = \text{Sin.}\psi\text{Cos.}\psi \ ,$$

$$n\,c = \text{Sin.}\psi \ ,$$

$$d\sqrt{n^3} = \text{Sin.}\psi \ ;$$

ce qui fournira, entre les trois quantités b, c, d, l'équation de condition $d^4 = (b^2+c^2)c^4$.

104. Substituant, dans les expressions littérales de μ, φ, ψ, la valeur de n qu'on vient de trouver, et posant, pour abréger, $a^2+c^2=f^2$, on aura les formules qui suivent:

$$\text{Sin.}\mu=\frac{\sqrt{d^4-2bcd^2+b^2f^2}}{d^2},\quad \text{Cos.}\mu=\frac{\sqrt{2bcd^2-b^2f^2}}{d^2},$$

$$\text{Sin.}\varphi=\frac{a\sqrt{2bcd^2-b^2f^2}}{c\sqrt{d^4-2bcd^2+b^2f^2}};\quad \text{Cos.}\varphi=\frac{cd^2-bf^2}{c\sqrt{d^4-2bcd^2+b^2f^2}};$$

$$\text{Sin.}\psi=\frac{c\sqrt{2bcd^2-b^2f^2}}{b^2}.$$

105. Ayant ainsi trouvé les anomalies excentriques x, x' moyennant $x'=\varphi+\psi$ et $x=\varphi-\psi$, on passera aux anomalies vraies φ et φ', moyennant les équations connues

$$\text{Sin.}\varphi=\frac{\text{Cos.}x\text{Sin.}\mu}{1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x},\quad \text{Cos.}\varphi=\frac{\text{Cos.}x+\text{Sin.}\mu}{1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x},$$

et par conséquent

$$\text{Tang.}\varphi=\frac{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x+\text{Sin.}\mu},$$

ou bien

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\varphi=\text{Tang.}(45^\circ-\tfrac{1}{2}\mu)\text{Tang.}\tfrac{1}{2}x$$

106. Connaissant l'anomalie vraie φ, on aura, pour déterminer l'angle ε que fait la ligne des apsides avec celle des nœuds, les équations suivantes, parmi lesquelles on peut choisir,

$$\text{Cos.}(\varepsilon+\varphi)=\frac{P\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}x}=\frac{P\text{Cos.}\varphi}{\text{Cos.}x+\text{Sin.}\mu},$$

$$\text{Sin.}(\varepsilon+\varphi)=\frac{Q\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\mu\text{Sin.}x}=\frac{Q\text{Cos.}\varphi}{\text{Cos.}x+\text{Sin.}\mu}.$$

107. Reste donc à déterminer le seul angle η qui fixe l'instant du passage par le périhélie, et qui sera la seule inconnue de l'une quelconque des trois équations

$$\frac{p}{q}(\theta-\delta-\eta)=\varkappa+\text{Sin}.\mu\text{Sin}.\varkappa\ ,$$

ou

$$(\theta-\delta-\eta)\sqrt{n^3}=\varkappa+\text{Sin}.\mu\text{Sin}.\varkappa\ ,$$

$$(\theta'-\delta-\eta)\sqrt{n^3}=\varkappa'+\text{Sin}.\mu\text{Sin}.\varkappa'\ ,$$

$$(\theta''-\delta-\eta)\sqrt{n^3}=\varkappa''+\text{Sin}.\mu\text{Sin}.\varkappa''\ .$$

108. Dans cet exposé, on a pris pour exemple la première et la seconde observation, qui ont conduit aux anomalies excentriques $\varkappa$ et $\varkappa'$, et de là aux anomalies vraies φ et φ'. On pouvait employer de même la seconde et la troisième observations, par le moyen desquelles on aurait déterminé les anomalies excentriques $\varkappa'$ et $\varkappa''$, lesquelles auraient conduit ensuite aux anomalies vraies φ et φ'. Les valeurs de l'excentricité μ, du rapport des deux axes $\frac{a}{b}$, de l'angle ε, aussi bien que de l'angle η, qui détermine l'instant du passage par le périhélie, doivent être les mêmes, d'après les deux procedés, avec une petite difference, commune à toutes les méthodes proposées jusqu'ici, et qui vient de ce que nous avons supposé les rayons vecteurs de l'orbite terrestre sensiblement égaux, pendant l'intervalle qui sépare trois observations; que de plus nous avons supposé les differences angulaires $\varkappa'-\varkappa$, $\varkappa''-\varkappa'$ sensiblement égales à leurs sinus respectifs; et qu'enfin nous avons supposé $h\text{Sin}.t-t\text{Sin}.h$ et $h\text{Sin}.t'-t'\text{Sin}.h$ l'une et l'autre évanouissantes. Nous nous réservons d'enseigner, dans un mémoire suivant, les moyens les plus expéditifs que fournit l'analise, pour faire disparaître ce reste d'erreur; et, en même temps, nous essayerons de faire usage d'observations moins rapprochées entre elles. Nous terminerons le mémoire actuel, en appliquant notre méthode à quelques exemples; et, dans cette vue, nous choisirons la seconde comète que Méchain à découverte en 1781, et qu'il a observée pendant les mois d'*octobre*, de *novembre* et de *décembre*. Il en a calculé l'orbite, supposée *Parabolique*, d'après la méthode de Laplace; il a trouvé ainsi

Le lieu du nœud ascendant, ou l'angle $\delta = 77.^\circ\ 22'\ 55''$,

L'inclinaison de l'orbite, ou l'angle $\beta = 27.^\circ\ 12'\ 4''$.

Nous ferons l'évaluation de ces mêmes angles, d'après notre méthode, laquelle nous apprendra, en même temps, si l'orbite est *Parabolique*, *Elliptique* ou bien *Hyperbolique*.

109. Des cinq observations de Méchain, faites en *novembre*, nous choisirons celles du 14, du 19 et du 25 novembre. Elles sont toutes rapportées à la même heure du jour, savoir à 8 heures 29′ 44″, temps moyen de Paris : ce qui fournit, pour les neuf élémens de notre analise, les valeurs angulaires qui suivent :

Longitudes de la terre, vue du soleil, ou angles θ, θ' θ'',

$$\left.\begin{aligned} \theta &= 52.^\circ\ 53'\ 50'', \\ \theta' &= 57.^\circ\ 57'\ 4'', \\ \theta'' &= 64.^\circ\ 1'\ 32''; \end{aligned}\right\} \text{donc} \left\{\begin{aligned} t &= 5.^\circ\ 3'\ 14'' = 18194'', \\ t' &= 6.^\circ\ 4'\ 28'' = 21868'', \\ h &= 11.^\circ\ 7'\ 42'' = 40062''. \end{aligned}\right.$$

Longitudes géocentriques de la comète, ou angles A, A', A'';

$$\left.\begin{aligned} A &= 307.^\circ\ 14'\ 45'', \\ A' &= 306.^\circ\ 51'\ 26'', \\ A'' &= 306.^\circ\ 41'\ 37''; \end{aligned}\right\} \text{donc} \left\{\begin{aligned} \theta - A &= -254.^\circ\ 20'\ 55'', \\ \theta' - A' &= -248.^\circ\ 54'\ 22'', \\ \theta'' - A'' &= -242.^\circ\ 40'\ 5''. \end{aligned}\right.$$

Latitudes géocentriques de la comète, ou angles B, B', B'';

$$\begin{aligned} B &= 55.^\circ\ 17'\ 9'', \\ B' &= 39.^\circ\ 14'\ 48'', \\ B'' &= 29.^\circ\ 58'\ 43''. \end{aligned}$$

110. On en tire la liste des logarithmes qui suivent.

Logarithmes des Sin. et Cos. des longitud. Géocent.

$$\begin{aligned} &\text{Log.Sin.}A = 9{,}9009382, && \text{Log.Cos.}A = 9{,}7819249, \\ &\text{Log.Sin.}A' = 9{,}9031620, && \text{Log.Cos.}A' = 9{,}7780232, \\ &\text{Log.Sin.}A'' = 9{,}9040889, && \text{Log.Cos.}A'' = 9{,}7763639. \end{aligned}$$

Les sinus des longitudes sont *négatifs*.

Log. des Sin. et Cos. des Long. de la terre, vue du soleil;

$$\text{Log.Sin.}\theta = 9{,}9077605\ ,\quad \text{Log.Cos.}\theta = 9{,}7804949\ ,$$
$$\text{Log.Sin.}\theta' = 9{,}9281887\ ,\quad \text{Log.Cos.}\theta' = 9{,}7248022\ ,$$
$$\text{Log.Sin.}\theta'' = 9{,}9537546\ ;\quad \text{Log.Cos.}\theta'' = 9{,}6414446\ .$$

Log. des trois différences Ang. t, t′, h *et de leur Sin.*

$$\text{Log.}t = 8{,}9455031\ ,\quad \text{Log.Sin.}t = 8{,}9449397\ ,$$
$$\text{Log.}t' = 9{,}0253840\ ,\quad \text{Log.Sin.}t' = 9{,}0245700\ ,$$
$$\text{Log.}h = 9{,}2883075\ ;\quad \text{Log.Sin.}h = 9{,}2855735\ .$$

Il en résulte

$$h\text{Sin.}t - t\,\text{Sin.}h = 0{,}0000853\ ,$$
$$h\text{Sin.}t' - t'\text{Sin.}h = 0{,}0000907\ ;$$

On peut donc regarder ces deux différences comme évanouissantes.

Log. des Cot. des trois Lat. Géoc. B, B′, B″, *et des prod. Sin.*$(\theta-\text{A})$*Cot.*B, ...;

$$\text{Log.Cot.}B = 9{,}8406070\ ,\quad \text{Log.Sin.}(\theta - A)\text{Cot.}B = 9{,}8241976\ ,$$
$$\text{Log.Cot.}B' = 0{,}0878113\ ,\quad \text{Log.Sin.}(\theta' - A')\text{Cot.}B' = 0{,}0576892\ ,$$
$$\text{Log.Cot.}B'' = 0{,}2389351\ ,\quad \text{Log.Sin.}(\theta'' - A'')\text{Cot.}B'' = 0{,}1875247\ .$$

Log. des prod. désignés par a, b, c, a′, b′, c′; (90)

$$\text{Log.}a = 9{,}6225319\ ,\quad \text{Log.}a' = 9{,}7415452\ ,$$
$$\text{Log.}b = 9{,}8658345\ ,\quad \text{Log}\,b' = 9{,}9909733\ ,$$
$$\text{Log.}c = 0{,}0152990\ ;\quad \text{Log.}c' = 9{,}1430240\ .$$

Les produits a', b', c' sont *négatifs*.

Valeurs des quantités m, n, o, m′, n′, o′ *et de leurs logarithmes.*

$$m = -0{,}3454160\ ,\quad m' = -0{,}3349471\ ,$$
$$n = -0{,}6285206\ ,\quad n' = -0{,}6368338\ ,$$
$$o = -0{,}2786088\ ;\quad o' = -0{,}3170086\ .$$

Log.

$\text{Log.}m = 9{,}5383425$, $\quad \text{Log } m' = 9{,}5249762$,

$\text{Log.}n = 9{,}7983194$, $\quad \text{Log } n' = 9{,}8040262$,

$\text{Log.}o = 9{,}4449948$; $\quad \text{Log. } o' = 9{,}5010711$.

Valeurs des coefficiens D, E, F, G, H, D′, E′, F′, G′, H′; (91)

$D = -0{,}0259450$, $\quad D' = +0{,}0038155$,

$E = -0{,}0141056$, $\quad E' = +0{,}0123514$,

$F = +0{,}0449740$, $\quad F' = +0{,}0354211$,

$G = +0{,}0747632$, $\quad G' = +0{,}0059353$,

$H = +0{,}0261437$; $\quad H' = -0{,}0237557$.

Valeurs numériques des produits nécessaires au calcul des coefficiens (93);

Ils ont été tous multipliés par la neuvième puissance de *dix*.

$DF' = -919000$, $\quad EF' = -499636$,

$D'F = +171598$, $\quad E'F = +553497$,

$DG' = -153991$; $\quad EG' = -\ 83721$,

$D'G = +285259$, $\quad E'G = +923430$,

$DH' = +616342$, $\quad EH' = +335088$,

$D'H = +\ 99751$; $\quad EH' = +322911$.

Différences de ces produits, servant à l'équation finale en ϑ;

$DF' - D'F = -1090598$, $\quad EF' - E'F = -1055128$,

$DG' + D'G = -\ 439250$, $\quad EG' - E'G = -1007151$,

$DH' - D'H = +\ 516591$, $\quad EH' - E'H = +\ 12177$, *Équation finale faisant connaître* ☊ ;

$$
\begin{aligned}
0 = & \ 1090598 \\
& -1494378 \,\text{Tang.}\,\text{☊} \\
& +\ 490560 \,\text{Tang.}^2\text{☊} \\
& +\ \ 12177 \,\text{Tang.}^3\text{☊} \ .
\end{aligned}
$$

La seule racine réelle de cette équation fait connaître la tangente de l'angle ☊ ; il sera égal à 91.° 19′ 37″ : c'est la longitude du nœud.

De là on passera à l'inclinaison de l'orbite ou l'angle β ; les deux formules (92) s'accordent à donner

$$\beta = 152.^\circ 11' \ 56'' \ .$$

$$180.^\circ - \beta = \ 27.^\circ 48' \ \ 4'' \ ,$$

112. Mettons à côté les résultats de la *Méthode de* LAPLACE, pour laquelle on a employé les observations , beaucoup plus éloignées des 9 octobre , 17 novembre et 20 décembre , en admettant toutefois la supposition peu rigoureuse , et même très-peu probable du mouvement parabolique. Elle a donné

$$\text{☊} = 77.^\circ \ 22. \ 55'' \ ,$$

$$180.^\circ - \beta = 27.^\circ \ 12' \ \ 4'' \ . \ (*)$$

(*) Voyez *Astronomie de Biot* , 2.ᵉ édit. , tom. III , additions , pag. 202. Dans sa *Cométographie* , tom. II , pag. 108 , Pingré , d'après Méchain , avait donné

$$\text{☊} = 77.^\circ \ 22' \ 52'' \ ,$$

$$180.^\circ - \beta = 27.^\circ \ 13' \ \ 8'' \ .$$

J. D. G.

113. Ayant déterminé ainsi la position de l'orbite, il faudra passer à l'évaluation des quantités P, P', P'', Q, Q', Q'', toutes multipliées par le facteur inconnu $\frac{a}{b}$, ou divisées par n, en faisant usage des formules (76). En supprimant ce facteur qui est commun à tous, on aura

$$\begin{aligned} P &= 0.5493415, & Q &= 0.8942916, \\ P' &= 0.3727041, & Q' &= 0.9951803, \\ P'' &= 0.1634109; & Q'' &= 0.1060116; \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned} P\,Q' - P'\,Q &= 0.2133547, \\ P'Q'' - P''Q' &= 0.2495918, \\ P\,Q'' - P''Q &= 0.4614411. \end{aligned}$$

Le rapport des deux premières différences s'écarte très-peu du rapport des temps ; de plus, la somme des deux premières est presque rigoureusement égale à la troisième dont elle ne diffère que de 0,0015. On a employé ici les valeurs angulaires trouvées (110), déduites des observations de 14, 19 et 22 novembre. En se servant de celles des 17, 19 et 22, on aurait eu

$$\begin{aligned} P\,Q' - P'\,Q &= 0.0588550, \\ P'Q'' - P''Q' &= 0.0883150, \\ P\,Q'' - P''Q' &= 0.1470228. \end{aligned}$$

La différence entre la troisième et la somme des deux autres n'est que de 0,00015.

114. Reste donc à déterminer le rapport n ou $\frac{a}{b}$ des axes, l'excentricité μ, l'angle ε de la ligne des apsides avec celle des nœuds,

et l'instant du passage au périhélie. Je me bornerai ici aux deux premiers. On trouve

$$n = -\frac{70871}{20750}\,.$$

Cette valeur négative de n, et conséquemment de b, indique une branche *hyperbolique*. Elle explique et justifie la différence entre nos résultats et ceux de Laplace, déduits de l'hypothèse parabolique. Le cosinus de μ deviendra donc imaginaire. Sin.μ sera une quantité réelle, mais plus grande que l'unité. On trouve en effet Log.Sin.μ=0,6609274 ; donc

$$\text{Sin.}\mu = 4\,.\,580652\ ;$$

$$1+\text{Sin.}\mu = 5\,.\,580652\ ,$$

$$1-\text{Sin.}\mu = 3\,.\,580652\ ;$$

on aura donc

Distance périhélie ou $-(1+\text{Sin.}\mu)b = 1{,}048364$,

Distance aphélie ou $-(1-\text{Sin.}\mu)b = 1{,}633934$.

La première, obtenue par la méthode de Laplace,

est 0,960995I ;

Différence avec la nôtre 0,087369 :

c'est un douzième du demi-grand axe de l'orbe terrestre.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Propriétés des diamètres conjugués de l'ellipsoïde ;

Par M. GERGONNE.

SOIENT a, b, c les trois demi-diamètres principaux d'un ellipsoïde, pris pour axe des coordonnées. Soient ensuite (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') les extrémités de trois autres demi-diamètres quelconques ; on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1\,,\\ \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}&=1\,,\\ \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}&=1\,;\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Si l'on veut, en outre, que les nouveaux demi-diamètres soient conjugués les uns aux autres, il faudra exprimer de plus que le plan tangent à l'extrémité de chacun est, à la fois, parallèle à chacun des deux autres ; ce qui donnera encore

$$\left.\begin{aligned}\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+\frac{z'z''}{c^2}&=0\,,\\ \frac{x''x}{a^2}+\frac{y''y}{b^2}+\frac{z''z}{c^2}&=0\,;\\ \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}&=0\,;\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

En posant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{x}{a}=X\,, & \dfrac{y}{b}=Y\,, & \dfrac{z}{c}=Z\,,\\[2mm] \dfrac{x'}{a}=X'\,, & \dfrac{y'}{b}=Y'\,, & \dfrac{z'}{c}=Z'\,,\\[2mm] \dfrac{x''}{a}=X''\,, & \dfrac{y''}{b}=Y''\,, & \dfrac{z''}{c}=Z''\,,\end{array}\right\}\quad(3)$$

ces équations deviendront

$$\left.\begin{array}{l}X^2+Y^2+Z^2=1\,,\\ X'^2+Y'^2+Z'^2=1\,,\\ X''^2+Y''^2+Z''^2=1\,;\end{array}\right\}(4)\qquad \left.\begin{array}{l}X'X''+Y'Y''+Z'Z''=0\,,\\ X''X+Y''Y+Z''Z=0\,,\\ XX'+YY'+ZZ'=0\,.\end{array}\right\}(5)$$

Or, il est connu, par la théorie de la transformation des coordonnées dans l'espace (*), que, lorsqu'on a de telles relations entre des quantités, on a aussi entre elles les relations suivantes

$$\left.\begin{array}{l}X^2+X'^2+X''^2=1\,,\\ Y^2+Y'^2+Y''^2=1\,,\\ Z^2+Z'^2+Z''^2=1\,;\end{array}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{array}{l}(YZ'-ZY')^2+(Y'Z''-Z'Y'')^2+(Y''Z-Z''Y)^2=1\,,\\ (ZX'-XZ')^2+(Z'X''-X'Z'')^2+(Z''X-X''Z)^2=1\,,\\ (XY'-YX')^2+(Y'X''-X'Y'')^2+(X''Y-Y''X)^2=1\,;\end{array}\right\}(7)$$

$$XY'Z''-XZ'Y''+ZX'Y''-YX'Z''+YZ'X''-ZY'X''=1.\quad(8)$$

En remettant, dans ces relations, les valeurs des symboles qu'elles

(*) Voyez entre autres le tome 1.er du *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix; page 450 de la 1.re édition, et page 528 de la 2.e renferment, données par les équations (3), et chassant les dénominateurs, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x'^2+x''^2=a^2\ , \\ y^2+y'^2+y''^2=b^2\ , \\ z^2+z'^2+z''^2=c^2\ ; \end{array}\right\}(9)$$

$$\left.\begin{array}{l} (yz'-zy')^2+(y'z''-z'y'')^2+(y''z-z''y)^2=b^2c^2\ , \\ (zx'-xz')^2+(z'x''-x'z'')^2+(z''x-x''z)^2=c^2a^2\ , \\ (xy'-yx')^2+(x'y''-y'x'')^2+(x''y-y''x)^2=a^2b^2\ ; \end{array}\right\}(10)$$

$$xy'z''-xz'y''+zx'y''-yx'z''+yz'x''-zy'x''=abc\ . \qquad (11)$$

Si maintenant on désigne par a', b', c' les trois demi-diamètres conjugués dont il s'agit, et par α, β, γ les angles qu'ils forment deux à deux respectivement ; il est aisé de voir qu'on aura

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=a'^2\ , \\ x'^2+y'^2+z'^2=b'^2\ , \\ x''^2+y''^2+z''^2=c'^2\ ; \end{array}\right\}(12)$$

$$\left.\begin{array}{l} (y\,z'-z\,y')^2+(z\,x'-x\,z')^2+(x\,y'-y\,x')^2=a'^2b'^2\text{Sin.}^2\gamma, \\ (y'\,z''-z'\,y'')^2+(z'\,x''-x'\,z'')^2+(x'\,y''-y'\,x'')^2=b'^2c'^2\text{Sin.}^2\alpha, \\ (y''z-z''y)^2+(z''x-x''z)^2+(x''y-y''x)^2=c'^2a'^2\text{Sin.}^2\beta\ ; \end{array}\right\}(13)$$

$$\begin{array}{c} xy'z''-xz'y''+zx'y''-yx'z''+yz'x''-zy'x'' \\ =abc\sqrt{1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma}\ . \end{array} \qquad (14)$$

Comparant alors la somme des équations (12) à la somme des équations (9), puis la somme des équations (13) à celle des équations (10) et enfin l'équation (14) à l'équation (11), il viendra

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2\ ,$$

$$b'^2c'^2\text{Sin.}^2\alpha+c'^2a'^2\text{Sin.}^2\beta+a'^2b'^2\text{Sin.}^2\gamma=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\ ,$$

$$a'^2b'^2c'^2(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=a^2b^2c^2.$$

Ces relations sont connues (*) ; mais je ne sache pas qu'on y soit parvenu jusqu'ici d'une manière si simple et si directe.

Le même procédé, qui peut être facilement appliqué à toutes les surfaces du second ordre qui ont un centre, s'applique avec la plus grande facilité aux courbes planes du même ordre.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'architecture.

La base et la montée d'une anse de panier à $2n+1$ centres étant donnés ; construire l'anse de telle sorte que son perimètre ou que l'aire comprise entre elle et sa base soit un *maximum* ou un *minimum* ?

Il est entendu que la courbure aux naissances doit être perpendiculaire sur la base.

Problèmes de Géométrie.

I. Trois cercles tracés sur un même plan, étant tels que chacun d'eux touche les deux autres ; trouver le rayon du cercle qui passe par leurs trois points de contact, en fonction des rayons de ces trois cercles ?

II. Quatre sphères étant tellement situées que chacune d'elles touche à la fois les trois autres ; démontrer que leurs points de contact deux à deux sont tous six sur une même sphère, et déterminer le rayon de cette sphère en fonction des rayons des sphères données ?

(*) Voyez la page 113 du 3.e volume de ce recueil.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

Expériences sur la flexibilité, la force et l'élasticité des bois, avec des applications aux constructions, en général, et spécialement à la construction des vaisseaux,

Faites à l'arsenal de la marine française à Corcyre en 1811;

Par Ch. Dupin, *capitaine en premier au corps du génie maritime.*

Premier mémoire,

Présenté à la première classe de l'institut de France, le 12 d'avril 1813. (*)

C'est en parcourant un arsenal de marine que Galilée, frappé des grands travaux qui s'offraient à ses regards, conçut l'idée d'appliquer les sciences mathématiques à la détermination de la force des bois.

C'est donc sur nos chantiers et dans nos ateliers qu'est née l'application du calcul aux travaux des arts. Il semble en effet que ce soit là qu'elle ait dû naître; car, nulle part des ouvrages plus importans ne sont exécutés par de plus grands moyens, avec une précision plus rigoureuse, et dans un moindre espace de temps.

(*) Sur le rapport de MM. Carnot, Prony et Sané rapporteur, ce mémoire a obtenu l'approbation de la classe le 19 de juillet 1813. Il doit paraître dans le cahier du journal de l'école polytechnique qui est actuellement sous presse.

Après que Galilée eut ouvert ainsi la carrière, elle fut parcourue par les savans les plus illustres; dès qu'il y eut un premier germe de théorie dans les arts, la théorie forma des ingénieurs. C'est alors que la partie expérimentale a fait des progrès plus sensibles, et qu'on a remplacé plus généralement l'hypothèse et le système par des données fruits de l'expérience, et par des calculs rigoureux fondés seulement sur ces données.

Sans retracer ici l'histoire des travaux dont nous venons de parler, nous nous contenterons de citer la savante préface d'un traité sur la résistance des solides, qu'on doit à l'ingénieur Girard qui, lui-même, a fait de nombreuses et belles expériences sur la force des bois.

Jusqu'ici, l'on a cherché principalement à déterminer la résistance dont les bois sont susceptibles avant leur rupture, soit en les rompant perpendiculairement à leurs fibres, soit en les affaissant sous des poids qui agissaient dans le sens même de ces fibres.

Sans doute, il est nécessaire de connaître ce point extrême, cette limite de la force des bois, afin d'employer toujours des matériaux doués d'une force plus grande que tous les efforts auxquels ils devront résister, dans les constructions et dans les machines où ils entreront comme élémens; mais il faut toujours se tenir assez loin de cette limite; et, lorsqu'on veut faire des travaux durables, il faut s'en tenir bien plus loin encore; car le temps diminue incessamment la force des bois, et mille causes concourent à détériorer leurs qualités primitives.

Il est un autre genre de recherches non moins utile, plus utile peut-être, et qui cependant me semble avoir été le moins suivi; c'est de déterminer les résistances comparées des bois, lorsqu'on les soumet à des forces capables d'altérer très-peu leur figure, et de trouver, si je puis m'exprimer ainsi, *leur résistance virtuelle.*

Lorsque nous construisons nos édifices, nos machines, nos vaisseaux, nous supposons que les pièces d'une dimension considérable, et d'ailleurs peu chargées, conservent la figure qu'un dessin rigoureux leur a donnée : il n'en est rien. Dans la nature, les moindres forces ont leurs effets certains, quoique par fois trop petits pour tomber sous nos sens ; et souvent ces effets, insensibles individuellement, s'accumulent au point de produire les résultats les plus marqués et les plus graves : nous n'en citerons qu'un seul exemple.

Le plus grand édifice que nous puissions construire en charpente est sans contredit un vaisseau, tel qu'il le faut aujourd'hui pour entrer en ligne dans nos escadres. Lorsqu'un vaisseau du premier rang est établi sur les chantiers, ses dernières alonges s'élèvent au-dessus du faîte des plus hautes maisons. Il doit loger mille hommes et au-delà, renfermer leurs vivres pour six mois, et toute l'artillerie d'une place forte de seconde classe. Aussi la solidité de sa construction répond-elle à l'immensité des objets qu'il doit contenir. Nous avons nommé *murailles* ses parois en charpente ; et leur épaisseur est en effet au moins égale à celle des murs extérieurs de nos maisons ordinaires. Les liaisons, les supports en tous genres y sont combinés avec intelligence ; le cuivre, le fer y sont prodigués pour maintenir l'ensemble de toutes les parties. Qui douterait qu'avec des moyens si puissans et si bien disposés, la forme du vaisseau ne se trouvât assurée d'une manière invariable ? cependant cela n'est pas. A peine est-il lancé sur la mer, que, d'une part l'inégale réaction produite dans un sens par les poids accumulés vers les extrémités, et de l'autre la répulsion de l'eau, concentrée vers le milieu, courbent à la fois toute cette grande machine, et font former à ses parties des arcs qui, sur une corde de soixante mètres, ont présenté quelquefois un demi-mètre de flèche, et au-delà.

Une telle déformation est énorme sans doute ; elle change puissamment la stabilité du vaisseau ; elle influe sur toutes ses autres qualités. Cependant, si nous voulions savoir quelle serait la flèche d'un arc ayant deux mètres de corde, et ayant d'ailleurs la courbure que nous venons d'indiquer, nous trouverions que le nouvel arc devrait avoir pour flèche moins de *deux dixièmes de millimètres*, c'est-à-dire, une grandeur presque insensible, sur une longueur au moins égale à notre plus haute stature.

C'est donc cette altération à peine sensible des bois que je me suis premièrement proposé d'apprécier. C'est leur résistance à tout changement d'état, au moment où cette résistance commence à faire sentir ses effets, c'est-à-dire, lorsque les corps altèrent infiniment peu leur forme, en vertu des poids qu'ils supportent, que j'ai eu en vue d'évaluer.

On verra peut-être avec quelque intérêt que les lois et les anomalies observées dans les expériences faites en grand sur la rupture des bois, c'est-à-dire, au point où leur déformation est la plus grande possible, ne sont que la conséquence nécessaire des variations extrêmement petites que leurs moindres flexions offrent à l'observateur. C'est à peu près ainsi que les fonctions intégrales dérivent des lois qui coordonnent les élémens différentiels de ces mêmes fonctions, et peuvent en être rigoureusement déduites.

Je vais maintenant passer au détail de mes expériences. Sur un grand établi, j'ai fait fixer deux supports horizontaux et de niveau, distants entre eux de deux mètres; j'ai fait donner la forme d'un parallélipipède à des morceaux de chêne, de cyprès, de hêtre et de sapin ou de pin, seuls bois dont je pouvais disposer.

Ces parallélipipèdes, ayant un peu plus de deux mètres, étaient posés tour à tour sur les supports, dont ils mesuraient la plus courte distance, en dépassant très-peu de chaque côté; assez seulement pour que la pièce, en prenant de la courbure, ne se racourcît pas au point de tomber entre les appuis.

J'ai chargé ces parallélipipèdes, que j'appellerai simplement des règles, par des poids placés à égale distance entre les deux supports; alors chaque règle a pris une certaine courbure.

Premièrement, il est évident que la règle a dû se plier suivant une courbe plane verticale. Secondement, la courbe formée par chaque arête de la règle est symétrique à droite et à gauche, par rapport au plan vertical mené par le point milieu où la charge est appliquée, et perpendiculairement au plan même de la flexion.

Voilà la courbe dont nous avons voulu déterminer les élémens; nous avons toujours considéré la face concave de la règle pliée.

Or, dans les nombreuses expériences que nous avons faites, nous avons constamment observé que, quand les poids sont peu considérables, les flèches des arcs formés par la règle pliée sont proportionnelles à ces poids mêmes.

Mais, quand les flèches sont très-petites, par rapport à la corde constante de plusieurs arcs, la courbure de ces arcs est directement proportionnelle aux flèches correspondantes : de là j'ai conclu ce premier théorème, auquel avait déjà conduit la théorie.

La flexion des bois produite par des poids très-petits est proportionnelle à ces poids; en mesurant cette flexion par la flèche de leur arc, c'est-à-dire, par l'abaissement ou la descension du point milieu de la règle.

Donc aussi, lorsqu'une même pièce de bois est chargée entre les mêmes appuis par des poids différens, ces poids sont réciproquement proportionnels au rayon de courbure de la règle à son point milieu, et la courbure elle-même est par conséquent proportionnelle à ces poids très-petits.

Après avoir ainsi déterminé le rapport de la force virtuelle de la flexion avec le poids qui produit cette flexion, il convenait de voir si la même loi se conserve, en chargeant le corps par des poids plus considérables; ou, si elle ne se conserve pas, quelle est l'altération que cette loi supporte : c'est ce que j'ai fait, avec beaucoup de soin et de patience, en employant un *double décimètre* de KUTSCH, parfaitement gradué. L'habitude de prendre des mesures, que j'ai depuis long-temps été forcé d'acquérir, me fait assurer que toutes celles que j'ai consignées dans mon travail ne diffèrent par de deux dixièmes d'un millimètre de leur vraie valeur. Cette quantité, toute faible qu'elle est, a paru cependant trop forte encore aux yeux d'un géomètre (*) qui porte dans la physique une précision inconnue

(*) L'auteur de l'*Astronomie physique*.

jusqu'ici. Mais observons qu'il est, dans chaque genre de recherches, un degré d'exactitude qu'il serait aussi impossible que superflu de vouloir outre-passer. C'est ainsi qu'il m'aurait fallu des ébénistes pour polir mes bois, si j'avais voulu, par exemple, que leurs faces fussent planes, à moins d'un demi-dixième ou même d'un dixième de millimètre près. Observons encore que deux dixièmes de millimètre équivalent à l'ancienne mesure appelée *point* : telle est la limite de mes erreurs.

J'ai pris les quatre espèces de bois les plus généralement employées dans les arts : ce sont celles que j'ai déjà nommées. Le chêne et le sapin étaient coupés depuis peut-être vingt-cinq ans ; puisqu'ils provenaient du vaisseau russe *le Michaël*, que j'ai démoli en 1810, et qui avait peut-être alors vingt ans de construction.

Aussi ces bois sont-ils loin d'avoir la force qui leur appartient. Mais, comme il s'agit ici de déterminer les lois qui régissent la force et l'élasticité des bois, par des rapports généraux et indépendans de la vigueur absolue des fibres ligneuses, et même indépendans du genre et de l'espèce des arbres, on voit que ces bois étaient aussi propres à remplir notre objet que s'ils eussent été de fraiche coupée. Au reste, le cyprès et le hêtre n'avaient guère plus d'un an d'abattage, et leur élasticité nous a présenté les mêmes propriétés que les bois que nous venons de dire avoir vingt-cinq ans de coupe : ce qui démontre notre assertion jusqu'à l'évidence.

On a travaillé quatre parallélipipèdes ayant, comme nous l'avons dit, quelque chose de plus que deux mètres de longueur ; on leur a donné trois centimètres d'équarrissage ; ensuite on a placé successivement chaque règle sur les appuis, et on l'a chargée, sur son milieu par 4 kilogrammes, puis par 8, 12, 16,..., jusqu'à 28 kilogrammes. A notre travail sont joints des tableaux qui font connaître 1.° les flèches de l'arc pris par les règles ; 2.° les différences premières de ces flèches.

En jetant les yeux sur ces tableaux, on voit d'abord que 8 kilogrammes font plier la règle du double seulement de la flexion produite par 4 kilogrammes, ce qui nous fait voir qu'au-dessous de ces deux charges les différences secondes deviennent trop petites pour être appréciées. Ce résultat concorde avec ceux d'où nous avons déduit le premier théorème.

Je remarque ensuite que, dans les tableaux de tous les bois, du chêne, du cyprès, du hêtre et du sapin, les différences premières des flèches vont toujours en augmentant.

Elles offrent, il est vrai, quelques légères anomalies; mais, immédiatement après une différence trop faible, s'en présente une en sens contraire qui la surpasse beaucoup plus; et, comme les erreurs ne portent que sur des *dixièmes de millimètres*, je ne doute pas qu'en employant des bois travaillés avec la dernière perfection, et en recourant à des moyens d'observer que je n'avais pas à ma disposition, on n'obtienne des résultats plus exacts, et tels que les différences secondes soient constantes, ou du moins n'éprouvent que des variations tout à fait insensibles.

Ainsi, nous pouvons regarder les différences secondes des dimensions comme constantes, lorsque les poids qui chargent une même pièce croissent par différences premières constantes, et cette loi si simple est pourtant tellement concordante avec l'expérience que, si nous formons, pour le chêne par exemple, le développement régulier des termes qu'elle exprime, les résultats ne différeront jamais des observations de quatre dixièmes de millimètre; et la flexion totale à laquelle nous arriverons est cependant de 406 de ces dixièmes. Il est facile d'expliquer cette légère anomalie.

La règle, en se courbant, forme un arc plus long que sa corde; il faut donc, lorsqu'elle se plie, qu'elle glisse plus ou moins sur ses appuis. Mais ces appuis étaient de simples arêtes en bois, travaillé proprement, à la vérité, mais sans beaucoup d'art; les alongemens ont dû se faire, non d'une manière continue, mais par de petits ressauts plus ou moins sensibles. Qu'on se rappelle toujours que nous étions dans un pays où tout manquait, jusqu'à des balances assez précises pour pousser l'exactitude au-delà des dix millièmes ; si même elles y arrivaient, et l'on verra qu'aucune des petites différences de l'observation et du calcul n'est au-delà de la limite totale de la justesse des opérations.

Nous avons voulu voir ensuite le résultat des mêmes formules pour la charge, très-considérable, de 80 kilogrammes. En comparant nos résultats avec ceux obtenus pour une charge de 4 kilogrammes seulement, nous avons reconnu que, proportion gardée, le cyprès a le moins de flèche sous la grande charge, ensuite le chêne, puis le sapin, enfin le hêtre.

De là nous tirerons cette conséquence remarquable ; *Quand même la résistance virtuelle d'une espèce de bois serait très-forte* ; *si les différences secondes étaient considérables pour cette espèce, avec une charge assez grande, ce bois finirait par plier plus que celui d'une autre espèce, dont la résistance virtuelle à la flexion serait cependant plus petite.*

On sait qne le hêtre est éminemment élastique ; le tourneur en fait l'arc qui sert de régulateur à son tour. Dans la marine, les meilleurs avirons, ceux qui supportent sans se rompre les efforts les plus grands, les chocs les plus brusques, sont les avirons de hêtre. C'est que les différences secondes pour le hêtre étant considérables, cette grande flexion dont le hêtre est susceptible, avec des charges données, lui permet de céder à des chocs brusques, et le rend peu cassant.

Remarquons, au contraire, que le cyprès, peu flexible et très-cassant, a ses différences secondes presque insensibles : elles ne sont pas le tiers de celles du hêtre.

J'ai déterminé les pesanteurs spécifiques des quatre espèces de bois soumises aux expériences précédentes, l'ordre de ces pesanteurs est aussi celui des résistances à la flexion.

De là résulte cette conséquence importante : *De deux vaisseaux dont la charpente sera d'égal volume, celui construit avec le bois le plus pesant prendra moins d'arc ou de courbure, que celui construit avec*

avec le bois le plus léger. Car, toutes choses égales d'ailleurs, l'arc des vaisseaux est proportionnel à la flexibilité virtuelle.

Ainsi, les vaisseaux de la Baltique et de la Hollande doivent prendre plus d'arc que ceux de la Méditerranée.

Mais, d'après les mêmes calculs, *De deux vaisseaux dont la charpente a le même poids, et qui sont construits en bois différens, le vaisseau construit avec le bois le plus léger sera celui dont l'arc sera le moins considérable, et qui conséquemment présentera la plus grande solidité.*

Le célèbre Don G. Juan paraît avoir entrevu cette vérité, puisqu'il voudrait que l'on construisît les vaisseaux avec les plus légers des bois, les bois résineux, et non plus avec le chêne.

Au reste, toutes les expériences précédentes, en offrant les élémens de la résistance virtuelle, donneront les moyens de calculer et par là d'obtenir des résultats comparables, sans en venir aux expériences coûteuses de la rupture des pièces. Par ce moyen, on connaîtra mieux les qualités des bois qui conviennent aux divers travaux des arts en général, et sur-tout des constructions navales; et on pourra fixer les dimensions des pièces de chaque navire d'une manière moins arbitraire. Ces opérations, plus éclairées, conduiront à des résultats avantageux.

Dans le port où je dois me rendre incessamment, j'espère pouvoir déterminer les élémens des forces virtuelles des bois, mesurés sur des pièces parfaitement saines, et non plus sur des bois usés, tels que ceux dont je pouvais disposer à Corcyre. Si la classe prend quelque intérêt à ces recherches, j'aurai l'honneur de lui en communiquer les résultats.

Les ingénieurs de la marine agitent en ce moment une question importante. On sait qu'autrefois la mâture de nos vaisseaux était faite avec des sapins, ou plutôt des pins du nord, parce que les rares qualités de ces bois les font rechercher de toutes les nations. Depuis long-temps les approvisionnemens de ce genre que possédaient nos arsenaux sont épuisés ou du moins tellement appauvris qu'il faut recourir à d'autres bois. On a proposé les sapins de la Toscane et les pins de la Corse. On a cru trouver en eux plus d'avantage que dans les anciens bois du nord, dont nous pouvons disposer encore ; et cela est vrai. Mais en ont-ils plus que les bois du nord dans leur fraîcheur ? voilà ce qui n'est point encore décidé.

Ensuite, il ne suffit pas de considérer la résistance à la rupture; la résistance à la flexion est aussi d'une considération très-importante. Car la flexion des mâts ne s'opérant que par l'alongement des cordages qui les soutiennent ; de deux mâts qui casseraient sous le même effort, celui qui plie le plus exige un plus grand alongement dans les cordages et par conséquent un plus grand effort de la part du vent. Donc aussi la force des cordages doit être dans une relation nécessaire avec la résistance que les mâts opposent à toute flexion.

Dans tous les cas, il faut déterminer les dimensions des mâtures suivant la nature des bois qu'on emploie, et l'on voit que les données dont nous avons parlé jusqu'ici, sont propres à répandre quelque jour sur ce beau problème.

Après avoir multiplié les expériences sur les pièces d'une seule et même forme, nous en avons considéré qui avaient des épaisseurs et des largeurs différentes, et nous sommes parvenus à ce résultat constant :

La résistance à la flexion est proportionnelle aux cubes des épaisseurs. Nous avons essayé de démontrer par la théorie cette vérité d'expérience.

Lorsqu'on plie un parallélipipède de bois, les fibres intérieures sont comprimées, et les fibres extérieures sont alongées ; de manière qu'il se trouve une fibre intermédiaire d'une longueur invariable ; et cette fibre est toujours la même, quelque courbure qu'on donne au parallélipipède.

Pour démontrer l'effet de l'alongement ou du raccourcissement des fibres, Duhamel imagina l'expérience la plus ingénieuse. Il scia par le milieu, et perpendiculairement à la direction des fibres, les trois quarts de l'épaisseur de la pièce, puis il enfonça dans le trait de la scie un coin fort mince, et d'un bois encore plus dur que le chêne. La pièce étant ensuite soutenue par les deux bouts, et la face où était le trait de scie étant en dessus, on chargea cette pièce par des poids; or, quoiqu'elle fût sciée aux trois quarts, un quart seul des fibres put résister par son extension; de manière que la pièce avait conservé toute sa force. Lorsque le trait de scie était moins avancé, la force était plus grande; elle était plus petite dans le cas contraire. Lorsqu'on aura déterminé par l'expérience la position précise de la fibre invariable, on voit, par ce que nous venons de dire, que rien ne sera plus facile que d'en conclure le rapport des forces nécessaires pour produire un alongement ou un raccourcissement déterminé des fibres d'une même pièce de bois : les expériences qui devront servir de base à ce calcul, offrent à faire une des plus belles recherches que puissent présenter les questions relatives à la force des bois.

Après avoir chargé les pièces par des poids uniques, je les ai chargées par des poids uniformément répartis sur toute leur longueur; et j'ai trouvé que, pour le même poids accumulé au milieu d'une pièce, ou réparti uniformément sur toute son étendue, les flèches ou descensions sont entre elles comme *dix-neuf* est à *trente*; et ce rapport se conserve le même, soit pour les bois d'une espèce différente, soit pour les bois de différentes dimensions.

Si donc on prend le poids d'une pièce prismatique pour unité, en doublant les trente dix-neuvièmes de la flèche qu'elle prend, lorsqu'on la soutient horizontalement par les deux bouts, on a la flèche qu'elle prendra lorsqu'on la chargera d'un poids égal au sien, mais accumulé au milieu. Ce principe donne un moyen simple de peser, sans balances, les bois très-lourds et très-longs, pourvu que leur épaisseur soit constante.

On voit, par ce que nous venons de dire, que rien ne sera plus facile que de considérer un poids unique chargeant une pièce par son milieu comme un poids uniformément réparti le long de cette pièce, et réciproquement : considération d'une fréquente utilité dans les arts.

J'ai déterminé enfin la flexion des pièces en fonction de la distance des appuis, et j'ai été conduit à ce résultat : *Deux pièces d'égal équarrissage se plient suivant des arcs dont les flèches sont proportionnelles aux cubes des distances des appuis.*

Rappelons-nous d'ailleurs qu'entre les mêmes appuis, les flèches sont réciproquement comme les cubes des épaisseurs.

En combinant ces deux principes avec cet autre que, pour des flexions peu considérables, les flèches sont directement proportionnelles aux charges, on arrive à ce résultat singulier :

Deux pièces de bois étant semblables, c'est-à-dire, ayant leurs dimensions homologues proportionnelles, et étant d'ailleurs supposées de la même espèce; en les soutenant par leurs extrémités, les flèches des arcs qu'elles prendront, en vertu de leur propre poids, seront directement proportionnelles aux quarrés des longueurs des pièces ; et par conséquent, *quelle que soit la grandeur absolue de ces pièces, elles prendront toutes un seul et même rayon de courbure.* La même chose aurait encore lieu, si l'on chargeait les pièces par des poids accumulés ou répartis, mais proportionnels au poids même de ces pièces.

Ce résultat paraît être de nature à s'appliquer souvent dans les constructions ; car les édifices de même nature ont ordinairement tous leurs élémens proportionnels. Si donc nous voulons comparer deux vaisseaux semblablement construits, avec les mêmes matériaux, dont les dimensions partielles soient ainsi proportionnelles à celles même de ces vaisseaux, nous en conclurons que *l'arc des vaisseaux, toutes choses égales d'ailleurs, doit avoir un seul et même rayon de courbure, quelle que soit leur grandeur absolue.*

On doit maintenant voir clairement pourquoi les grands vaisseaux, indépendamment de toute autre cause, ont proportionnellement beaucoup plus d'arcs que les petits navires : c'est que la flèche de ces arcs suit la loi des quarrés des dimensions principales du navire. Ainsi, dans le cas que nous avons déjà cité d'un navire de soixante mètres qui prendrait un demi-mètre d'arc, un petit navire d'un mètre de long, et semblable au premier, ne prendrait pour flèche de son arc qu'un trois mille six centièmes de demi-mètre, au lieu d'un soixantième, simple rapport des longueurs.

Jusqu'ici nous n'avons que la flèche de la courbe donnée par la flexion des bois, et la corde de cette courbe ou la distance des appuis. Après avoir attentivement examiné la forme offerte par cette courbe, et l'avoir rapportée, par la pensée, aux formes qui me sont le plus familières, j'ai jugé qu'elle devait très-peu différer d'une hyperbole; je l'ai supposée telle, et voici comment j'ai vérifié cette hypothèse.

J'ai pris une règle de sapin, dont la longueur excédait un peu deux mètres, et dont les autres dimensions étaient $0^m,1$ et $0^m,01$; je l'ai placée sur mes deux appuis, toujours éloignés de deux mètres l'un de l'autre; je l'ai fait courber, en chargeant son milieu, de manière à présenter une flèche de treize centimètres. Cette courbure est très-considérable; et j'ai voulu qu'elle fût telle, pour mieux observer les anomalies qui pourraient se présenter dans les relations hypothétiques que je cherchais à confirmer ou à détruire.

Une ligne droite horizontale, servant de corde à cet arc, et ayant par conséquent deux mètres m'a servi d'axe des abscisses. Je l'ai divisée en vingt parties égales. Par chaque point de division, j'ai tracé une ordonnée verticale qui allait jusqu'à la courbe; j'ai donc pu déterminer ainsi vingt-un points de cette courbe. J'avais pour plan de projection une planche parfaitement aplanie, que j'appliquai verticalement le long de la règle pliée, et sur laquelle j'ai tracé la courbe, sa corde et ses coordonnées. Ensuite j'ai relevé, avec tout le soin possible, les abscisses et les ordonnées de cette courbe; et, pour balancer les erreurs, je prenais la demi-somme des ordonnées symétriques, à droite et à gauche du milieu.

Pour déterminer mon hyperbole comparative, j'ai conçu une ligne de ce genre, dont l'axe réel serait vertical, et dirigé suivant la flèche de l'arc élastique; cette ligne d'ailleurs passant par les cinq points suivans : 1.° le point milieu de l'arc ; 2.° et 3.° les deux points d'appui ; 4.° et 5.° les deux points qui correspondent au milieu de chaque demi-corde, à droite et à gauche de la flèche; de manière que les cinq abscisses de ces points étaient : -1^m; $-0,5$; 0; $+0,5$; $+1^m$. A l'aide de ces données, rien n'est plus facile que de trouver l'hyperbole comparatrice; son équation se présente sous une forme extrêmement simple.

En rapprochant l'hyperbole comparatrice et la courbe élastique produite par la règle pliée, nous nous sommes assurés que, pour les mêmes abscisses, les plus grandes différences des ordonnées des deux courbes ne s'élèvent pas à *sept dixièmes de millimètre.*

Dans ces différences, il faut toujours comprendre deux dixièmes de millimètre pour les erreurs qui ont pu être commises, en mesurant à vue d'œil les dixièmes de millimètre ; l'on concevra alors que, sur une étendue de deux mille millimètres, et pour une courbure de 130 millimètres, ne pas trouver sept dixièmes de millimètre pour les plus grandes différences, c'est une identité qu'il est rare de rencontrer, même dans les résultats que la théorie démontre devoir être les mêmes. Nous pouvons donc conclure premièrement que, quelle que soit la courbe élastique produite par la flexion des bois entre deux points d'appui, il est permis de la confondre avec l'hyperbole, sans crainte d'erreurs appréciables dans la pratique, même dans les calculs où les approximations seraient poussées assez loin.

Faisons voir maintenant pour quelle raison la courbe élastique approche si fort de se confondre avec l'hyperbole. Lorsqu'une règle est pliée sur deux points d'appui, le long desquels elle peut glisser pour se mettre en équilibre avec les poids qui la chargent, il faut que l'effort produit au point d'appui par la tendance au redressement de la pièce soit nul ou, ce qui revient au même, il faut qu'en ce point la courbure de la règle soit nulle, et par conséquent le rayon de courbure infini.

C'est parce que, dans l'hyperbole, les rayons de courbure s'ac-croissent suivant une loi très-rapide, en s'éloignant du sommet, que l'hyperbole se trouve encore si voisine de la courbe élastique, même à des distances assez grandes de ce sommet.

Mais comme, à une distance finie du sommet, le rayon de courbure de l'hyperbole ne devient pas infini; on voit que, vers les appuis, la courbe élastique, ayant moins de courbure que l'hyperbole, lui sert de corde et passe au-dessus. Donc auprès de ces appuis (et intérieurement) les abscisses de l'hyperbole doivent être les plus petites. C'est précisément à cela qu'il faut attribuer les différences dont le *maximum* est, comme nous l'avons dit plus haut, inférieur à sept dixièmes de millimètre.

Je ne me suis pas borné à l'examen de la courbe produite par la flexion d'une seule règle; j'ai plié successivement d'autres règles en sapin, en chêne, en hêtre; j'ai constamment trouvé les différences de l'hyperbole comparatrice à la courbe réelle moindres que sept dixièmes de millimètre.

Je dois faire remarquer un fait d'expérience vraiment singulier. Si, au lieu de mettre la charge à égale distance des appuis, on la rapproche de l'un d'eux d'une quantité peu considérable, la courbe élastique n'est plus symétrique par rapport à la verticale équidistante des deux appuis. Néanmoins, cette courbe se confond encore à très-peu près avec une hyperbole; mais cette hyperbole, au lieu d'avoir un axe vertical et l'autre horizontal, se trouve rapportée à deux diamètres conjugués dont l'un est horizontal et l'autre oblique à l'horizon.

Il est visible en effet que, dans cette hypothèse, les tensions de la règle, en chaque point d'appui, ne doivent pas cesser d'être nulles; les rayons de courbure doivent donc encore être infinis en ces points de la règle; et la courbe, cessant d'être symétrique avec la verticale, ne peut plus correspondre qu'à un arc d'hyperbole dont aucun axe ne soit vertical. Lorsqu'on suppose les abscisses horizontales, les ordonnées conjuguées ne peuvent donc plus être verticales; mais ces ordonnées appartiennent toujours à un système de diamètres conjugués, et voilà ce que nous voulions faire remarquer.

Après avoir considéré la courbe produite par une flexion unique, j'ai cherché à comparer les courbes qui résultent de flexions différentes. Ici se présente une nouvelle série d'expériences, plus délicates peut-être que les précédentes, et dont j'exposerais la marche si je n'avais pas déjà dépassé les bornes que cette analise doit avoir. Je me contenterai de dire qu'après avoir déterminé une courbe simple, ayant avec la véritable élastique un contact très-intime, j'ai supposé leurs rayons de courbure identiques au point qui leur est commun. Mais, on a de suite ce rayon au sommet de l'hyperbole; on a donc aussi le *maximum* de courbure de l'élastique pour une flèche donnée.

Je passe enfin à l'explication de la rupture des bois. J'observe que les bois homogènes doivent rompre au point où leurs fibres atteignent un certain degré constant d'alongement ou de raccourcissement. Cette condition combinée avec les principes exposés précédemment sur la flexion des bois, me conduit à retrouver et à démontrer les diverses lois connues sur leur rupture.

Je viens de donner une idée de la première partie de mes recherches; l'autre est encore trop incomplète pour être présentée à la classe. Je me suis occupé, dans cette seconde partie, de la flexion des bois, lorsqu'on les plie sur des surfaces données. On sait que c'est en pliant ainsi les bois que nous recouvrons par des *bordages*, à l'extérieur, et par des *vaigres*, à l'intérieur, toute la membrure de nos vaisseaux.

Dans les ports du nord de l'Europe on *chauffe* les bordages, en les mettant dans des étuves; j'ai cherché à voir quelles altérations ce procédé produit sur la force des bois.

Je me suis ensuite occupé de ce que nous appelons des assemblages : ce sont les formes diverses par lesquelles nous joignons une pièce de bois à une autre. Je me suis proposé de déterminer la force de ces assemblages, en appréciant soigneusement tout ce qui peut contribuer à leur bonté.

Enfin,

Enfin, je me suis occupé de la torsion des bois. Dès que ces élémens des machines sont sollicités par des forces qui ne concourent pas au même point, il y a tendance à la torsion; et, comme toute force produit son effet, il y a réellement torsion. C'est ainsi que des efforts trop puissans brisent les arbres des pressoirs et des moulins. Je me suis donc proposé de déterminer les forces de torsion, en fonction du diamètre des bois, de leur longueur et du temps, qui entre ici comme un élément d'une puissance extraordinaire.

Si l'institut voit ces recherches avec quelque intérêt, et pense que leur continuation puisse être utile, je m'appliquerai à les compléter, et j'aurai l'honneur de soumettre au jugement de la classe ce que de nouvelles observations m'auront appris.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Description des sections coniques, par les intersections continuelles de leurs tangentes;

Par M. Gergonne.

Dans le X.e cahier du *Journal de l'école polytechnique* (page 49), M. de Prony a déduit de la théorie des *Solutions particulières*, un mode de description des sections coniques, par les intersections continuelles de leurs tangentes, qui est fort simple et fort commode, et très-propre conséquemment à faciliter le tracé des épures des voûtes. Je suis parvenu au même résultat, par des considérations tout à fait élémentaires, en cherchant à résoudre le problème suivant.

PROBLÈME. Étant donnés les élémens qui déterminent une section conique, lui mener une tangente parallèle à une droite donnée ?

Solution commune à l'ellipse et à l'hyperbole. Soient C le centre, A et B les sommets, et F, G les foyers d'une ellipse (fig. 1) ou d'une hyperbole (fig. 2). De l'un quelconque F des foyers, soit menée une perpendiculaire FP à la droite à laquelle on veut que la tangente cherchée soit parallèle ; de l'autre foyer G pris pour centre, et avec un rayon égal au premier axe AB, soit décrit un arc coupant FP en P, et soit menée GP ; enfin soit menée à FP par son milieu N une perpendiculaire NM, rencontrant GP en M ; cette droite NM sera la tangente cherchée, et le point M sera celui où elle touche la courbe.

Pour le démontrer, soit menée MF, on aura, par construction, MF=MP ; on aura donc MG+MF (fig. 1) et MG—MF (fig. 2) =MG+MP (fig. 1) et =MG—MP (fig. 2) =GP=AB ; ce qui prouve déjà que le point M appartient à la courbe. En second lieu, la droite MN, faisant des angles égaux avec les droites GP et MF, est tangente au point M. Enfin, NM étant perpendiculaire à FP, qui est elle-même perpendiculaire à la droite donnée, sera conséquemment parallèle à cette droite.

Solution pour la parabole. Soient FH (fig. 3) la direction de l'axe, F le foyer et HP la directrice de la courbe. Par le foyer F soit menée à la droite donnée à laquelle on demande que la tengente soit parallèle une perpendiculaire FP, coupant la directrice en P ; soit menée à cette droite FP, par son milieu N, une perpendiculaire NM coupant en M la parallèle PM menée à l'axe par le point P ; alors NM sera la tangente cherchée, et le point M sera celui où elle sera touchée par la courbe.

Si en effet on mène MF, on aura, par construction, MF=MP ; ce qui prouve déjà que le point M appartient à la courbe. En second lieu, l'égalité des angles NMP, NMF prouve que la droite NM est une tangente en M. Enfin NM étant perpendiculaire à FP, qui est elle-même perpendiculaire à la droite donnée, sera conséquemment parallèle à cette droite.

Si l'on conçoit présentement que la droite donnée, à laquelle la tangente demandée doit être parallèle, varie de direction, par degrés insensibles, à cause que GP (fig. 1, 2) doit être oonstamment égal à AB, le point P ne sortira point d'une circonférence KPH ayant G pour centre et un rayon égal à AB; en conséquence, le milieu N de FP ne sortira point d'une autre circonférence ayant AB pour diamètre; ainsi en menant de tous les points P de la circonférence HPK des droites PF, PG aux deux foyers F, G, et en élevant aux droites PF, par les points N où elles sont coupées par la circonférence ANB, des perpendiculaires NP terminées en M aux droites PG, ces perpendiculaires seront des tangentes à la courbe, et les points M seront ceux où elles la toucheront.

Quant à la parabole, on voit que si, par le foyer F, (fig. 3) on mène une suite de droites FP, terminées en P à la directrice; et que, par les points N où ces droites coupent la tangente AN au sommet A, on leur élève des perpendiculaires NM, terminées en M par leur rencontre avec les parallèles à l'axe menées par les points P; ces perpendiculaires seront des tangentes à la courbe, et les points M seront ceux où elles la toucheront.

Donc, *Si l'un des côtés d'un équerre passe constamment par l'un des foyers d'une section conique, et que son sommet parcourt la circonférence décrite sur le premier axe comme diamètre, s'il s'agit de l'ellipse ou de l'hyperbole, ou une tangente au sommet, s'il s'agit de la parabole, l'autre côté de l'équerre sera constamment tangent à la courbe.* C'est en cela que consiste le théorème de M. de Prony.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstrations du dernier des deux théorèmes énoncés à la page 296 du quatrième volume de ce recueil.

ÉNONCÉ. *Dans toute ligne du second ordre qui a un centre ; si l'on mène deux tangentes parallèles à une même droite fixe quelconque, et une troisième tangente variable ; le produit des segmens des deux premières tangentes compris depuis leurs points de contact jusqu'à la troisième, sera une quantité constante.* (*)

Démonstration analitique ;

Par M. BÉRARD, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

Les points de contact des deux tangentes parallèles entre elles étant les extrémités d'un diamètre, nous prendrons ce diamètre, que

(*) Dans la *Théorie des fonctions analitiques*, page 134 de la première édition et 187 de la deuxième, Lagrange a démontré que, non seulement cette propriété appartenait aux sections coniques ; mais que de plus elle n'appartenait qu'à elles seules. Mais sa démonstration sort du cercle des élémens.

nous appellerons $2a$, pour axe des x, et son conjugué $2b$ pour axe des y.

Si alors x', y' sont les cordonnées du point de contact de la troisième tangente, nous aurons

$$b^2x'^2 \pm a^2y'^2 = a^2b^2 ; \qquad (1)$$

et l'équation de cette troisième tangente sera

$$b^2xx' \pm a^2yy' = a^2b^2 : \qquad (2)$$

On en déduira la longueur des segmens que cette tangente détermine sur les deux premières, en y faisant successivement $x=a$ et $x=-a$, et en prenant les valeurs correspondantes de y, ce qui donnera

$$y = \pm \frac{b^2(a-x')}{ay'} , \quad y = \pm \frac{b^2(a+x')}{ay'} ;$$

le produit de ces deux segmens sera donc

$$b^2 . \frac{a^2b^2 - b^2x'^2}{a^2y'^2} ;$$

quantité qui, en vertu de l'équation (1), se réduit à $\pm b^2$, c'est-à-dire, le quarré de la moitié du conjugué du diamètre qui joint les points de contact des tangentes parallèles.

Démonstration géométrique ;

Par M. Brianchon, capitaine d'artillerie.

Soient (fig. 4, 5) C le centre de la courbe, AB un diamètre quelconque, DC son demi-conjugué, AM et BN des tangentes aux extrémités de ce premier diamètre, M, N les points où elles sont coupées par une troisième tangente variable quelconque MN. Il s'agit d'établir que $AM \times BN$ est une quantité constante.

Pour cela, soit menée PQ, tangente parallèle à AB (fig. 4) et asymptote (fig. 5), coupant en P et Q les prolongemens de MA, NB.

Par une propriété connue du quadrilatère circonscrit aux sections coniques (*), les directions des diagonales PN et QM du quadrilatère MNQP doivent concourir en quelque point S de la direction du diamètre AB qui joint les deux points de contact opposés ; d'après quoi les parallèles MP et NQ donneront

$$SB : SA :: BQ : AM ,$$

$$SA : SB :: AP : BN ;$$

donc

$$AM \times BN = AP \times BQ ;$$

mais on a

$$AP = BQ = CD ;$$

donc

$$AM \times BN = \overline{CD}^2 .$$

(*) Voyez, entre autres, la page 167 du troisième volume de ce recueil.

Solution du problème de dynamique proposé à la page 320 du 4.e volume de ce recueil ;

Par M. DUBUAT, professeur à l'école de l'artillerie et du génie.

ÉNONCÉ. *Le point de suspension d'un pendule simple, à l'état de repos, étant subitement entraîné, d'un mouvement rectiligne et uniforme, avec une vitesse connue, le long d'une droite horizontale, on propose d'assigner la nature de la trajectoire décrite par l'extrémité inférieure de ce pendule, ainsi que toutes les autres circonstance du mouvement; en faisant toutefois abstraction de la résistance du milieu ?*

Solution. Prenons le point de suspension du pendule à l'état de repos pour origine des coordonnées rectangulaires, et la droite parcourue par ce point pour axe des x ; si nous prenons pour unité la longueur du pendule, et que nous supposions qu'à l'époque t l'abscisse de son point de suspension est x', et les coordonnées de son extrémité inférieure x, y, nous aurons les équations de condition

$$(x-x')^2+y^2=1\,, \qquad (1) \qquad x'=bt\,; \qquad (2)$$

b désignant la vitesse constante du point de suspension.

Si, de plus, nous prenons la masse de ce pendule pour unité, et que nous désignons par μ la tension inconnue de sa verge, et par g la gravité, les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mu(x-x')\,, \qquad (3) \qquad\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\mu y-g\,; \qquad (4)$$

Soient $x-x'=\text{Sin}.4\varphi$, $y=\text{Cos}.4\varphi$; on aura, en substituant et ayant égard à l'équation (2),

$$4\frac{d^2\varphi}{dt^2}\text{Cos}.4\varphi-16\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\text{Sin}.4\varphi=\mu\text{Sin}.4\varphi\,; \qquad (5)$$

$$-4\frac{d^2\varphi}{dt^2}\text{Sin}.4\varphi-16\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\text{Cos}.4\varphi=\mu\text{Cos}.4\varphi-g\,; \qquad (6)$$

équations entre lesquelles éliminant μ, il viendra

$$4\frac{d^2\varphi}{dt^2}=g\text{Sin}.4\varphi\,;$$

et, en multipliant par $4d\varphi$ et intégrant

$$8\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=g(C-\text{Cos}.4\varphi)=g(C-1+2\text{Sin}.^2 2\varphi)\,;$$

mais l'angle φ devant être nul en même temps que la vitesse angulaire, on doit avoir $C=1$, et par conséquent, en séparant les variables

$$dt\sqrt{g}=\frac{2d\varphi}{\text{Sin}.2\varphi}=\frac{d\varphi}{\text{Sin}.\varphi\text{Cos}.\varphi}=\frac{d\varphi(\text{Sin}.^2\varphi+\text{Cos}.^2\varphi)}{\text{Sin}.\varphi\text{Cos}.\varphi}\,,$$

ou enfin

dt

$$dt\sqrt{g}=\frac{d\varphi\text{Cos.}\varphi}{\text{Sin.}\varphi}+\frac{d\varphi\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi}=\frac{d.\text{Sin.}\varphi}{\text{Sin.}\varphi}-\frac{d.\text{Cos.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi},$$

d'où en intégrant et faisant la constante nulle, attendu que t et tang.4φ doivent être nuls en même temps,

$$t\sqrt{g}=\text{Log.Sin.}\varphi-\text{Log.Cos.}\varphi=\text{Log.}\frac{\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi}=\text{Log.Tang.}\varphi,$$

et par conséquent

$$\text{Tang.}\varphi=e^{t\sqrt{g}}.$$

de là on tire

$$\text{Tang.}4\varphi=\frac{4\text{Tang.}\varphi-4\text{Tang.}^3\varphi}{1-6\text{Tang.}^2\varphi+\text{Tang.}^4\varphi}=\frac{4e^{t\sqrt{g}}-4e^{3t\sqrt{g}}}{1-6e^{2t\sqrt{g}}+e^{4t\sqrt{g}}};$$

et par suite

$$\text{Sin.}4\varphi=\frac{\text{Tang.}4\varphi}{\sqrt{1+\text{Tang.}^2 4\varphi}}=\frac{4e^{t\sqrt{g}}(1-e^{2t\sqrt{g}})}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^2},$$

$$\text{Cos.}4\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\text{Tang.}^2 4\varphi}}=\frac{1-6e^{2t\sqrt{g}}+e^{4t\sqrt{g}}}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^2}.$$

Donc

$$x=bt+4e^{t\sqrt{g}}.\frac{1-e^{2t\sqrt{g}}}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^2}; \qquad y=\frac{1-6e^{2t\sqrt{g}}+e^{4t\sqrt{g}}}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^2}.$$

et telles sont les équations qui donnent la situation du mobile à chaque instant ; on en tire

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=b+4\sqrt{g}\,.\,e^{t\sqrt{g}}\,.\,\frac{1-6e^{2t\sqrt{g}}+e^{4t\sqrt{g}}}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^3},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-16\sqrt{g}\,.\,e^{2t\sqrt{g}}\,.\,\frac{1-e^{2t\sqrt{g}}}{(1+e^{2t\sqrt{g}})^3};$$

l'élimination de $\mathrm{d}t$ et de $e^{t\sqrt{g}}$ entre ces deux équations et la valeur de y donnerait l'équation différentielle de la trajectoire; mais cette équation serait probablement fort compliquée.

Si l'on fait $t=0$, on trouve $x=0$, $y=-1$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$, ce qui prouve que les constantes sont déterminées conformément aux conditions particulières de la question.

Si l'on égale la valeur de y à zéro, il vient

$$e^{4t\sqrt{g}}-6e^{2t\sqrt{g}}+1=0,$$

d'où

$$e^{2t\sqrt{g}}=3\pm2\sqrt{2}$$

et par conséquent

$$t=\frac{1}{2\sqrt{g}}\mathrm{Log.}(3\pm2\sqrt{2}),$$

ce qui donne pour t deux valeurs, l'une positive et l'autre négative, c'est-à-dire, antérieure à l'époque d'où on compte les temps.

La valeur de $\frac{dy}{dt}$ montre ensuite que y parvient à son *maximum* lorsque t est infini, et la valeur de y prouve que ce *maximum* est $+1$.

Quand à l'abscisse qui répond à $y=0$ ou $e^{2t\sqrt{g}}=3+2\sqrt{2}$, elle est

$$x=\frac{b}{2\sqrt{g}}\text{Log.}(3+2\sqrt{2})-1 \;;$$

elle peut être positive nulle ou négative, suivant que la vitesse b sera plus ou moins grande.

Il résulte de tout ce qui précède que la courbe décrite par l'extrémité inférieure du pendule a une branche très-courte au-dessous de l'axe des x, et une branche asymptotique au-dessus du même axe, l'asymptote étant une parallèle à l'axe des x, dont l'ordonnée constante est égale à l'unité.

Les diverses circonstances que peut présenter la trajectoire sont représentées par les figures 6, 7, 8, dans lesquelles CP est le pendule au repos, c'est-à-dire, dans sa position initiale, CD l'horizontale que l'on fait parcourir, de gauche à droite à son point de suspension et enfin AB l'asymptote.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de statique.

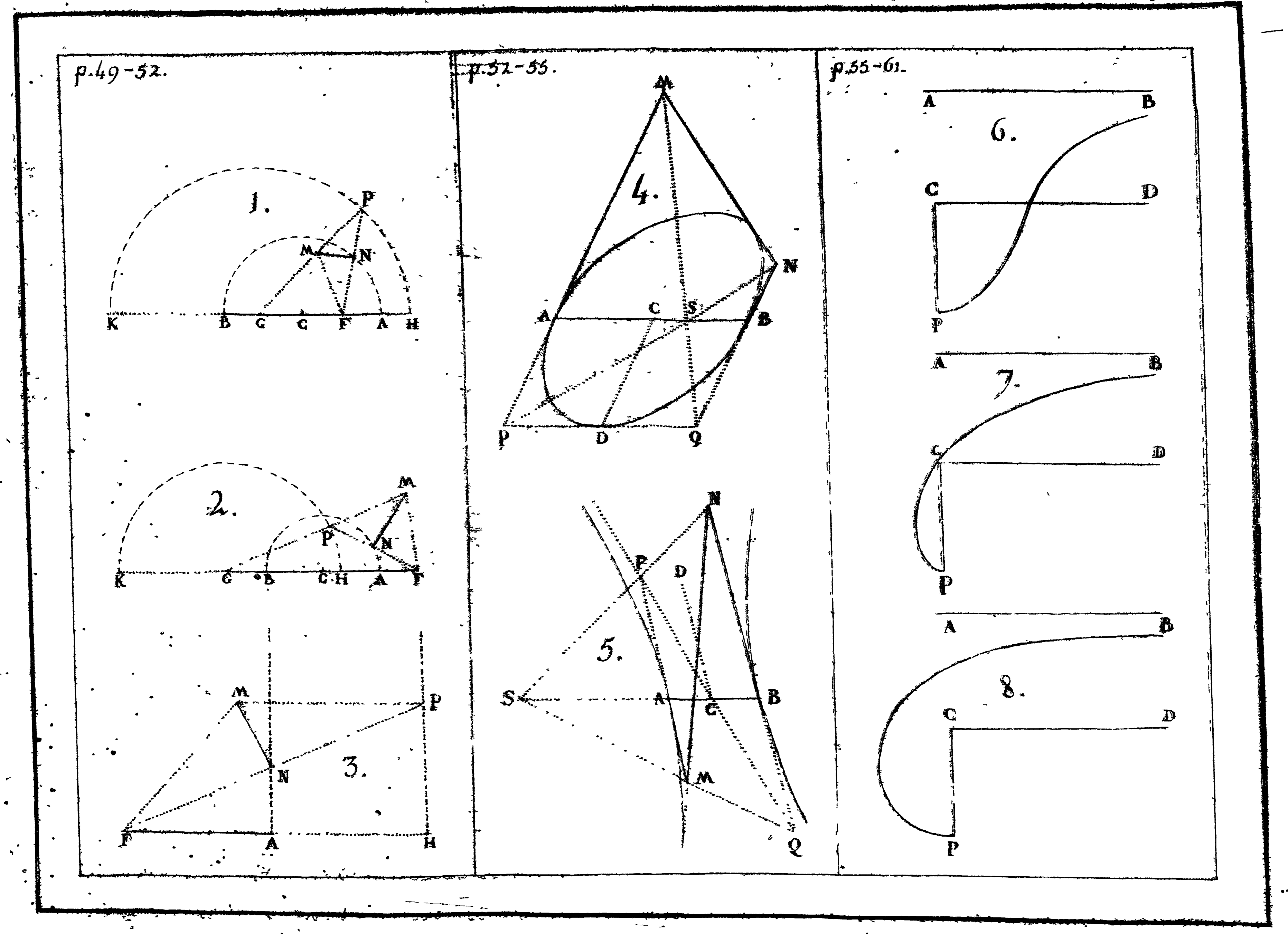
Soit une verge élastique, inextensible, uniformément pesante, dont le poids et la longueur soient donnés; et supposons que cette verge doive être soutenue par deux points fixes, situés sur une même droite horizontale.

Si ces points sont situés aux deux extrémités de la verge, cette verge, en vertu de son élasticité, affectera une courbure dont la concavité sera tournée vers le ciel.

Si, au contraire, ces deux points sont réunis au milieu de la verge, elle prendra, au contraire, une courbure dont la convexité sera tournée vers le ciel.

Dans ces deux cas extrêmes, il est clair que la courbure de la verge sera plus grande que pour toute autre disposition des deux points d'appui.

On propose, d'après cela, d'assigner la situation de ces deux points qui fera prendre à la verge le moins d'arc possible; c'est-à-dire, de manière que la perpendiculaire abaissée sur l'horizontale qui joint les points d'appui, du point de la verge qui s'en écarte davantage, soit en dessus soit en dessous, soit un *minimum*?


p. 49-52.
1.
P
M
N
K B G C F A H
2.
M
P
N
K G B C H A F
3.
M
P
N
F A H
p. 52-55.
4.
M
N
A C S B
P D Q
5.
N
P
D
S A C B
M
Q
p. 55-61.
6.
A B
C D
P
7.
A B
C D
P
8.
A B
C D
P

J. D. G. fecit.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Essai d'un nouveau mode de discussion de l'équation générale des lignes et de celle des surfaces du second ordre ;

Par M. Gergonne.

Jusqu'ici on a employé, pour la discussion géométrique de l'équation générale du second degré, à deux ou à trois indéterminées, ou la résolution effective de cette équation, ou la transformation des coordonnées, ou enfin la connaissance de quelques propriétés appartenant exclusivement aux diamètres principaux des lignes et surfaces du second ordre.

La discussion par la résolution effective de l'équation ou, autrement dit, la méthode de Chezy, est sans doute bien préférable à ce qu'on rencontrait autrefois sur ce sujet dans les *Traités d'application de l'algèbre à la géométrie* ; mais, outre qu'après des calculs peu symétriques, elle ne conduit, en définitif, qu'à la connaissance d'un système unique de diamètres conjugués, c'est à tort, ce me semble, qu'on la présente comme modèle de la méthode à suivre, dans la discussion des lignes et surfaces de degrés plus élevés, puisque, passé le quatrième degré, la résolution de l'équation est impraticable dans l'état actuel de l'analise, et que dès le troisième, la discussion de l'équation résolue présente des difficultés à peu près insurmontables.

La discussion par la transformation des coordonnées semblerait, pour cette raison, mériter la préférence : d'autant qu'elle est susceptible d'une certaine élégance. M. Bret, en particulier, dans divers articles de ce recueil, a montré tout le parti qu'on en pouvait tirer. Cependant, on sait que, déjà pour les surfaces du second ordre, elle n'est point exempte de difficultés; et que, dans tous les cas, elle exige des calculs assez compliqués, sur-tout lorsqu'on veut rapporter les grandeur et direction des diamètres principaux aux axes primitifs, et que ceux-ci ne sont point rectangulaires.

Quant à la discussion tirée de la connaissance préalable de quelque propriété appartenant exclusivement aux diamètres principaux, bien qu'elle soit peut-être la plus briève de toutes, comme M. Bérard l'a prouvé dans un article de ce recueil et dans un ouvrage particulier (*); on sent pourtant qu'elle ne saurait être considérée comme un procédé vraiment élémentaire, puisque c'est à la discussion même de l'équation qu'il appartient de faire découvrir les propriétés que cette méthode met en usage.

La méthode dont je me propose de tracer ici les principaux linéamens me paraît n'avoir aucun de ces inconvéniens, et semble en même temps plus naturelle qu'aucune de celles-là. Elle serait sans doute susceptible de perfectionnement; aussi je ne la présente que comme un simple essai. Elle a sur-tout cet avantage que les résultats qu'on en obtient forment un tout dont les parties ont entre elles une étroite liaison. A la vérité, cette liaison n'est pas sans quelque inconvénient dans les exercices et examens publics, où il est beaucoup plus commode de savoir établir chaque proposition, indépendamment de toutes les autres; mais il n'est point du tout démontré que ce qu'il faut faire pour briller dans les examens, du moins suivant leur mode actuel, soit aussi ce qu'il y a de plus propre à se rendre habile dans la science.

Je vais d'abord m'occuper des lignes du second ordre; je passerai ensuite à la considération des surfaces du même ordre. Mais, comme

(*) Voyez la note de la page 294 du 4.me volume de ce recueil.

il a déjà été fréquemment question des unes et des autres dans ce recueil, j'élaguerai tout ce qui ne sera pas proprement relatif à la méthode que j'ai en vue d'exposer.

§. I.

Discussion des lignes du second ordre.

Soit l'équation

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y+D=0\ ; \qquad (1)$$

exprimant une courbe rapportée à deux axes quelconques, formant entre eux un angle γ. Soit

$$y=mx+g\ ; \qquad (2)$$

l'équation d'une droite quelconque, rapportée aux mêmes axes. En éliminant y entre elles, il vient

$$(A+2Cm+Bm^2)x^2+2\{(A'+B'm)+(C+Bm)g\}x+(D+2B'g+Bg^2)=0\ ; \qquad (3)$$

ainsi, généralement parlant, la droite (2) coupe la courbe (1) en deux points.

On sait que si, dans une équation, on délivre le premier terme de son coefficient, le coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, devient alors la somme des racines ; et comme, d'un autre côté, l'abscisse du milieu d'une droite est la demi-somme des abscisses de ses deux extrémités, il s'ensuit que, pour le milieu de la corde interceptée par (1) sur (2), on a

$$x=-\frac{(A'+B'm)+(C+Bm)g}{A+2Cm+Bm^2}. \qquad (4)$$

En substitant cette valeur dans (2), on trouvera, pour le même milieu,

$$y=-\frac{(A'+B'm)-(A+Cm)g}{A+2Cm+Bm^2}. \qquad (5)$$

Les équations (4), (5) sont donc celles du milieu de la corde interceptée par (1) sur (2).

En faisant varier g, dans les formules (4), (5), sans faire varier m, on obtiendra les coordonnées des milieux d'une suite de cordes toutes parallèles entre elles. On obtiendra donc l'équation du lieu géométrique de ces milieux, en éliminant g entre ces deux formules (*) ; ce qui donnera, par la suppression du facteur $A+2Cm+Bm^2$, commun à tous les termes de l'équation résultante,

$$(A+Cm)x+(C+Bm)y+(A'+B'm)=0\ ; \qquad (6)$$

(*) Les commençans ont d'ordinaire quelque peine à bien comprendre comment ces sortes d'éliminations de constantes conduisent au but où l'on veut atteindre : et c'est qu'en effet la raison qu'on leur en donne communément est plus métaphysique que mathématique. Il me semble que la chose devient évidente, en raisonnant à peu près comme il suit :

Soient

$$\varphi(x\,,y\,,A)=0\,,\quad(\alpha)\,,\qquad \psi(x\,,y\,,A)=0\,,\quad(\beta)\,,$$

les équations de deux courbes rapportées aux mêmes axes. Si, en les considérant comme les équations d'un même problème déterminé à deux inconnues, on en tire les valeurs de x et y, ces valeurs, fonctions de A, seront les coordonnées de l'intersection des deux courbes.

Si l'on fait varier la valeur de cette constante A, le point d'intersection des deux courbes variera aussi, et l'on pourra demander quelle est la courbe dont il ne sortira jamais, quelque valeur que l'on puisse donner à A.

Pour résoudre cette question, on considérera qu'en supposant A déterminée, le point d'intersection des deux courbes n'est pas seulement donné par les deux équations (α), (β), mais encore par tout système de deux équations que l'on voudra déduire de leur combinaison, ou encore par le système de l'une quelconque d'entre elles et d'une combinaison quelconque de l'une et de l'autre.

Donc, en particulier, on pourra, dans la recherche du point dont il s'agit, remplacer l'équation (β) par le résultat de l'élimination de A entre elle et l'équation (α) ; en sorte que, si ce résultat est

$$f(x,\,y)=0\,, \qquad (\gamma)$$

le système des équations (α), (γ) pourra, dans la recherche du point d'intersection des deux courbes, remplacer celui des équations (α), (β).

Mais, lorsque la constante A varie, la courbe (γ) demeure constamment la même ; d'où il suit que cette courbe doit contenir tous les points d'intersection que l'on déduirait de la combinaison des équations (α), (β), en donnant successivement à la constante A toutes les valeurs imaginables ; cette courbe (γ) est donc la courbe demandée.

Rien ne serait plus facile que d'étendre ces considérations à la géométrie à trois dimensions.

équation d'une ligne droite, quelle que soit m. Ainsi les courbes comprises dans l'équation (1) jouissent toutes, sans exception, de cette propriété, très-remarquable, que les milieux d'un système de cordes parallèles; quelle qu'en soit d'ailleurs la direction commune, y sont tous situés sur une même ligne droite que, pour cette raison, nous appellerons, à l'avenir, un *diamètre* de la courbe. On voit donc que, non seulement ces courbes ont une infinité de diamètres, mais que de plus, ces diamètres affectent, en général, toutes sortes de directions; de manière qu'il n'est aucun des points d'une ligne du second ordre par lequel on ne puisse en concevoir un.

L'équation d'une parallèle quelconque au diamètre (6) doit être de la forme

$$y=-\frac{A+Cm}{C+Bm}x+g' \; ; \qquad (7)$$

d'où il suit que, si on la représente par

$$y=m'x+g' \, , \qquad (8)$$

on aura, entre m et m', l'équation de relation

$$m'=-\frac{A+Cm}{C+Bm} \, , \quad \text{ou} \quad Bmm'+C(m+m')+A=0 \, . \qquad (9)$$

Cette équation étant symétrique, par rapport à m et m', il en faut conclure que les milieux des cordes parallèles au diamètre (6) sont sur un diamètre parallèle à (2); et, comme m et m' demeurent indéterminés, il s'ensuit, plus généralement, que les milieux des cordes parallèles à un diamètre quelconque sont sur le diamètre parallèle aux cordes que le premier coupe en deux parties égales. Ainsi, généralement parlant, à chaque diamètre, il en répond nécessairement un autre tel que les cordes parallèles à chacun d'eux ont leurs milieux sur l'autre. A l'avenir nous appellerons *diamètres conjugués* les deux diamètres d'un semblable système. On voit donc que, non seulement les lignes du second ordre ont une infinité de systèmes de diamètres conjugés, mais qu'en outre tout diamètre d'une telle ligne en a nécessairement un qui lui est conjugué.

D'après ce qui précède, les équations de deux diamètres, conjugués ou non conjugués, peuvent être représentées ainsi qu'il suit :

$$\left.\begin{aligned}(A+Cm)x+(C+Bm)y+(A'+B'm)=0\ ,\\(A+Cm')x+(C+Bm')y+(A'+B'm')=0\ .\end{aligned}\right\}\ (10)$$

Pour connaître le point où ils se coupent, il faudra combiner ces équations entre elles. Mais si, auparavant, on prend leur difference, puis la différence de leurs produits respectifs par m' et m, en divisant chaque fois par $m-m'$, il viendra

$$\left.\begin{aligned}Cx+By+B'=0\ ,\\Ax+Cy+A'=0\ .\end{aligned}\right\}\ (11)$$

Ainsi, dans la recherche de l'intersection des deux diamètres, on pourra remplacer le système des équations (10) par le système des équations (11); et puisque ces dernières sont indépendantes de m et m', il en faut conclure que tous les diamètres des lignes du second ordre se coupent en un même point. Il est de plus aisé de voir que ce point doit être leur milieu commun, puisqu'à chaque diamètre répond un conjugué qui doit le couper en son milieu. Le milieu commun de tous les diamètres d'une ligne du second ordre est ce qu'on appelle le *centre* de cette courbe.

Nous remarquerons, avant d'aller plus loin, que les équations (11) n'étant autre chose que ce que devient l'équation (6), lorsqu'on y fait successivement $m=0$, $m=\infty$; il en résulte que ces équations (11) sont respectivement celles des diamètres qui coupent en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des y et les cordes parallèles à l'axe des x; c'est-à-dire, en d'autres termes, que ces équations sont celles des conjugés des diamètres respectivement parallèles aux axes des y et des x.

Si donc les axes étaient parallèles à deux diamètres conjugués, les diamètres exprimés par les équations (11) devraient être respectivement parallèles aux axes des x et des y; on devrait donc avoir, dans ces équations, et conséquemment dans l'équation (1), $C=0$. Ainsi, le parallélisme des axes des coordonnées avec deux diamètres conjugués jouit de la propriété de priver l'équation (1) du rectangle des coordonnées; il est de plus aisé de voir que c'est là la seule circonstance où elle puisse en être privée.

Si le centre de la courbe se confondait avec l'origine, les équations (11) devraient appartenir à deux droites passant par cette origine: on devrait donc avoir à la fois $A'=0$, $B'=0$. Ainsi, la situation du centre à l'origine des coordonnées jouit de la propriété de priver l'équation (1) des premières puissances des deux variables, et il est de plus aisé de voir qu'elle en jouit exclusivement.

Si donc on prend pour axes des coordonnées deux diamètres conjugués quelconques, l'équation (1) prendra la forme très-simple.

$$Ax^2+By^2+D=0\ , \qquad (12)$$

sous laquelle la discussion en deviendra incomparablement plus facile.

Mais ceci suppose que les droites (11) concourent effectivement en un même point. En combinant leurs équations, on en tire

$$x=\frac{BA'-CB'}{C^2-AB}\ , \quad y=\frac{AB'-CA'}{C^2-AB}\ , \qquad (13)$$

d'où l'on voit que, si l'on a $C^2-AB=0$, la courbe n'a plus de centre, ou que du moins son centre étant infiniment éloigné des axes primitifs ne saurait plus être pris pour origine. Nous verrons bientôt, au surplus, que la courbe est susceptible d'être exprimée par une équation fort simple qui convient également au cas où elle a un centre et à celui où elle en est dépourvue.

Si l'on avait à la fois les trois relations

$$C^2=AB\ ,\quad BA'=CB'\ ,\quad AB'=CA'\ , \tag{14}$$

dont chacune est comportée par les deux autres, les deux équations (11) rentreraient l'une dans l'autre ; la courbe aurait donc une infinité de centres situés sur l'une ou l'autre de ces droites.

Soient x', y' les coordonnees de l'un quelconque des points de la courbe, en sorte qu'on ait

$$Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+2A'x'+2B'y'+D=0\ ; \tag{15}$$

en désignant pour abréger par a, b les coordonnées du centre, l'equation du diamètre passant par ce point sera

$$y-y'=\frac{y'-b}{x'-a}(x-x')\ . \tag{16}$$

Si, par le même point, on mène une parallèle au conjugué de ce diamètre, son équation sera, en vertu de l'équation (6),

$$\{A(x'-a)+C(y'-b)\}(x-x')+\{C(x'-a)+B(y'-b)\}(y-y')=0. \tag{17}$$

Mais, en vertu des équations (11), on a

$$-Aa-Cb=A'\ ,$$

$$-Ca-Bb=B'\ ;$$

en conséquence, l'équation (17) deviendra

$$(Ax'+Cy'+A')(x-x')+(By'+Cx'+B')(y-y')=0\ ;$$

ou, en développant et transposant,

$$(By'+Cx'+B')y+(Ax'+Cy'+A')x$$
$$=Ax'^2+By'^2+2Cx'y'+A'x'+B'y'\ ,$$

ou

ou enfin, en ajoutant l'équation de la relation (13) et réduisant,

$$(By'+Cx'+B')y+(Ax'+Cy'+A')x+(A'x'+B'y'+D)=0\,,$$

ou encore

$$Axx'+Byy'+C(xy'+x'y)+A'(x+x')+B'(y+y')+D=0\,. \qquad (18)$$

Cette droite ayant un point commun avec la courbe, et ne pouvant d'ailleurs en être une corde, puisqu'alors ce point en serait à la fois le milieu et l'extrémité ; il faut en conclure que c'est une *tangente* à cette courbe.

Si l'on suppose que la tangente est l'axe des y, et que le diamètre au conjugué duquel elle est parallèle est l'axe des x : auquel cas son point de contact avec la courbe sera l'origine ; leurs équations devront être respectivement $x=0$, $y=0$; on devra donc avoir, outre $x'=0$, $y'=0$, les conditions $B'=0$, $C=0$, $D=0$, en sorte que l'équation (1) deviendra simplement

$$Ax^2+By^2+2A'x=0\,. \qquad (19)$$

Telle est donc la forme que prend l'équation de la courbe, lorsqu'on prend pour axes un diamètre et la tangente à son extrémité, ce qui est toujours possible, toutes les fois que l'équation (1) n'est point absurde d'elle-même ; c'est-à-dire, toutes les fois qu'il y a au moins un système x', y' de coordonnées réelles, qui y satisfait. La discussion, très-facile, de l'équation (19) fera donc connaître toutes les courbes que peut exprimer l'équation (1). (*)

(*) Sachant mener une tangente à la courbe par un de ses points, il ne sera pas difficile de lui mener une normale par le même point. De là on passera à la tangente et à la normale par un point extérieur. Nous nous bornons à indiquer ces divers objets, sur lesquels nous n'aurions rien de nouveau à dire. Mais nous ne devons pas négliger de remarquer que ce sera naturellement ici le lieu de faire mention des belles propriétés dont jouissent ce qu'on est convenu d'appeler les *pôles* des lignes du second ordre. On pourra consulter à ce sujet les pages 293 et 302 du troisième volume de ce recueil.

Les diamètres conjugués rectangulaires sont ce qu'on appelle les *diamètres principaux* de la courbe, et leurs extrémités en sont les sommets. Pour obtenir les directions de ces diamètres, il suffira de joindre à l'équation

$$A+C(m+m')+Bmm'=0 \ , \qquad (9)$$

l'équation suivante

$$1+(m+m')\text{Cos.}\gamma+mm'=0 \qquad (20)$$

qui exprime que les deux diamètres sont perpendiculaires l'un à l'autre (*). La symétrie de ces équations prouve que m et m' seront donnés par une même equation du second degré, et qu'ainsi il n'y a qu'un système unique de diamètres principaux.

Soient x, y les coordonnées de l'un des sommets de la courbe, et r sa distance au centre ou la longueur du demi-diamètre principal qui lui répond ; representons toujours, pour abréger, par a, b les coordonnées du centre, données par les formules (13) ; nous aurons, à la fois,

---

(*) Soient en effet deux droites $y=mx$, $y=m'x$, passant par l'origine des coordonnées que nous supposons former entre elles un angle γ. Pour exprimer que ces droites sont perpendiculaires l'une à l'autre, il est nécessaire et il suffit d'exprimer que deux points (a, b), (a', b') pris respectivement sur l'une et l'autre sont les extrémités de l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit est à l'origine. Cette condition donne

$$(a-a')^2+2(a-a')(b-b')\text{Cos.}\gamma+(b-b')^2=a^2+2ab\text{Cos.}\gamma+b^2+a'^2+a'b'\text{Cos}\ \gamma+b'^2$$

ou en réduisant

$$aa'+bb'+(ab'+ba')\text{Cos.}\gamma=0 \ ;$$

mais on a d'ailleurs

$$b=ma \ , \quad b'=m'a' \ ,$$

ce qui donnera, en substituant et divisant par aa', l'équation mentionnée dans le texte.

$$(x-a)^2+2(x-a)(y-b)\mathrm{Cos}.\gamma+(y-b)^2=r^2\ , \qquad (21)$$

$$y-b=m(x-a)\ . \qquad (22)$$

D'un autre côté l'élimination de m' entre les équations (9) et (20) donne

$$(C-B\mathrm{Cos}.\gamma)m^2+(A-B)m-(C-A\mathrm{Cos}.\gamma)=0\ . \qquad (23)$$

Enfin l'équation (1) peut facilement être mise sous cette forme

$$A(x-a)^2+B(y-b)^2+2C(x-a)(y-b)$$
$$+2(Aa+Cb+A')x+2(Ca+Bb+B')y$$
$$+D-Aa^2-Bb^2-2Cab=0\ ;$$

faisant donc

$$Aa^2+Bb^2+2Cab-D=\Delta\ ,$$

et remarquant qu'en vertu des équations (11) on a

$$Aa+Cb+A'=0\ ,$$
$$Ca+Bb+B'=0\ ;$$

elle deviendra simplement

$$A(x-a)^2+B(y-b)^2+2C(x-a)(y-b)=\Delta\ . \qquad (24)$$

Cela posé ; si, dans les équations (21) et (24), on introduit pour $y-b$ sa valeur donnée par l'équation (22) elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l}(x-a)^2(1+2m\mathrm{Cos}.\gamma+m^2)=r^2\ ,\\ (x-a)^2(A+2Cm+Bm^2)=\Delta\ ;\end{array}\right\}(25)$$

équations entre lesquelles éliminant $(x-a)^2$, il viendra

$$(Br^2-\Delta)m^2+2(Cr^2-\Delta\text{Cos.}\gamma)m+(Ar^2-\Delta)=0 \ ,$$

éliminant enfin m entre cette équation et l'équation (23) on aura d'abord

$$(AB-C^2)r^4-\Delta(A-2C\text{Cos.}\gamma+B)r^2+\Delta^2\text{Sin.}^2\gamma=0 \ , \qquad (26)$$

et ensuite

$$m=-\frac{Cr^2-\Delta\text{Cos.}\gamma}{Br^2-\Delta}=-\frac{Ar^2-\Delta}{Cr^2-\Delta\text{Cos.}\gamma} \ . \qquad (27)$$

L'équation (26) donnera les longueurs des demi-diamètres principaux ; les formules (27) en détermineront la direction ; et ensuite l'une des équations (25), combinée avec l'équation (22), fera connaître les sommets.

Parvenus à l'équation (26), on pourra poursuivre la discussion, comme l'a fait M. Bérard à la page 106 du 3.^{me} volume de ce recueil.

Dans le cas particulier où l'on aura $AB=C^2$, la courbe, n'ayant point de centre, n'aura qu'un diamètre principal et conséquemment qu'un seul sommet que l'on pourra déterminer comme il suit. L'équation (16) du diamètre deviendra simplement

$$y-y'=\frac{AB'-CA'}{BA'-CB'}(x-x') \ ,$$

en exprimant donc que ce diamètre est perpendiculaire à la tangente à son extrémité, donnée par l'équation (18) il viendra

$$1+\left\{\frac{AB'-CA'}{BA'-CB'}-\frac{Ax'+Cy'+A'}{By'+Cx'+B'}\right\}\text{Cos.}\gamma-\frac{AB'-CA'}{BA'-CB'}\cdot\frac{Ax'+Cy'+A'}{By'+Cx'+B'}=0 \ ;$$

équation qui, combinée avec l'équation (15), ne donnera, en ayant égard à la rélation $AB=C^2$, qu'un seul système de valeurs de x' et y' lesquelles seront les coordonnées du sommet. Il est aisé de voir qu'alors tous les diamètres seront parallèles.

Lorsque, comme on le fait communément dans les traités élémentaires, on suppose les axes des coordonnées rectangulaires, les dernières recherches et les résultats qu'on en obtient se simplifient considérablement.

§. II.

Discussion des surfaces du second ordre.

Soit l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy+2A''x+2B''y+2C''z+D=0\,, \quad (1)$$

exprimant une surface rapportée à deux axes quelconques, formant entre eux des angles α, β, γ. Soient de plus

$$x=mz+g\,,\quad y=nz+h\,, \qquad (2)$$

les équations d'une droite quelconque. En éliminant x et y entre elles et l'équation (1), il viendra

$$\begin{gathered}(Am^2+Bn^2+C+2A'n+2B'm+2C'mn)z^2\\ +2\{(Am+C'n+B')g+(C'm+Bn+A')h+(A''m+B''n+C'')\}z\\ +(Ag^2+Bh^2+2C'gh+2A''g+2B''h+D)=0\,. \qquad (3)\end{gathered}$$

En raisonnant comme dans le §. précédent, on verra que le milieu de la corde interceptée par (1) sur (2) est donné par les équations (2), jointes à l'équation

$$z=-\frac{(Am+C'n+B')g+(C'm+Bn+A')h+(A''m+B''n+C'')}{Am^2+Bn^2+2C'mn+2B'm+2A'n}\,. \qquad (4)$$

Si donc on élimine g et h entre elles, l'équation résultante, en x, y, z, sera celle du lieu des milieux des cordes parallèles à (2). Cette équation est, toutes réductions faites,

$$(Am+C'n+B')x+(C'm+Bn+A')y+(B'm+A'n+C)z+(A''m+B''n+C'')=0\,; \quad (5)$$

équation d'un plan quels que soient m et n. Ainsi, les surfaces comprises dans l'équation (1) jouissent toutes, sans exception, de cette propriété très-remarquable, que les milieux d'un système de cordes parallèles, quelle qu'en soit d'ailleurs la direction commune, sont tous situés dans un même plan que, pour cette raison, nous appellerons à l'avenir *plan diamétral* de la surface. Ainsi, non seulement ces surfaces ont une infinité de plans diamétraux, mais ces plans affectent, en général, toutes sortes de directions ; en sorte qu'il n'est aucun point de l'espace par lequel on ne puisse en concevoir un.

Soient présentement trois droites quelconques

$$(2)\left\{\begin{array}{l} x=mz+g\,, \\ y=nz+h\,; \end{array}\right. \quad (2')\left\{\begin{array}{l} x=m'z+g'\,, \\ y=n'z+h'\,; \end{array}\right. \quad (2'')\left\{\begin{array}{l} x=m''z+g''\,, \\ y=n''z+h''\,; \end{array}\right.$$

les équations des plans diamétraux qui couperont en deux parties égales les cordes parallèles à ces droites seront respectivement

$$(Am+C'n+B')x+(C'm+Bn+A')y+(B'm+A'n+C)z+(A''m+B''n+C'')=0\,, \quad (5)$$

$$(Am'+C'n'+B')x+(C'm'+Bn'+A')y+(B'm'+A'n'+C)z+(A''m'+B''n'+C'')=0\,, \quad (5')$$

$$(Am''+C'n''+B')x+(C'm''+Bn''+A')y+(B'm''+A'n''+C)z+(A''m''+B''n''+C'')=0\,. \quad (5'')$$

Or, la droite (2) étant prise arbitrairement, ce qui fixe la situation du plan (5), on peut toujours assujettir les droites (2′), (2″) à être parallèles à ce plan ; et, comme par ces conditions elles demeurent encore indéterminées, on peut en outre assujettir l'une d'elles à être parallèle au plan que détermine l'autre. En se rappelant donc la condition de parallélisme entre un plan et une droite dans l'espace, cela donnera les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} C+Amm'+Bnn'+C'(mn'+m'n)+B'(m+m')+A'(n+n')=0\,, \\ C+Am'm''+Bn'n''+C'(m'n''+m''n')+B'(m'+m'')+A'(n'+n'')=0\,, \\ C+Am''m+Bn''n+C'(m''n+mn'')+B'(m''+m)+A'(n''+n)=0\,; \end{array}\right\} (6)$$

puis donc que ces équations sont symétriques en m et n, m' et n', m'' et n'', il en faut conclure qu'alors chacun des plans (5), (5'), (5'') coupera en deux parties égales les cordes parallèles à l'intersection des deux autres. Les trois plans d'un pareil système sont ce qu'on appelle des *plans conjugés*, et leurs intersections deux à deux, lesquelles ont évidemment leur milieu commun au point d'intersection des trois plans, sont ce qu'on appelle des *diamètres conjugués*. Ainsi, non seulement les surfaces du second ordre ont une infinité de systèmes de diamètres conjugués, mais ces diamètres affectent en général toutes sortes de directions, en sorte qu'on peut toujours trouver un système de tels diamètres, et même une infinité, où l'un de ces diamètres passera par un point donné arbitrairement.

Que les plans diamétraux donnés par les équations (5), (5'), (5'') soient conjugués ou non conjugués, si l'on prend successivement la somme des produits de ces équations $m'-m''$, $m''-m$, $m-m'$, par $n'-n''$, $n''-n$, $n-n'$, et par $m'n''-m''n'$, $m''n-mn''$, $mn'-m'n$, en divisant, dans chaque cas, l'équation resultante par $m'n''-m''n'+m''n-mn''+mn'-m'n$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} Ax+C'y+B'z+A''=0\ , \\ C'x+By+A'z+B''=0\ , \\ B'x+A'y+Cz+C''=0\ ; \end{array}\right\}\quad(7)$$

équations qui, ayant lieu en même temps que les équations (5), (5'), (5''), pourront conséquemment leur être substituées, dans la recherche du point d'intersection des trois plans qu'expriment celles-ci ; puis donc que les équations (7) sont indépendantes de m, n, m', n', m'', n'', il faut en conclure que les plans diamétraux des surfaces du second ordre se coupent tous au même point ; il est de plus facile de voir, par ce qui a été dit ci-dessus, que toutes les cordes qui passent par ce point doivent y avoir leur milieu, et en conséquence on l'appelle le *centre* de la surface.

Nous remarquerons, avant d'aller plus loin, que les équations (7) n'étant autre chose que ce que devient l'équation (5) lorsqu'on y fait successivement $m=\infty$, $n=\infty$, $m=n=0$, il s'ensuit que ces équations sont respectivement celles des plans diamétraux qui coupent en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des x, les cordes parallèles à l'axe des y, et les cordes parallèles à l'axe des z ; c'est-à-dire, en d'autres termes, que ces équations sont celles des plans conjugués aux diamètres respectivement parallèles aux trois axes.

Si donc les axes des coordonnées étaient parallèles à trois diamètres conjugués ou, ce qui revient au même, si les plans coordonnés étaient respectivement parallèles à trois plans diamétraux conjugués ; des trois équations (7) la première ne devrait renfermer que x seulement, la seconde que y et la troisième que z ; on devrait donc avoir, dans ces équations, et conséquemment dans l'équation (1)

$$A'=0\,,\quad B'=0\,,\quad C'=0\,.$$

Ainsi, le parallélisme des axes des coordonnées avec trois diamètres conjugués jouit de la propriété de priver l'équation (1) des rectangles des coordonnées ; et il est de plus aisé de voir que c'est là la seule circonstance où elle puisse en être privée.

Si le centre de la surface se trouvait à l'origine, les équations (7) devraient être celles de trois plans passant par cette origine ; on devrait donc avoir, à la fois,

$$A''=0\,,\quad B''=0\,,\quad C''=0\,.$$

Ainsi, la situation du centre à l'origine des coordonnées jouit de la propriété de priver l'équation (1) des premières puissances des trois variables, et il est de plus aisé de voir qu'elle en jouit exclusivement.

Si donc on prend pour axes des coordonnées trois diamètres conjugués quelconques, l'équation (1) prendra la forme très-simple

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0\,, \qquad (8)$$

sous

sous laquelle la discussion en deviendra incomparablement plus facile (*).

Mais tout ceci suppose que les équations (7) donnent pour x, y, z des valeurs finies et déterminées ; en les résolvant par rapport à ces inconnues, on obtient

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{A''(A'^2-BC)+B''(CC'-A'B')+C''(BB'-C'A')}{ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C'}\,,\\ y&=\frac{B''(B'^2-CA)+C''(AA'-B'C')+A''(CC'-A'B')}{ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C'}\,,\\ z&=\frac{C''(C'^2-AB)+A''(BB'-C'A')+B''(AA'-B'C')}{ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C'}\,. \end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Or, si l'on a

$$ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C'=0\,,$$

la surface n'aura point de centre ; ou, pour mieux dire, son centre se trouvant à une distance infinie, ne pourra être pris pour origine. Si une seule des coordonnées du centre était indéterminée, chacune des équations (7) se trouverait comportée par les deux autres, et la surface aurait une infinité de centres, situés sur une droite donnée par le système de deux quelconques de ces équations. Si deux des coordonnées du centre se trouvaient indéterminées, la troisième le serait aussi, alors les trois équations (7) ne seraient point

(*) On remarquera sans doute que la démonstration de la possibilité de ramener l'équation à cette forme, par un choix convenable des coordonnées, assez difficile à établir, dans les autres systèmes de discussion, même en supposant les coordonnées primitives rectangulaires, se présente, pour ainsi dire, d'elle-même dans celui-ci.

distinctes les unes des autres, et le plan exprimé par l'une quelconque d'entre elles deviendrait le lieu des centres. Au surplus, nous verrons bientôt que les surfaces du second ordre peuvent être exprimées par une équation simple qui convient également à celles qui ont un centre et à celles qui en sont dépourvues.

Soient x', y', z' les coordonnées de l'un quelconque des points de la surface courbe, en sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}&Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2A'y'z'+2B'z'x'+2C'x'y'\\&+2A''x'+2B''y'+2C''z'+D=0\ ;\end{aligned}\qquad(10)$$

en désignant, pour abréger, par a, b, c, les coordonnées du centre, les équations du diamètre passant par ce point seront

$$x-x'=\frac{x'-a}{z'-c}(z-z')\ ,\qquad y-y'=\frac{y'-b}{z'-c}(z-z')\ ;\qquad(11)$$

l'équation du plan mené, par l'extrémité de ce diamètre, parallèlement au plan qui contient ses deux conjugués sera, en vertu de l'équation (5)

$$\left.\begin{array}{l}\{A(x'-a)+C'(y'-b)+B'(z'-C)\}(x-x')\\+\{C'(x'-a)+B(y'-b)+A'(z'-C)\}(y-y')\\+\{B'(x'-a)+A'(y'-b)+C(z'-C)\}(z-z')\end{array}\right\}=0.\qquad(12)$$

Mais, en vertu des équations (7), on a

$$-Aa-C'b-B'c=A''\ ,$$

$$-C'a-Bb-A'c=B''\ ,$$

$$-B'a-A'b-C\,c=C''\ ;$$

en conséquence l'équation (12) deviendra

$$\left.\begin{array}{r}(A\,x'+C'y'+B'z'+A'')(x-x')\\+(C'x'+B\,y'+A'z'+B'')(y-y')\\+(B'x'+A'y'+C\,z'+C'')(z-z')\end{array}\right\}=0$$

ou, en développant et transposant

$$(A\,x'+C'y'+B'z'+A'')x$$

$$+(C'x'+B\,y'+A'z'+B'')y$$

$$+(B'x'+A'y'+C\,z'+C'')z$$

$$=Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2A'y'z'+2B'z'x'+2C'x'y'+A''x'+B''y'+C''z'\ ;$$

ou enfin, en ajoutant l'équation de relation (10) et réduisant

$$\left.\begin{array}{r}(A\,x'+C'y'+B'z'+A'')x\\+(C'x'+B\,y'+A'z'+B'')y\\+(B'x'+A'y'+C\,z'+C'')z\end{array}\right\}+A''x'+B''y'+C''z'+D=0\ ;$$

ou encore

$$\begin{array}{c}Axx'+Byy'+Czz'\\+A'(yz'+zy')+B'(zx'+xz')+C'(xy'+yx')\\+A''(x+x')+B''(y+y')+C''(z-z')+D=0\ ;\end{array}\qquad(13)$$

Ce plan a un point commun avec la surface courbe : c'est celui dont les coordonnées sont x', y', z' ; mais il ne saurait en avoir plusieurs ; car, si cela était, en menant par ce même point des parallèles aux deux conjugués du diamètre qui s'y termine, il y en aurait au moins une qui serait une corde de la surface, et qui, au lieu d'avoir son milieu sur le plan diamétral qui doit la couper en deux parties égales, y aurait au contraire son extrémité ; le plan (13) est donc un plan tangent à la surface courbe.

Si l'on suppose que le plan tangent est le plan même des xy, et que le diamètre par l'extremité duquel il passe est l'axe des z, auquel cas le point du contact sera l'origine des coordonnées ; à cause de $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, l'équation (13) deviendra d'abord

$$A''x+B''y+C''z+D=0\ ;$$

et, comme alors elle devra se réduire simplement à $z=0$, on devra avoir

$$A''=0\ ,\quad B''=0\ ,\quad D=0\ .$$

Si de plus les axes des x et des y sont respectivement parallèles à deux conjugués du diamètre qui se confond avec l'axe des z ou, ce qui revient au même, si les plans des xz et des yz sont conjugués à celui auquel le plan des xy est parallèle, on devra avoir en outre, comme ci-dessus,

$$A'=0\ ,\quad B'=0\ ,\quad C'=0\ ,$$

l'équation (1) deviendra donc alors simplement

$$Ax^2+By^2+Cz^2+C''z=0\ ; \qquad (14)$$

et pourra indistinctement exprimer toutes les surfaces du second ordre. Cette dernière équation a donc, dans le fond, autant de généralité que l'équation (1); du moins lorsque cette dernière n'est point généralement absurde; c'est-à-dire, toutes les fois qu'il existe au moins un système de valeurs de x, y, z qui y satisfait. (*)

Les diamètres conjugués rectangulaires d'une surface courbe sont ce qu'on appelle ses *Diamètres principaux*, et leurs extrémités en

---

(*) Sachant ainsi mener un plan tangent à la surface, par un de ses points, il ne sera pas difficile de lui mener une normale par le même point. Il ne s'agira pour cela que de connaître les conditions de perpendicularité entre un plan et une droite. Or, en supposant, pour plus de simplicité, que l'un et l'autre passent par l'origine, que la droite est ($x=mz$, $y=nz$) et que le plan est $z=px+qy$, il suffira d'exprimer que deux points (a, b, c), (a', b', c') pris arbitrairement sur l'une et l'autre sont les extrémités de l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit est à l'origine; cette condition donne

$$\left.\begin{array}{l}(a-a')^2+2(b-b')(c-c')\mathrm{Cos.}\alpha\\+(b-b')^2+2(c-c')(a-a')\mathrm{Cos.}\beta\\+(c-c')^2+2(a-a')(b-b')\mathrm{Cos.}\gamma\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}a^2+b^2+c^2+2bc\mathrm{Cos.}\alpha+2ca\mathrm{Cos.}\beta+2ab\mathrm{Cos.}\gamma\\+a'^2+b'^2+c'^2+2b'c'\mathrm{Cos}\alpha+2c'a'\mathrm{Cos}\beta+2a'b'\mathrm{Cos}\gamma\,;\end{array}\right.$$

ou en réduisant

$$aa'+bb'+cc'+(bc'+cb')\mathrm{Cos.}\alpha+(ca'+ac')\mathrm{Cos.}\beta+(ab'+ba')\mathrm{Cos.}\gamma\,;$$

mais, par la situation des deux points, on a

$$a=mc\,,\quad b=ac\,,\quad c'=pa'+qb'\,;$$

substituant donc, il viendra, en divisant par c, sont les sommets. Pour s'assurer de l'existence de tels diamètres, dans les surfaces du second ordre, et en fixer la direction, il faut joindre aux équations (6) les équations suivantes

$$\left.\begin{aligned}
&1+mm'+nn'+(mn'+m'n)\text{Cos.}\gamma+(m+m')\text{Cos.}\beta+(n+n')\text{Cos.}\alpha=0\,,\\
&1+m'm''+n'n''+(m'n''+m''n')\text{Cos.}\gamma+(m'+m'')\text{Cos.}\beta+(n'+n'')\text{Cos.}\alpha=0\,,\\
&1+m''m+n''n+(m''n+mn'')\text{Cos.}\gamma+(m''+m)\text{Cos.}\beta+(n''+n)\text{Cos.}\alpha=0\,;
\end{aligned}\right\}(15)$$

qui expriment (*) que les diamètres conjugués sont, deux à deux, perpendiculaires l'un à l'autre.

$$\left.\begin{aligned}
&\{(m+p)+np\text{Cos.}\alpha+(1+mp)\text{Cos}\,\beta+n\text{Cos.}\gamma\}a'\\
+&\{(n+q)+mq\text{Cos.}\beta+(1+nq)\text{Cos.}\alpha+m\text{Cos.}\gamma\}b'
\end{aligned}\right\}=0\,;$$

et, comme a', b' doivent demeurer indéterminés et indépendans, les conditions cherchées seront

$$(m+p)+np\text{Cos.}\alpha+(1+mp)\text{Cos.}\beta+n\text{Cos.}\gamma=0\,,$$

$$(n+q)+mq\text{Cos.}\beta+(1+nq)\text{Cos.}\alpha+m\text{Cos.}\gamma=0\,.$$

De là on passera aux plans tangens et aux normales par des points extérieurs et, par suite, aux surfaces coniques circonscrites et à leurs lignes de contact. On sera conduit ainsi à exposer les propriétés des surfaces du second ordre, relativement à ce qu'on est convenu d'appeler leurs pôles. On pourra consulter à ce sujet, ce qui a été dit aux pages 293 et 302 du 3.me volume de ce recueil.

(*) Soient, en effet, $(x=mz\,,\,y=nz)$, $(x=m'z\,,\,y=n'z)$ deux droites que, pour plus de simplicité, nous supposons passer par l'origine ; nous exprimerons qu'elles sont perpendiculaires l'une à l'autre, en exprimant que deux points $(a\,,b\,,c)$, Telles sont donc les équations qui, combinées avec les équations (6), feront connaître m et n, m' et n', m'' et n''; et, comme ces trois couples de quantités y entrent symétriquement, on est en droit d'en conclure qu'elles doivent dépendre d'une même équation du troisième degré, et que conséquemment les surfaces du second ordre n'ont qu'un système unique de diamètres principaux; c'est ce que le calcul va confirmer.

Si l'on prend successivement la difference des produits respectifs de la première et de la dernière des équations (6) par m'' et m et par n'' et n, les équations résultantes pourront être écrites ainsi:

$$(B'm+A'n+C)(m'-m'')+(C'm+Bn+A')(m'n''-n'm'')=0\,, \qquad (16)$$

$$(B'm+A'n+C)(n''-n')+(Am+C'n+B')(m'n''-n'm'')=0\,, \qquad (17)$$

En opérant exactement de la même manière sur la première et sur la dernière des équations (15), les deux équations résultantes pourront être mises sous cette forme:

$$(m\text{Cos.}\beta+n\text{Cos.}\alpha+1)(m'-m'')+(m\text{Cos.}\gamma+n+\text{Cos.}\alpha)(m'n''-n'm'')=0\,, \qquad (18)$$

$$(m\text{Cos}\,\beta+n\text{Cos.}\alpha+1)(n''-n')+(m+n\text{Cos.}\gamma+\text{Cos.}\beta)(m'n''-a'm'')=0\,. \qquad (19)$$

(a', b', c'), pris respectivement sur ces deux droites, sont les extrémités de l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit est à l'origine. Cette condition donnera, comme dans la note précédente;

$$aa'+bb'+cc'+(bc'+cb')\text{Cos.}\alpha+(ca'+ac')\text{Cos.}\beta+(ab'+ba')\text{Cos}\,\gamma\,;$$

mais on aura ici

$$a=mc\,,\quad b=nc\,,\quad a'=m'c'\,,\quad b'=n'c'\,;$$

ce qui donnera, en substituant et divisant par cc', la première des équations mentionnées dans le texte.

Or, en éliminant $m'-m''$ entre les équations (16) et (18), et $n''-n'$ entre les équations (17) et (19), $m'n''-n'm''$ disparaîtra de lui-même des équations résultantes, et elles seront,

$$\left.\begin{array}{l}(m\text{Cos.}\gamma+n+\text{Cos.}\alpha)(B'm+A'n+C)-(m\text{Cos.}\beta+n\text{Cos.}\alpha+1)(C'm+Bn+A')=0,\\(m+n\text{Cos.}\gamma+\text{Cos.}\beta)(B'm+A'n+C)-(m\text{Cos.}\beta+n\text{Cos.}\alpha+1)(Am+C'n+B')=0;\end{array}\right\}(20)$$

De ces deux équations on déduirait une équation finale en m, qui serait du troisième degré seulement, et dont par conséquent les racines seraient les valeurs de m, m', m''. On aurait de plus une valeur de n fonction de m, laquelle deviendrait n' et n'', en y changeant m en m' et m''; mais il sera plus convenable d'opérer comme il suit.

Soient x, y, z les coordonnées de l'un quelconque des sommets de la surface courbe, et r sa distance au centre ou la longueur du demi-diamètre principal qui lui répond; en continuant, pour abréger, de représenter par a, b, c les coordonnées du centre, données par les formules (9), nous aurons, à la fois,

$$\left.\begin{array}{l}(x-a)^2+2(y-b)(z-c)\text{Cos.}\alpha\\+(y-b)^2+2(z-c)(x-a)\text{Cos.}\beta\\+(z-c)^2+2(x-a)(y-b)\text{Cos.}\gamma\end{array}\right\}=r^2; \qquad (21)$$

$$x-a=m(z-c); \qquad y-b=n(z-c); \qquad (22)$$

en outre l'équation (1) peut facilement être mise sous cette forme

$$A(x-a)^2+B(y-b)^2+C(z-c)^2$$

$$+2A'(y-b)(z-c)+2B'(z-c)(x-a)+2C'(x-a)(y-b)$$

+2

$$+2(Aa+C'b+B'c+A'')x$$

$$+2(C'a+Bb+A'c+B'')y$$

$$+2(B'a+A'b+Cc+C'')z$$

$$+D-Aa^2-Bb^2-Cc^2-2A'bc-2B'ca-2C'ab=0\ ;$$

posant, pour abréger,

$$Aa^2+Bb^2+Cc^2+2A'bc+2B'ca+2C'ab-D=\Delta\ ;$$

et remarquant qu'en vertu des équations (7) les coefficiens des premières puissances de x, y, z sont nuls, elle deviendra simplement

$$A(x-a)^2+B(y-b)^2+C(z-c)^2$$

$$+2A'(y-b)(z-c)+2B'(z-c)(x-a)+2C'(x-a)(y-b)=\Delta\,. \quad (23)$$

Cela posé; si, dans les équations (21) et (23), on introduit, pour $x-a$ et $y-b$ les valeurs données par les équations (22), elles deviendront

$$\left.\begin{aligned}(z-c)^2\{1+m^2+n^2+2n\mathrm{Cos}.\alpha+2m\mathrm{Cos}.\beta+2mn\mathrm{Cos}.\gamma\}&=r^2\ ,\\(z-c)^2\{C+Am^2+Bn^2+2A'n+2B'm+2C'mn\}&=\Delta\ ;\end{aligned}\right\}(24)$$

équations entre lesquelles éliminant $(z-c)^2$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}(Ar^2-\Delta)m^2+(Br^2-\Delta)n^2+2(C'r^2-\Delta\text{Cos.}\gamma)mn \\ +2(B'r^2-\Delta\text{Cos.}\beta)m+2(A'r^2-\Delta\text{Cos.}\alpha)n+(Cr^2-\Delta)=0\end{array}\right\}\quad(25)$$

éliminant enfin m et n entre cette équation et les équations (20) on aura d'abord

$$\begin{array}{l}(ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C')r^6 \\[2mm] -\Delta\left\{\begin{array}{l}(BC-A'^2)+2(B'C'-AA')\text{Cos.}\alpha \\ +(CA-B'^2)+2(C'A'-BB')\text{Cos.}\beta \\ +(AB-C'^2)+2(A'B'-CC')\text{Cos.}\gamma\end{array}\right\}r^4 \\[2mm] +\Delta^2\left\{\begin{array}{l}A\text{Sin.}^2\alpha-2A'(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos}\,\beta\text{Cos.}\gamma) \\ +B\text{Sin.}^2\beta-2B'(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha) \\ +C\text{Sin.}^2\gamma-2C'(\text{Cos}\,\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)\end{array}\right\}r^2 \\[2mm] -\Delta^3(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=0\,,\end{array}\quad(26)$$

et ensuite

$$\left.\begin{array}{l}m=\dfrac{(A'r^2-\Delta\text{Cos.}\alpha)(C'r^2-\Delta\text{Cos.}\gamma)-(Br^2-\Delta)(B'r^2-\Delta\text{Cos.}\beta)}{(Ar^2-\Delta)(Br^2-\Delta)-(C'r^2-\Delta\text{Cos.}\gamma)^2}\,, \\[4mm] n=\dfrac{(B'r^2-\Delta\text{Cos.}\beta)(C'r^2-\Delta\text{Cos.}\gamma)-(Ar^2-\Delta)(A'r^2-\Delta\text{Cos.}\alpha)}{(Ar^2-\Delta)(Br^2-\Delta)-(C'r^2-\Delta\text{Cos.}\gamma)^2}\,.\end{array}\right\}\quad(27)$$

L'équation (26) donnera les longueurs des demi-diamètres principaux; les formules (27) en détermineront la direction, et ensuite l'une des équations (24), combinée avec les équations (22), fera connaître les sommets.

Parvenus à l'équation (26), on pourra poursuivre la discussion, comme l'a fait M. Bérard, à la page 110 du troisième volume de ce recueil.

Dans le cas particulier où l'on aura

$$ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2ABC=0\ ; \qquad (28)$$

la surface, n'ayant point de centre, n'aura qu'un seul diamètre principal que l'on pourra determiner comme il suit : les équations (16) du diamètre deviendront alors

$$x-x'=\frac{A''(A'-BC)+B''(CC'-A'B')+C''(BB'-C'A')}{C''(C'^2-AB)+A''(BB'-C'A')+B''(AA'-B'C')}(z-'z)\ ,$$

$$y-y'=\frac{B''(B'^2-CA)+C''(AA'-B'C')+A''(CC'-A'B')}{C''(C'^2-AB)-A''(BB'-C'A')+B''(AA'-B'C')}(z-z')\ ;$$

En exprimant donc que ce diamètre est perpendiculaire au plan tangent à son extrémité, donné par l'équation (13), on aura deux équations en x', y', z' qui, combinées avec l'équation (10), ne donneront, pour ces trois coordonnées, en ayant égard à la relation (28), qu'un seul système de valeurs lesquelles seront les coordonnées du sommet cherché. Il est aisé de voir qu'alors tous les diamètres seront parallèles.

Lorsque, comme on le fait ordinairement dans les traités élémentaires, on suppose les axes des coordonnées rectangulaires, les dernières recherches et les résultats qu'on en obtient se simplifient considérablement.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 384 du 4.e volume de ce recueil;

Par un ABONNÉ.

THÉORÈME I. *Si deux ellipses, tellement situées sur un plan que deux diamètres conjugués de l'une soient respectivement parallèles à deux diamètres conjugués de l'autre, se coupent en quatre points; ces quatre points seront sur une troisième ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux seront respectivement parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose être déjà parallèles dans les deux premières.*

Démonstration. Soient pris les axes des coordonnées respectivement parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose l'être dans les deux ellipses dont il s'agit; les équations de ces deux ellipses seront de la forme

$$\left.\begin{aligned} Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+K&=0\,, \\ A'x^2+B'y^2+2D'x+2E'y+K'&=0\,. \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Or, il est connu que, lorsque deux courbes sont rapportées aux mêmes axes, toute combinaison de leurs équations appartient à une troisième courbe qui coupe chacune d'elles aux mêmes points où elles se coupent elles-mêmes.

Soit donc ajouté au produit de la première des deux équations ci-dessus par $B'-A'$ le produit de la seconde par $A-B$, il viendra en réduisant

$$\begin{gathered}(AB'-BA')x^2+(AB'-BA')y^2\\ +2\{D'(A-B)-D(A'-B')\}x+2\{E'(A-B)-E(A'-B')\}y \quad (2)\\ +\{K'(A-B)-K(A'-B')\}=0\ ;\end{gathered}$$

équation d'une courbe qui contient les quatre intersections des deux premières ; or, on voit que cette courbe est une ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux sont respectivement parallèles aux axes des coordonnées, c'est-à-dire, aux diamètres conjugués que l'on suppose être parallèles dans les deux premières; ce qui démontre la proposition annoncée.

Si l'on suppose les axes des coordonnées rectangulaires, on aura, pour ce cas particulier, la proposition suivante :

COROLLAIRE. *Si deux ellipses dont les axes sont respectivement parallèles se coupent en quatre points, ces quatre points seront sur une même circonférence.* (*)

Ce qui précède ne supposant aucunement que les quatre coefficiens A, B, A', B' soient plutôt de mêmes signes que de signes différens, il s'ensuit que la proposition a également lieu, lorsque

(*) Ce cas particulier avait été proposé par M. Bérard qui en avait fourni une démonstration assez simple que nous aurions mentionnée ici, si celle que l'on vient de voir ne se trouvait la comprendre.

J. D. G.

les courbes données, au lieu d'être deux ellipses, sont deux hyperboles, ou bien une ellipse et une hyperbole. Enfin l'un des deux coefficiens A, B ou l'un des coefficiens A', B' pouvant être supposé nul ; il s'ensuit que la proposition est encore vraie, lors même que l'une des courbes données ou toutes les deux sont deux paraboles.

Si, au lieu de multiplier respectivement les équations (1) par $B'-A'$ et $A-B$, on les eût multipliées par $-A'-B'$ et $+A+B$, l'équation (3) eût été celle d'une hyperbole équilatérale rapportée à deux axes parallèles à deux diamètres conjugués parallèles eux-mêmes aux diamètres conjugués que l'on suppose être parallèles dans les deux premières courbes ; ce qui peut fournir de nouveaux théorèmes.

THÉORÈME II. *Si trois ellipsoïdes, tellement situés dans l'espace que trois diamètres conjugués de l'un quelconque soient respectivement parallèles à trois diamètres conjugués de chacun des deux autres, se coupent en huit points ; ces huit points seront à la surface d'un quatrième ellipsoïde dans lequel les diamètres conjugués égaux seront respectivement parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose être déjà parallèles dans les trois premiers.*

Démonstration. Soient pris les axes des coordonnées respectivement parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose l'être déjà dans les trois ellipsoïdes dont il s'agit ; les équations de ces ellipsoïdes seront de la forme

$$\left.\begin{array}{l} A\,x^2+B\,y^2+C\,z^2+2D\,x+2E\,y+2F\,z+K=0\,, \\ A'x^2+B'y^2+C'z^2+2D'x+2E'y+2F'z+K'=0\,, \\ A''x^2+B''y^2+C''z^2+2D''x+2E''y+2F''z+K''=0\,. \end{array}\right\}\quad(1)$$

Or, il est connu que, lorsque trois surfaces sont rapportées aux mêmes axes, toute combinaison de leurs équations appartient à une quatrième surface qui contient les points d'intersection des trois premières.

Soit donc prise la somme des produits respectifs des équations (1) par

$$A'B''-B'A''+B'C''-C'B''+C'A''-A'C'' \,,$$

$$A''B-B''A+B''C-C''B+C''A-A''C \,,$$

$$A\,B'-B\,A'+B\,C'-C\,B'+C\,A'-A\,C' \,;$$

il viendra, en réduisant,

$$(AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A'')x^2$$

$$+(AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A'')y^2$$

$$+(AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A'')z^2$$

$$+\text{Etc.}\ldots=0\,;$$

équation d'une surface qui contient les huit intersections des trois premières ; or, on voit que cette surface est un ellipsoïde dans lequel les diamètres conjugués égaux sont respectivement parallèles aux axes des coordonnées, c'est-à-dire, aux diamètres conjugués que l'on suppose être parallèles dans les trois premiers ; ce qui démontre la proposition annoncée.

Si l'on suppose les axes des coordonnées rectangulaires, on aura, pour ce cas particulier, la proposition suivante :

COROLLAIRE. *Si trois ellipsoïdes, tellement situés dans l'espace* *que leurs axes soient respectivement parallèles, se coupent en huit points; ces huits points seront à la surface d'une même sphère.*

On pourrait faire ici des remarques analogues à celles qui ont été faites sur le premier théorème; on parviendrait ainsi à établir que les trois premières surfaces peuvent être trois surfaces quelconques du second ordre, et que la quatrième peut être une quelconque de celles d'entre elles qui sont pourvues de centres.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. ON demande trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres, et qui satisfassent de plus aux conditions suivantes: 1.° que les points de contact de l'un d'entre eux avec les deux autres soient deux points donnés; 2.° que ces deux derniers touchent une même droite donnée?

II. On demande trois cercles A, B, C, tels que chacun d'eux touche les deux autres, et qui satisfassent de plus aux conditions suivantes: 1.° que le point de contact de A et B soit un point donné; 2.° que A et C soient tangens à une même droite donnée; 3.° que B et C soient aussi tangens à une même droite donnée?

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul differentiel ;

Par M. SERVOIS , professeur aux écoles d'artillerie. (*)

» A mesure que (l'analise) s'étend et s'enrichit de
» nouvelles méthodes, elle devient plus compliquée,
» et l'on ne peut la simplifier qu'en généralisant
» et en réduisant, tout à la fois, les méthodes qui
» peuvent être susceptibles de ces avantages. »
(*Mécanique analitique*, page 338.)

1. JE commence par fixer quelques notations et par donner quelques définitions.

J'exprime

Par $\mathrm{f}z$, fz, Fz, φz,..... des fonctions quelconques de la quantité quelconque z : je les appelle *Fonctions monômes simples*.

Par $\mathrm{f}fz$, $\mathrm{f}fFz$,..... des fonctions de fonctions de z : ce sont des *Fonctions monômes composées*.

(*) Ce qu'on va lire est, en substance, extrait de deux mémoires, sur le développement des fonctions en séries, par la méthode différentielle, présentés à la première classe de l'institut, le 1.er, vers la fin de 1805, le 2.me, en 1809, et qui ont reçu l'approbation de la classe, sur un rapport de MM. Legendre et Lacroix, en date du 5 d'octobre 1812.

Par fz, f^2z, f^3z, ...f^nz, la fonction marquée par f, prise successivement 1 fois, 2 fois, 3 fois.....n fois, de la quantité z : ce sont des *Fonctions monômes du* 1^er^, *du* 2.^e^, *du* 3.^e^, ...*du* n.^me^ *ordre* : n est l'*exposant* de l'ordre de la fonction.

Par $f^{-1}z$, $f^{-2}z$, ...$f^{-n}z$, des fonctions de z dont la définition complète est donnée par l'équation générale

$$f^nf^{-n}z = f^{-n}f^nz = z : \qquad (1)$$

ce sont des *Fonctions inverses* ou d'*Ordre négatif.*

Si la quantité sous le signe fonctionnaire, c'est-à-dire, le *sujet de la fonction*, est polynôme, on le met entre parenthèses. Ainsi, $f(a+z)$ désigne la fonction f du binôme $a+z$. Lorsque le sujet de la fonction est regardé comme complexe, on emploie, avec les parenthèses, des virgules interposées entre les *sujets partiels.* Ainsi $f[x, (b+y), z, \ldots]$ exprime la fonction f des quantités x, $b+y$, z, ...

Si $fz = z$; c'est-à-dire, si le sujet n'est pris qu'une fois, la fonction f est le facteur 1. Si $fz = az$, ou si le sujet est pris a fois, la fonction f est le facteur a.

En supposant que le sujet z soit complexe, par exemple, $z = \varphi(x, y, \ldots..)$, x, y, ... étant des *quantités variables*, arbitraires ou indépendantes qui reçoivent respectivement les accroissemens invariables ou constans quelconques α, β, ..., si on a

$$fz = \varphi(x+\alpha, y+\beta, \ldots.),$$

la fonction f est ce qu'on appelle l'*état varié* de z. Je propose, avec Arbogast (*Calculs des dérivations*, n.° 442) de désigner cette fonction particulière par la lettre E ; et j'adopte les définitions suivantes

$$\left.\begin{array}{l} E\ z = \varphi(x+\alpha, y+\beta, \ldots..), \\ E^{-1}z = \varphi(x-\alpha, y-\beta, \ldots..), \\ E^nz = \varphi(x+n\alpha, y+n\beta, \ldots..). \end{array}\right\} (2)$$

Si $fz = Ez - z$, la fonction f est ce qu'on appelle la *différence* de z, à laquelle est consacrée, depuis long-temps, la lettre Δ. Ainsi, on a les définitions

$$\Delta z = Ez - z = \varphi(x+\alpha\,,\, y+\beta\,,\ldots\ldots) - \varphi(x\,,\, y\,,\ldots.)\,. \qquad (3)$$

On conclut de là, sur-le-champ, cette autre expression de l'état varié

$$Ez = z + \Delta z\,. \qquad (4)$$

Quand le sujet z est complexe, on a souvent besoin d'exprimer que la fonction f n'est prise que par rapport à un seul *sujet partiel*. Si donc l'on veut exprimer que la fonction f n'est prise que par rapport à x, on écrira $\frac{f}{x}z$; si la fonction ne doit atteindre que y, on écrira $\frac{f}{y}z$, et ainsi de suite. $\frac{f}{x}z$, $\frac{f}{y}z$,.... sont donc les *fonctions* f *partielles de* z. Ainsi, a étant un facteur, on aura la définition suivante du facteur a partiel

$$\frac{a}{x}z = \varphi(ax\,,\, y\,,\ldots.)\,.$$

De même, d'après (2), (3), on aura les définitions suivantes des *états variés partiels* et des *différences partielles*

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{E^n}{x}z = \varphi(x+n\alpha\,,\, y\,,\ldots.)\;;\quad \frac{E^n}{y}z = \varphi(x\,,\, y+n\beta\,,\ldots.)\;;\\
&\frac{\Delta}{x}z = \varphi(x+\alpha\,,\, y\ldots.) - \varphi(x\,,\, y\,,\ldots.) = \frac{E}{x}z - z\;;\\
&\frac{\Delta}{y}z = \varphi(x\,,\, y+\beta\,,\ldots.) - \varphi(x\,,\, y\,,\ldots.) = \frac{E}{y}z - z\,.
\end{aligned}\right\}\quad (5)$$

$f^0 z$ est toujours égal à z; car, l'expression elle-même indique qu'on ne prend pas la fonction f de z, et par conséquent qu'à cet égard z ne subit aucune modification. Ainsi

$$z=a^{\circ}z=E^{\circ}z=\Delta^{\circ}z=\frac{E^{0}}{x}z=\frac{E^{0}}{y}z=\ldots\ldots \qquad (6)$$

Toute fonction inverse admet un *complément arbitraire*, lorsque la fonction directe du 1.er ordre a la propriété d'annuler dans son sujet certains termes, ou d'y rendre égaux à l'unité certains facteurs. Ainsi, par exemple, la différence Δ annulant, entre autres, les termes constans, la fonction inverse $\Delta^{-1}z$ prend, à cet égard, pour complément *additionnel*, la constante arbitraire A.

On a coutume de désigner par Σz, $\Sigma^2 z$, ... $\Sigma^n z$, des fonctions de z qu'on appelle *intégrales*, et dont la définition est dans l'équation

$$\Delta^n\Sigma^n z=\Sigma^n\Delta^n z=z\ ;$$

et, comme on a aussi (1)

$$\Delta^n\Delta^{-n}z=\Delta^{-n}\Delta^n z=z\ ;$$

il s'ensuit que

$$\Sigma^n z=\Delta^{-n}z\ . \qquad (7)$$

Par la même raison, L étant la notation du logarithme naturel, et e celle de la base du système, on aura

$$\mathrm{L}\mathrm{L}^{-1}z=z=\mathrm{L}e^{z}\ ;\quad \mathrm{L}^2\mathrm{L}^{-2}z=z=\mathrm{L}^2e^{e^{z}}\ ;\ldots\ldots$$

Donc aussi

$$e^{z}=\mathrm{L}^{-1}z\ ;\quad e^{e^{z}}=\mathrm{L}^{-2}z\ ;\ldots\ldots \qquad (8)$$

On trouvera de même

$$\mathrm{Sin.}^{-1}z=\mathrm{Arc.}(\mathrm{Sin.}=z)\ ;\quad \mathrm{Tang.}^{-1}z=\mathrm{Arc.}(\mathrm{Tang.}=z)\ ;\ldots\ldots \qquad (9)$$

car on a

$$z = \text{Sin.Sin.}^{-1}z = \text{Sin.Arc.}(\text{Sin.}=z)$$

$$= \text{Tang.Tang.}^{-1}z = \text{Tang.Arc.}(\text{Tang.}=z)\ ;$$

Pour prévenir toute méprise, le produit de fx par fy sera représenté par fx . fy. L'expression fxfy signifierait la fonction f du produit de x par fy. La puissance n de fx sera indiquée par $(\mathrm{f}x)^n$. L'expression fx^n désignant la fonction f de la puissance n de x.

2. Soit

$$Fz = \mathrm{f}z + fz + \varphi z + \ldots\ldots ; \qquad (10)$$

c'est-à-dire, supposons que la fonction F de z est telle que, pour la former, il faut, à la fonction f de z, *ajouter* (algébriquement) une seconde fonction f de la même lettre, puis une troisième marquée par φ, et ainsi de suite. La fonction F est alors de la classe des *fonctions polynômes*. On peut indiquer cette signification de la fonction F par une notation très-expressive, qui a le grand avantage de permettre de traiter les fonctions polynômes comme des fonctions monômes, sans perdre de vue de quelle manière elles sont composées. On écrit pour cela

$$\mathrm{F}z = (\mathrm{f} + f + \varphi + \ldots)z\ ;$$

il en résulte qu'on a aussi

$$\mathrm{F}^n z = (\mathrm{f} + f + \varphi + \ldots\ldots)^n z\ . \qquad (11)$$

Si F′ est une autre fonction polynôme de z, donnée par l'équation

$$\mathrm{F}'z = (\mathrm{f}' + f' + \varphi' + \ldots\ldots)z\ ,$$

on pourra aussi exprimer qu'on prend la fonction F′ de Fz, en écrivant

$$\mathrm{F}'\mathrm{F}z = (\mathrm{f}' + f' + \varphi' + \ldots)(\mathrm{f} + f + \varphi + \ldots)z\ ; \qquad (12)$$

et ainsi de suite.

Rien n'empêche qu'une, plusieurs ou toutes les *fonctions monômes composantes* ne soient des *facteurs*. Dans le dernier cas, après en avoir averti, on saura, sans équivoque (11), (12), que $\mathrm{F}z$, $\mathrm{F}'\mathrm{F}z$,.... sont les produits de z multiplié par le polynôme $\mathrm{f}+f+\varphi+\ldots.$, ou par le produit $(\mathrm{f}'+f'+\varphi'+\ldots)(\mathrm{f}+f+\varphi+\ldots)$.

3. Soit

$$\varphi(x+y+\ldots..)=\varphi x+\varphi y+\ldots. \qquad (13)$$

Les fonctions qui, comme φ, sont telles que la fonction de la *somme* (algébrique) d'un nombre quelconque de quantités est égale à la somme des fonctions pareilles de chacune de ces quantités, seront appelées *distributives*.

Ainsi, parce que

$$a(x+y+\ldots)=ax+ay+\ldots;\quad \mathrm{E}(x+y+\ldots)=\mathrm{E}x+\mathrm{E}y+\ldots;\ldots$$

le facteur a, l'état varié E,.... sont des fonctions distributives; mais, comme on n'a pas

$$\mathrm{Sin.}(x+y+\ldots)=\mathrm{Sin.}x+\mathrm{Sin.}y+\ldots;\ \mathrm{L}(x+y+\ldots)=\mathrm{L}x+\mathrm{L}y+\ldots;\ldots$$

les sinus, les logarithmes naturels,..... ne sont point des fonctions distributives.

4. Soit

$$\mathrm{f}fz=f\mathrm{f}z\ . \qquad (14)$$

Les fonctions qui, comme f et f, sont telles qu'elles donnent des résultats identiques, quel que soit l'ordre dans lequel on les applique au sujet, seront appelées *commutatives entre elles*.

Ainsi, parce qu'on a

$$abz=baz\ ;\quad a\mathrm{E}z=\mathrm{E}az\ ;\ldots.$$

les facteurs constans a, b, le facteur constant a et l'état varié E, sont des fonctions commutatives entre elles; mais comme, a étant toujours constant et x variable, on n'a pas

$$\mathrm{Sin.}az=a\mathrm{Sin.}z\ ;\quad \mathrm{E}xz=x\mathrm{E}z\ ;\quad \Delta xz=x\Delta z\ ;\ldots.;$$

il s'ensuit que le sinus avec le facteur constant, l'état varié ou la différence avec le facteur variable,..... n'appartiennent point à la classe des fonctions commutatives entre elles.

5. On recueille de ces simples notions plusieurs théorèmes importans.

Si deux fonctions simples φ, ψ sont distributives, la fonction monôme composée sera aussi distributive; car puisque, par hypothèse

$$\psi(x+y)=\psi x+\psi y\ ,\quad \varphi(t+u)=\varphi t+\varphi u\ ,$$

on aura évidemment

$$\varphi\psi(x+y)=\varphi(\psi x+\psi y)=\varphi(t+u)=\varphi t+\varphi u=\varphi\psi t+\varphi\psi u\ .$$

Il suit de là immédiatement que les différens ordres d'une fonction distributive sont aussi des fonctions distributives.

6. Si les fonctions monômes f, f, φ,..... composantes de la fonction polynôme F sont distributives, la fonction polynôme F aura aussi la même propriété; car, d'après la définition (10) on aura

$$\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{f}(x+y)+f(x+y)+\varphi(x+y)+\ldots.;$$

mais, parce que f, f, φ, sont distributives, cette équation deviendra

$$\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{f}x+fx+\varphi x+\ldots..+\mathrm{f}y+fy+\varphi y+\ldots..=\mathrm{F}x+\mathrm{F}y.$$

On dira la même chose (n.° 5) des différens ordres F^n de la même fonction.

7. Si les fonctions f, f, φ,.... sont commutatives entre elles deux à deux, de manière qu'on ait

$$\mathrm{f}fz=f\mathrm{f}z\ ,\quad \mathrm{f}\varphi z=\varphi\mathrm{f}z\ ,\quad f\varphi z=\varphi fz\ ,\ldots..;$$

et si ensuite, ayant pris un certain nombre n de ces fonctions, on en forme toutes les fonctions monômes composées que peut fournir la permutation entre eux des n signes fonctionnaires, toutes les fontions monômes composées résultantes seront équivalentes.

Ainsi, par exemple, si l'on prend les trois premières f, f, φ, on aura

$$\mathrm{f}f\varphi z=f\mathrm{f}\varphi z=\mathrm{f}\varphi fz=\varphi\mathrm{f}fz=f\varphi\mathrm{f}z=\varphi f\mathrm{f}z\ .$$

Pour le démontrer généralement, considérons la fonction monôme

$$f\ldots\mathrm{f}\varphi\psi F\ldots z$$

on pourra, sans en changer la valeur, permuter entre elles deux lettres fonctionnaires consécutives quelconques φ, ψ, par exemple. Car, soit

$$F\ldots z=t\ ,$$

on aura

$$\varphi\psi F\ldots z=\varphi\psi t\ ;$$

or, par hypothèse,

$$\varphi\psi t=\psi\varphi t\ ;$$

donc

$$\varphi\psi F\ldots z=\psi\varphi F\ldots z\ ;$$

et, en prenant, de part et d'autre, la fonction composée,

$$f\ldots\mathrm{f}\varphi\psi F\ldots z=f\ldots\mathrm{f}\psi\varphi F\ldots z\ .$$

Il suit de là que chaque lettre fonctionnaire peut être amenée à quelle place on veut de la combinaison première, et partant qu'on peut faire subir aux lettres fonctionnaires toutes les permutations possibles, sans altérer la valeur de la fonction composée.

On conclut évidemment de ce théorème que si, avec les lettres fonctionnaires commutatives entre elles deux à deux f, f, φ, ... on forme, à volonté, de nouvelles fonctions, composées de deux, de trois, ... lettres, telles que $\mathrm{f}fz$, $\varphi\psi Fz$, ..., toutes celles-ci seront aussi commutatives entre elles et avec la première.

8. Si f et f sont commutatives entre elles, elles le seront avec leurs inverses qui seront aussi commutatives entre elles, c'est-à-dire, que, si l'on a

$$\mathrm{f}fz=f\mathrm{f}z\ , \qquad (15)$$

on aura aussi

$$\mathrm{f}f^{-1}z=f^{-1}\mathrm{f}z\ ;\quad f\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}^{-1}fz\ ;\quad \mathrm{f}^{-1}f^{-1}z=f^{-1}\mathrm{f}^{-1}z\ . \qquad (16)$$

En effet, on a (1)

$f\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}z$

$$\mathit{f}\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}\mathit{f}z\ ;$$

or, (15)

$$\mathit{f}\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}\mathit{f}\mathrm{f}^{-1}z\ ;$$

donc

$$\mathrm{f}\mathit{f}\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}\mathrm{f}z\ ;$$

et, en prenant de part et d'autre la fonction f^{-1},

$$\mathit{f}\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}^{-1}\mathit{f}z\ .$$

C'est le premier des thèorèmes (16), et le deuxième se démontrerait de la même manière. Quant au troisième on a (1)

$$\mathit{f}^{-1}\mathit{f}\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}^{-1}\mathit{f}^{-1}\mathit{f}z\ ;$$

et, d'après le premier des théorèmes (16),

$$\mathit{f}^{-1}\mathrm{f}^{-1}\mathit{f}z=\mathrm{f}^{-1}\mathit{f}^{-1}\mathit{f}z\ ;$$

laquelle devient le troisième théorème (16), en y changeant $\mathit{f}z$ en z.

9. Des théorèmes (n.os 7, 8) on conclut, sans discussion, les formules qui suivent.

Quand f, f, φ, ... étant commutatives entre elles, k, m, n, ... sont des nombres entiers positifs, on a

$$\mathrm{f}^n\mathit{f}^m z=\mathit{f}^m\mathrm{f}^n z\ ; \qquad (17)$$

puis, en désignant $\mathrm{f}.\mathit{f}z$ par φz,

$$\varphi^n z=\mathrm{f}^n\mathit{f}^n z=\mathit{f}^n\mathrm{f}^n z\ ; \qquad (18)$$

enfin, en désignant $\mathrm{f}^n\mathit{f}^m z$ par ψz,

$$\psi^k z=\mathrm{f}^{kn}\mathit{f}^{km}z=\mathit{f}^{km}\mathrm{f}^{kn}z\ . \qquad (19)$$

10. Si les fonctions monomes d'une fonction polynôme sont à la fois distributives et commutatives entre elles, tous les ordres de la fonction polynôme seront des fonctions distributives (on le sait déjà d'après le n.° 6) et commutatives, non seulement avec les differens ordres des composantes, mais aussi avec tous les ordres des fonctions distributives qui sont commutatives avec ces dernières.

Soit

$$\mathrm{F}z=\mathrm{f}z+fz+\ldots\ldots;$$

et supposons que les distributives f, f,.... soient commutatives tant entre elles qu'avec une distributive quelconque φ. On aura (n.° 6)

$$\mathrm{fF}z=\mathrm{f}^2z+\mathrm{f}fz+\ldots\ldots=\mathrm{f}^2z+f\mathrm{f}z+\ldots\ldots=\mathrm{Ff}z\ .$$

On trouvera de même

$$f\mathrm{F}z=\mathrm{F}fz\ ,\ldots.,\ \varphi\mathrm{F}z=\mathrm{F}\varphi z\ .$$

Ajoutant à cela la considération fournie par la formule (17), la proposition se trouvera complètement démontrée.

11. Si les fonctions monômes de deux fonctions polynômes sont distributives et commutatives entre elles, les deux fonctions polynômes seront distributives (n.° 6) et commutatives entre elles.

Soient, en effet,

$$\mathrm{F}z=\mathrm{f}z+fz+\ldots\ldots;\quad \mathrm{F}'z=\mathrm{f}'z+f'z+\ldots\ldots;$$

on aura évidemment

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{FF}'z&=\mathrm{ff}'z+\mathrm{f}f'z+\ldots.+f\mathrm{f}'z+ff'z+\ldots.\\ \mathrm{F}'\mathrm{F}z&=\mathrm{f}'\mathrm{f}z+\mathrm{f}'fz+\ldots.+f'\mathrm{f}z+f'fz+\ldots.\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

or, d'après l'hypothèse, ces deux développemens sont composés de termes identiques deux à deux; on a donc

$$\mathrm{FF}'z=\mathrm{F}'\mathrm{F}z\ .$$

Si l'on fait ensuite

$$\mathrm{F}''z=\mathrm{f}''z+f''z+\ldots\ldots,$$

en supposant f'' f'',.... distributives et commutatives entre elles et avec f, f,...., f', f',....; F'' sera commutative avec F, F'; et par consequent on aura (n.° 7)

$$\mathrm{FF}'\mathrm{F}''z=\mathrm{FF}''\mathrm{F}'z=\mathrm{F}'\mathrm{FF}''z=\mathrm{F}'\mathrm{F}''\mathrm{F}z=\mathrm{F}''\mathrm{FF}'z=\mathrm{F}''\mathrm{F}'\mathrm{F}z\,;$$

et ainsi du reste.

12. Le développement des fonctions monômes composées, telles

que $FF'z$, $FF'F''z$, ...(n.° 11) dont les fonctions simples sont des fonctions polynômes, lorsque d'ailleurs les fonctions monômes qui composent ces dernières sont distributives et commutatives entre elles, ne présente aucune difficulté. On a, dans les équations (20), le type de celui de $FF'z$; on passe, par le même procédé, de celui-ci à celui de $FF'F''z$, et ainsi de suite; *on sait donc développer les fonctions comprises dans la formule*

$$FF'\ldots z=(\mathrm{f}+f+\ldots)(\mathrm{f}'+f'+\ldots)\ldots z\,. \tag{21}$$

Le développement général d'un ordre quelconque $F^n z$ d'une fonction polynôme Fz, aux fonctions monômes distributives et commutatives, ressortit à la théorie générale du développement des fonctions en séries, dont nous allons exposer les principes.

13. Je suppose qu'on ait respectivement

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha\,,\quad x=\beta\,,\quad x=\gamma\,,\quad x=\delta\,,\ldots, \\ \text{lorsque}\quad \varphi x=0\,,\ \varphi' x=0\,,\ \varphi'' x=0\,,\ \varphi''' x=0\,,\ldots; \end{array}\right\} \tag{22}$$

J'écris la suite indéfinie d'équations

$$\left.\begin{array}{l} F\,x=F\,\alpha+\varphi\,x\,.\,F'\,x\,, \\ F'\,x=F'\,\beta+\varphi'\,x\,.\,F''\,x\,, \\ F''x=F''\gamma+\varphi''x\,.\,F'''x\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right\} \tag{23}$$

équations que je rends identiques, en supposant,

$$F'x=\frac{Fx-F\alpha}{\varphi x}\,,\quad F''x=\frac{F'x-F'\beta}{\varphi' x}\,,\quad F'''x=\frac{F''x-F''\gamma}{\varphi'' x}\,,\ldots \tag{24}$$

Je prends la somme des produits respectifs des équations (23) par 1, φx, $\varphi x.\varphi' x$, $\varphi x.\varphi' x.\varphi'' x$, ..., et j'obtiens, en réduisant,

$$Fx=F\alpha+\varphi x\,.\,F'\beta+\varphi x\,.\,\varphi' x\,.\,F''\gamma+\varphi x\,.\,\varphi' x\,.\,\varphi'' x\,.\,F'''\delta+\ldots \tag{25}$$

Les équations (24) donnent ensuite, sur-le-champ,

$$\left.\begin{array}{llll}
F'\beta = \dfrac{F\beta - F\alpha}{\varphi\beta}, & F'\gamma = \dfrac{F\gamma - F\alpha}{\varphi\gamma}, & F'\delta = \dfrac{F\delta - F\alpha}{\varphi\delta} & ,\ldots, \\[2ex]
F''\gamma = \dfrac{F'\gamma - F'\beta}{\varphi'\gamma}, & F''\delta = \dfrac{F'\delta - F'\beta}{\varphi'\delta}, & F''\varepsilon = \dfrac{F'\varepsilon - F'\beta}{\varphi'\varepsilon} & ,\ldots, \\[2ex]
F'''\delta = \dfrac{F''\delta - F''\gamma}{\varphi''\delta}, & F'''\varepsilon = \dfrac{F''\varepsilon - F''\gamma}{\varphi''\varepsilon}, & F'''\zeta = \dfrac{F''\zeta - F''\gamma}{\varphi\ \zeta} & ,\ldots, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots & ,\ldots,
\end{array}\right\} \quad (26)$$

Or, de celles-ci (26) on tire facilement les coefficiens $F'\beta$, $F''\gamma$, $F'''\delta$, ... de l'equation (25), exprimés par les seules fonctions F, φ, φ', φ'', ... des constantes α, β, γ, ... On a, en effet,

$$\left.\begin{array}{l}
F'\ \beta = \dfrac{(F\beta - F\alpha)}{\varphi\beta}, \\[2ex]
F''\gamma = \dfrac{(F\gamma - F\alpha)}{\varphi\gamma\,.\,\varphi'\gamma} - \dfrac{(F\beta - F\alpha)}{\varphi\beta\,.\,\varphi'\gamma}, \\[2ex]
F'''\delta = \dfrac{(F\delta - F\alpha)}{\varphi\delta\,.\,\varphi'\delta\,.\,\varphi''\delta} - \dfrac{(F\gamma - F\alpha)}{\varphi\gamma\,.\,\varphi'\gamma\,.\,\varphi''\delta} + \dfrac{(F\beta - F\alpha)(\varphi'\delta - \varphi'\gamma)}{\varphi\beta\,.\,\varphi'\gamma\,.\,\varphi'\delta\,.\,\varphi''\delta}, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (27)$$

Voilà la série (25), de forme très-générale, établie analitiquement, par un procédé fort naturel et qui a l'apparence de la plus grande simplicité ; de sorte qu'il semble qu'il n'y ait plus qu'à descendre de là aux différens cas particuliers. Mais on a bientôt remarqué que ce procédé présente aussi de graves inconvéniens. Le premier est de conduire péniblement, même dans les cas les plus simples, à la loi qui règne entre les coefficiens $F'\beta$, $F''\gamma$, ...; le deuxième, et il est majeur, est de ne rien donner dans le cas peut-être le plus utile, celui de l'égalité, en tout ou en partie, entre les constantes α, β, ...; car, alors les coefficiens prennent, tous ou partie, la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. C'est ce qui a lieu, en particulier, quand toutes les fonctions φx, $\varphi' x$, ... sont égales, et par conséquent lorsqu'il s'agit de développer Fx suivant les puissances d'une autre fonction φx, ou bien encore, quand les fonctions φx, $\varphi' x$, ..., étant différentes les unes des autres, sont toutes de la forme $x^n\psi x$. Cependant, après un examen réfléchi, on reconnaît que ces inconvéniens ne sont pas insurmontables, et qu'ils disparaissent quand on modifie un peu le procédé; et, en particulier, quand on n'attaque pas d'abord le problème général. Voici ce que j'ai trouvé de plus simple à cet égard.

14. Dans $F(x+y)$ je considère y seule comme variable, ayant α pour accroissement arbitraire et constant. J'écris l'équation identique

$$F(x+y)=Fx+y\left\{\frac{F(x+y)-Fx}{y}\right\};$$

laquelle, en faisant

$$\frac{F(x+y)-Fx}{y}=fy, \tag{28}$$

devient

$$F(x+y)=Fx+yfy: \tag{29}$$

Je prends les différences successives de l'équation (29), par rapport à y seule; et pour cela je fais observer qu'en général (3)

$$\Delta(\phi y\,.\,\psi y)=\phi(y+\alpha)\,.\,\psi(y+\alpha)-\phi y\,.\,\psi y;$$

ou bien

$$\Delta(\phi y\,.\,\psi y)=\phi y\,.\,\Delta\psi y+\Delta\phi y\,.\,\psi(y+\alpha); \tag{30}$$

après quoi j'ai successivement

$$\Delta F(x+y)=\alpha fy+(y+\alpha)\Delta fy,$$

$$\Delta^2F(x+y)=2\alpha\Delta fy+(y+2\alpha)\Delta^2fy,$$

$$\Delta^3F(x+y)=3\alpha\Delta^2fy+(y+3\alpha)\Delta^3fy;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

d'où je tire, par transposition,

$$\left.\begin{aligned}
fy &= \frac{\Delta F(x+y)}{\alpha} - \frac{(y+\alpha)}{\alpha}\Delta fy\,,\\
2\Delta fy &= \frac{\Delta^2 F(x+y)}{\alpha} - \frac{(y+2\alpha)}{\alpha}\Delta^2 fy\,,\\
3\Delta^2 fy &= \frac{\Delta^3 F(x+y)}{\alpha} - \frac{(y+3\alpha)}{\alpha}\Delta^3 fy\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}\right\}\quad (31)$$

prenant enfin la somme des produits respectifs de ces équations (31) par

$$y\,,\ -\frac{y(y+\alpha)}{1.2.\alpha}\,,\quad +\frac{y(y+\alpha)(y+2\alpha)}{1.2.3.\alpha^2}\,,\ldots.,$$

il vient en réduisant, et ayant égard à l'équation (29),

$$F(x+y) = Fx + \frac{y}{\alpha}\Delta F(x+y) - \frac{y(y+\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2 F(x+y) + \ldots.;$$

ou bien, en transposant,

$$Fx = F(x+y) - \frac{y}{\alpha}\Delta F(x+y) + \frac{y(y+\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2 F(x+y)$$
$$-\frac{y(y+\alpha)(y+2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3 F(x+y) + \ldots.. \qquad (32)$$

On peut donner à ce développement plusieurs autres formes très-remarquables.

D'abord je fais $x+y=p$; relation qui donne, parce que x est constante,

$$\Delta(x+y) = \Delta y = \Delta p = \alpha\ ;$$

par conséquent l'expression $\Delta^n F(x+y)$ devient évidemment $\Delta^n Fp$, les différences étant prises par rapport à p qui varie de α; on a ainsi

$$Fx = Fp + \frac{(x-p)}{\alpha}\Delta Fp + \frac{(x-p)(x-p-\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2 Fp$$
$$+\frac{(x-p)(x-p-\alpha)(x-p-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3 Fp + \ldots\ldots \qquad (33)$$

Dans ce nouveau développement, je change x en $x+n\alpha$; alors le premier membre devient (2)

$$F(x+n\alpha)=E^nFx\ ;$$

dans le second, $x-p$ devient $x-p+n\alpha$. Après cela je change p en x ; alors Δp devient Δx, et Δ^nFp devient Δ^nFx ; les différences étant prises par rapport à x qui varie de α ; il vient ainsi

$$E^nFx=F(x+n\alpha)=Fx+n\Delta Fx+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\Delta^2Fx+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\Delta^3Fx+\ldots (34)$$

Ici je fais $n\alpha=m$; d'où $n=\frac{m}{\alpha}$; et j'ai

$$F(x+m)=Fx+\frac{m}{\alpha}\Delta Fx+\frac{m(m-\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2Fx+\frac{m(m-\alpha)(m-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3Fx+\ldots (35)$$

Dans l'équation (35), je fais $x=0$; ce que j'exprimerai, relativement aux fonctions $Fx,\ldots.\Delta^nFx$, en écrivant $Fx_0,\ldots\Delta^nFx_0$; puis je change m en x, et j'ai

$$Fx=Fx_0+\frac{x}{\alpha}\Delta Fx_0+\frac{x(x-\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2Fx_0+\frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3Fx_0+\ldots (36)$$

15. La série (33) est aussi donnée par le procédé du n.° 13, quand on fait

$$\phi x=x-p\ ;\quad \phi' x=x-p-\alpha\ ;\quad \phi'' x=x-p-2\alpha\ ;\ldots\ldots;$$

mais il est bien plus difficile d'arriver à la forme générale et bien simple Δ^mFp qui comprend tous les coefficiens. On conclut sur-le-champ de cette série la possibilité du développement de Fx suivant les puissances entières et positives de $\frac{x-p}{\alpha}$; bien que le procédé du n.° 13 ne donne rien à cet égard. En effet, les produits

$$\frac{x-p}{\alpha},\quad \frac{(x-p)(x-p-\alpha)}{\alpha^2},\quad \frac{(x-p)(x-p-\alpha)(x-p-2\alpha)}{\alpha^3},\ldots\ldots,$$

étant développés, sont tous de la forme

$$A\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)+B\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^2+C\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^3+\ldots;$$

de sorte qu'après ce développement, il s'agirait simplement d'ordonner par rapport aux puissances $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^2$, ...; et, sans calcul, on aperçoit déjà que le coefficient de la première puissance $\frac{x-p}{\alpha}$ serait la série

$$\Delta \mathrm{F}p-\tfrac{1}{2}\Delta^2\mathrm{F}p+\tfrac{1}{3}\Delta^3\mathrm{F}p-\ldots.. \qquad (37)$$

Il ne serait même pas difficile de les déterminer tous d'après cette seule considération ; mais il sera plus court d'en faire la recherche par un procédé analogue à celui qui vient d'être employé (n.° 14).

D'abord je prends la somme des produits respectifs des équations (31) par $+1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\ldots..$, ce qui donne, en réduisant et multipliant par α,

$$\begin{aligned}\alpha f y=\Delta \mathrm{F}(x+y)-\tfrac{1}{2}\Delta^2\mathrm{F}(x+y)+\tfrac{1}{3}\Delta^3\mathrm{F}(x+y)-\ldots..\\ -y\{\Delta f y-\tfrac{1}{2}\Delta^2 f y+\tfrac{1}{3}\Delta^3 f y-\ldots..\}\end{aligned} \qquad (38)$$

Ici je fais

$$\Delta \mathrm{F}(x+y)-\tfrac{1}{2}\Delta^2\mathrm{F}(x+y)+\tfrac{1}{3}\Delta^3\mathrm{F}(x+y)-\ldots=\mathrm{dF}(x+y);$$

notation d'après laquelle on aura

$$\Delta f y-\tfrac{1}{2}\Delta^2 f y+\tfrac{1}{3}\Delta^3 f y-\ldots..=\mathrm{d}f y;$$

et, en général

$$\Delta z-\tfrac{1}{2}\Delta^2 z+\tfrac{1}{3}\Delta^3 z-\ldots.=\mathrm{d}z. \qquad (39)$$

C'est la définition complète d'une nouvelle fonction de z, polynôme

nôme et même *infinitinôme*, en général, que j'appelle la *différentielle* de z.

Il s'ensuit, sur-le-champ, que

$$\Delta dz-\tfrac{1}{2}\Delta^2dz+\tfrac{1}{3}\Delta^3dz-\ldots\ldots=d^2z\,;$$

et, en général

$$\Delta d^nz-\tfrac{1}{2}\Delta^2d^nz+\tfrac{1}{3}\Delta^3d^nz-\ldots\ldots=d^{n+1}z\,. \qquad (40)$$

d^2z, d^3z, ... d^nz, sont les *différentielles de différens ordres* de z.

Cela étant, l'équation (38) devient

$$\alpha fy=dF(x+y)-ydfy\,. \qquad (41)$$

Je prends les différences successives de celle-ci, et j'ai, eu égard à la formule (30),

$$\alpha\Delta fy=\Delta\, dF(x+y)-\alpha d\, fy-(y+\alpha)\Delta\, dfy\,;$$

$$\alpha\Delta^2fy=\Delta^2dF(x+y)-2\alpha\Delta dfy-(y+2\alpha)\Delta^2dfy\,,$$

$$\alpha\Delta^3fy=\Delta^3dF(x+y)-3\alpha\Delta^2dfy-(y+3\alpha)\Delta^3dfy\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Je prends la somme des produits respectifs de ces équations par $+1$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $-$.... et j'ai, en réduisant

$$\alpha(\Delta fy-\tfrac{1}{2}\Delta^2fy+\tfrac{1}{3}\Delta^3fy-\ldots)=\Delta dF(x+y)-\tfrac{1}{2}\Delta^2dF(x+y)+\tfrac{1}{3}\Delta^3dF(x+y)-\ldots$$
$$-\alpha dfy-y(\Delta dfy-\tfrac{1}{2}\Delta^2dfy+\tfrac{1}{3}\Delta^3dfy-\ldots\ldots)\,,$$

équation qui, d'après les notations fixées (39), (40), devient

$$\alpha dfy=d^2F(x+y)-\alpha dfy-yd^2fy\,,$$

ou bien

$$2\alpha dfy=d^2F(x+y)-yd^2fy\,. \qquad (42)$$

Je fais sur celle-ci les mêmes opérations que sur l'équation (41); c'est-à-dire, que je prends la somme des produits respectifs de ses différences successives par $+1$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $-$..... ce qui me donne, en réduisant, et ayant toujours égard aux notations (39), (40),

$$3\alpha d f y = d^3 F(x+y) - y d^3 f y \;. \qquad (43)$$

Le procédé détaillé pour passer de l'équation (41) à l'équation (42) sert évidemment de formule pour passer de celle-ci à l'equation (43), puis de cette dernière à une nouvelle, et ainsi de suite; de sorte que c'est par une induction rigoureuse qu'on obtient la suite indéfinie d'équations

$$\begin{aligned} \alpha f y &= d\,F(x+y) - y d\, f y \;, \\ 2\alpha d\, f y &= d^2 F(x+y) - y d^2 f y \;, \\ 3\alpha d^2 f y &= d^3 F(x+y) - y d^3 f y \;, \\ 4\alpha d^3 f y &= d^4 F(x+y) - y d^4 f y \;; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En prenant la somme de leurs produits respectifs par

$$\frac{y}{\alpha}\,,\quad -\frac{y^2}{1.2.\alpha^2}\,,\quad +\frac{y^3}{1.2.3.\alpha^3}\,,\quad -\frac{y^4}{1.2.3.4.\alpha^4}\,,\ldots\ldots\,,$$

il vient, en ayant égard à l'équation primitive (29),

$$F(x+y) = Fx + \frac{y}{\alpha} dF(x+y) - \frac{y^2}{1.2.\alpha^2} d^2F(x+y) + \frac{y^3}{1.2.3.\alpha^3} d^3F(x+y) - \ldots;$$

d'où en transposant,

$$Fx = F(x+y) - \frac{y}{\alpha} dF(x+y) + \frac{y^2}{1.2.\alpha^2} d^2F(x+y) - \frac{y^3}{1.2.3.\alpha^3} d^3F(x+y) + \ldots. \qquad (44)$$

Série bien analogue avec la série (32) et qui, comme cette dernière, prend, d'après les mêmes procédés, plusieurs formes différentes, savoir :

$$Fx = Fp + \frac{(x-p)}{\alpha} dFp + \frac{(x-p)^2}{1.2.\alpha^2} d^2Fp + \frac{(x-p)^3}{1.2.3.\alpha^3} d^3Fp + \ldots, \qquad (45)$$

$$E^nFx = F(x+n\alpha) = Fx + \frac{n}{1} dFx + \frac{n^2}{1.2} d^2Fx + \frac{n^3}{1.2.3} d^3Fx + \ldots. \qquad (46)$$

$$F(x+m)=Fx+\frac{m}{\alpha}\,dFx+\frac{m^2}{1.2.\alpha^2}\,d^2Fx+\frac{m^3}{1.2.3.\alpha^3}\,d^3Fx+\ldots \quad (47)$$

$$Fx=Fx_0+\frac{x}{\alpha}\,dFx_0+\frac{x^2}{1.2.\alpha^2}\,d^2Fx_0+\frac{x^3}{1.2.3.\alpha^3}\,d^3Fx_0+\ldots \quad (48)$$

16. Je m'empresse d'appliquer ces formules au développement des differens ordres d'une même fonction.

Soit

$$Fx=\varphi^x z\;;$$

la différence constante de x étant α, on aura (3)

$$\Delta Fx=\varphi^{x+\alpha}z-\varphi^x z\;.$$

Si la fonction φ est *distributive*, cette expression se changera en

$$\Delta Fx=\varphi^x(\varphi^\alpha z-z)\;. \quad (49)$$

Admettons l'hypothèse, et faisons un moment

$$\varphi^\alpha z-z=fz\;. \quad (50)$$

D'après les théorèmes (n.^{os} 5, 6), φ^α et f seront des fonctions distributives ; et, au lieu de (49), nous aurons

$$\Delta Fx=\varphi^x fz\;,$$

puis, en prenant la différence de celle-ci,

$$\Delta^2 Fx=\varphi^{x+\alpha}fz-\varphi^x fz=\varphi^x(\varphi^\alpha fz-fz)\;. \quad (51)$$

Si la fonction φ est *commutative* avec les facteurs constans, elle le sera aussi, en vertu du théorème (n.^{o} 10), avec la fonction binôme f, (50), c'est-à dire, qu'on aura

$$\varphi^\alpha fz=f\varphi^\alpha z\;.$$

Admettons encore l'hypothèse ; parce que f est distributive, nous aurons, d'après (50),

$$\varphi^\alpha fz-fz=f\varphi^\alpha z-fz=f(\varphi^\alpha z-z)=f^2 z\;;$$

ainsi, l'équation (51) devient

$$\Delta^2 Fx = \varphi^x f^2 z\,.$$

On trouverait de même

$$\Delta^3 Fx = \varphi^x f^3 z\,, \qquad \Delta^4 Fx = \varphi^x f^4 z\,, \ldots\ldots;$$

et, par une induction manifeste

$$\Delta^m Fx = \varphi^x f^m z\,;$$

expression qui, si l'on veut faire usage de la notation proposée (n.° 2), devient

$$\Delta^m Fx = \varphi^x (\varphi^\alpha - 1)^m z\,. \qquad (52)$$

Or, on a (6)

$$Fx_0 = \varphi^0 z = z\,, \quad \Delta^m Fx_0 = (\varphi^\alpha - 1)^m z\,;$$

donc, par la formule (36), on aura

$$\varphi^x z = z + \frac{x}{\alpha}(\varphi^\alpha - 1)z + \frac{x(x-\alpha)}{1.2.\alpha^2}(\varphi^\alpha - 1)^2 z + \frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}(\varphi^\alpha - 1)^3 z + \ldots \qquad (53)$$

Actuellement, d'après la définition (39) et la formule (52), on trouve

$$dFx = \Delta Fx - \tfrac{1}{2}\Delta^2 Fx + \ldots = \varphi^x[(\varphi^\alpha - 1)z - \tfrac{1}{2}(\varphi^\alpha - 1)^2 z + \tfrac{1}{3}(\varphi^\alpha - 1)^3 z - \ldots] \quad (54)$$

Je désignerai, en général, la fonction polynôme, qui est ici entre parenthèses, par $L\varphi^\alpha z$; L sera ainsi la notation d'une fonction déterminée de $\varphi^\alpha z$, dont la définition complète sera donnée par l'équation

$$L\varphi^\alpha z = (\varphi^\alpha - 1)z - \tfrac{1}{2}(\varphi^\alpha - 1)^2 z + \tfrac{1}{3}(\varphi^\alpha - 1)^3 z - \ldots \qquad (55)$$

La fonction L s'appellera *logarithme* et $L\varphi^\alpha z$ sera une fonction monôme composée qui s'énoncera : *logarithme de* φ^α *de* z. Il est clair (n.° 10) que la fonction $L\varphi^\alpha$ est non seulement distributive, mais commutative avec la fonction φ et le facteur constant. Il n'en est pas de même de la fonction simple L.

Ainsi, l'équation (54) devient

$$dFx=\varphi^x L\varphi^\alpha z .$$

De celle-ci on conclut sur-le-champ

$$d^2Fx=\varphi^x(L\varphi^\alpha)^2 z\,,\ d^3Fx=\varphi^x(L\varphi^\alpha)^3 z\,,\ldots. d^mFx=\varphi^x(L\varphi^\alpha)^m z\ ; \qquad (56)$$

par conséquent, en faisant $x=0$ dans Fx, dFx,..... d^mFx, on a, d'après la formule (48), cet autre développement de $\varphi^x z$:

$$\varphi^x z=z+\frac{x}{\alpha}L\varphi^\alpha z+\frac{x^2}{1.2.\alpha^2}(L\varphi^\alpha)^2 z+\frac{x^3}{1.2.3.\alpha^3}(L\varphi^\alpha)^3 z+\ldots. \qquad (57)$$

Tirons quelques conséquences importantes. Dans (57) l'accroissement α étant arbitraire, je le fais égal à l'unité, et j'ai

$$\varphi^x z=z+\frac{x}{1}L\varphi z+\frac{x^2}{1.2}(L\varphi)^2 z\frac{x^3}{1.2.3}(L\varphi)^3 z+\ldots. \qquad (58)$$

Je compare cette expression, terme à terme, avec celle de l'équation (57); et, parce que x est absolument indéterminé, j'obtiens la relation

$$\alpha L\varphi z=L\varphi^\alpha z . \qquad (59)$$

Soit f une fonction distributive et commutative avec ϕ et les facteurs constans; prenons de part et d'autre de l'équation (58) la fonction f^x, nous aurons, eu égard à la formule (18, n.° 9),

$$f^x\varphi^x z=(f\phi)^x z=f^x z+\frac{x}{1}f^x L\phi z+\frac{x^2}{1.2}f^x(L\phi)^2 z+\ldots..$$

Développons chaque terme du second membre de celle-ci, par la même formule (58), et nous aurons visiblement

$$\left.\begin{aligned}(f\phi)^x z=z+.xLfz+&\frac{x^2}{1.2}(Lf)^2+\ldots\ldots.\\ +xL\phi z+2&\frac{x^2}{1.2}(Lf)(L\phi)z+\ldots.\\ +&\frac{x^2}{1.2}(L\phi)^2 z+\ldots..\\ &\qquad +\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

d'ailleurs, toujours d'après (58), on a cette autre expression

$$(f\phi)^x z = z + x(\mathrm{L}f\phi)z + \frac{x^2}{1.2}(\mathrm{L}f\phi)^2 z + \ldots\ldots ;$$

donc, en comparant terme à terme avec (60), nous aurons, à cause de l'indéterminée x, la relation

$$\mathrm{L}f\phi z = \mathrm{L}fz + \mathrm{L}\phi x. \qquad (61)$$

Supposons

$$\mathrm{L}\phi z = \psi z :$$

prenons, de part et d'autre, la fonction inverse L^{-1}, et nous aurons (1)

$$\phi z = \mathrm{L}^{-1}\psi z \; ; \qquad \phi^x z = (\mathrm{L}^{-1}\psi)^x z \; ;$$

et par conséquent, d'après la formule (58),

$$(\mathrm{L}^{-1}\psi)^x z = z + \frac{x}{1}\psi z + \frac{x^2}{1.2}\psi^2 z + \frac{x^3}{1.2.3}\psi^3 z + \ldots\ldots. \qquad (62)$$

Soient encore f et ϕ deux fonctions distributives et commutatives tant entre elles qu'avec les facteurs constans ; u et x étant des exposans arbitraires, on a sur-le-champ (1)

$$f^u\phi^x z = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{L}f^u\phi^x z ; \qquad (63)$$

mais (61), (59) on a aussi

$$\mathrm{L}f^u\phi^x z = \mathrm{L}f^u z + \mathrm{L}\phi^x z = u\mathrm{L}fz + x\mathrm{L}\phi z ;$$

donc (63) on aura, en employant la notation (n.° 2)

$$f^u\phi^x z = \mathrm{L}^{-1}(u\mathrm{L}f + x\mathrm{L}\phi)z ; \qquad (64)$$

et, d'après (62)

$$f^u\phi^x z = z + (u\mathrm{L}f + x\mathrm{L}\phi)z + \frac{1}{1.2}(u\mathrm{L}f + x\mathrm{L}\phi)^2 z$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}(u\mathrm{L}f + x\mathrm{L}\phi)^3 z + \ldots\ldots. \qquad (65)$$

Faisons quelques hypothèses particulières, sur la forme de la fonction ϕ ; et d'abord soit

$$\phi z = z + fz = (1+f)z \;;$$

en supposant $\alpha = 1$, on aura sur-le-champ, d'après (53), (58), (55)

$$\left.\begin{aligned}
&(1+f)^x z = z + \frac{x}{1} fz + \frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2} f^2 z + \frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3} f^3 z + \ldots\ldots \\
&(1+f)^x z = z + \frac{x}{1}\,\mathrm{L}(1+f)z + \frac{x^2}{1.2}\,[\mathrm{L}(1+f)]^2 z + \ldots\ldots \\
&\mathrm{L}(1+f)z = fz - \frac{1}{2} f^2 z + \frac{1}{3} f^3 z - \frac{1}{4} f^4 z + \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} (66)$$

Soit

$$\phi z = fz + \mathrm{f}z \;.$$

Je prends, de part et d'autre, la fonction inverse f^{-1}, et j'ai

$$f^{-1}\phi z = z + f^{-1}\mathrm{f}z \;,$$

laquelle, en faisant,

$$f^{-1}\phi z = \psi z \quad , \qquad f^{-1}\mathrm{f}z = \mathrm{F}z \;,$$

devient

$$\psi z = z + \mathrm{F}z \;;$$

et d'après la formule (66), j'obtiendrai

$$\psi^x z = z + \frac{x}{1}\,\mathrm{F}z + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\,\mathrm{F}^2 z + \frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\,\mathrm{F}^3 z + \ldots\ldots$$

$$\psi^x z = z + \frac{x}{1}\,\mathrm{L}(1+\mathrm{F})z + \frac{x^2}{1.2}\,[\mathrm{L}(1+\mathrm{F})]^2 z + \ldots\ldots$$

$$\mathrm{L}(1+\mathrm{F})z = \mathrm{F}z - \frac{1}{2}\,\mathrm{F}^2 z + \frac{1}{3}\,\mathrm{F}^3 z - \frac{1}{4}\,\mathrm{F}^4 z + \ldots\ldots$$

Dans celles-ci, je mets pour ψz et $\mathrm{F}z$ leurs expressions d'hypothèse, puis je prends, dans la première et la seconde, de part et d'autre, la fonction f et j'ai

$$\left.\begin{array}{l}
\phi^x=(f+\mathrm{f})^x z=f^x z+\frac{x}{1}f^{x-1}\mathrm{f}z+\frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2}f^{x-2}\mathrm{f}^2 z+\ldots\ldots \\
\phi^x=(f+\mathrm{f})^x z=f^x z+\frac{x}{1}\,\mathrm{L}(1+\mathrm{f}f^{-1})f^x z+\frac{x^2}{1.2}\,[\mathrm{L}(1+\mathrm{f}f^{-1})]^2 f^x z+\ldots \\
\mathrm{L}(1+\mathrm{f}f^{-1})z=\mathrm{f}f^{-1}z-\frac{1}{2}\,\mathrm{f}^2 f^{-2}z+\frac{1}{3}\,\mathrm{f}^3 f^{-3}z-\ldots\ldots
\end{array}\right\}(67)$$

Soit

$$\phi z=fz+\mathrm{f}z+\psi z\ .$$

On fera $\mathrm{f}z+\psi z=\mathrm{F}z$, et on aura (67) les développemens relatifs à

$$\phi^x z=(f+\mathrm{F})^x z\ .$$

Dans ceux-ci, au lieu des différens ordres $\mathrm{F}^2 z$, $\mathrm{F}^3 z,\ldots.$, on mettra leurs développemens donnés par les mêmes équations (67), d'après

$$\mathrm{F}^x z=(\mathrm{f}+\psi)^x z\ .$$

On voit, sans qu'il soit besoin d'insister, comment on arriverait aux deux développemens de l'ordre x de la fonction polynôme quelconque, aux fonctions distributives et commutatives ; c'est-à-dire, qu'*on sait développer* la fonction

$$\phi^x z=(f+\mathrm{f}+\mathrm{F}+\psi+\ldots..)^x z\ . \qquad (68)$$

17. Je vais appliquer ces généralités aux fonctions données par la considération des différences des quantités variables, fonctions que j'appellerai *fonctions différentielles.*

En considérant z comme fonction des deux seules variables x, y (ce que nous dirons pourra s'appliquer sans peine aux fonctions d'un plus grand nombre), ses fonctions différentielles, *totales* et *partielles*, sont (n.° 1)

$$\mathrm{E}z\ ,\ \frac{\mathrm{E}}{x}z\ ,\quad \frac{\mathrm{E}}{y}z\ ;\quad \Delta z\ ,\ \frac{\Delta}{x}z\ ,\quad \frac{\Delta}{y}z\ ;\quad \mathrm{d}z\ ,\quad \frac{\mathrm{d}}{x}z\ ,\quad \frac{\mathrm{d}}{y}z\ .$$

On voit que, d'après la notation proposée (n.° 1), pour les fonc-

tions

tions partielles, en général, nous exprimons les différentielles partielles par $\frac{\mathrm{d}}{x}z$, $\frac{\mathrm{d}}{y}z$,.....

Les définitions des fonctions différentielles totales (3), (4), (39), exprimées d'après la notation proposée (n.° 2) pour les fonctions polynômes, seront

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{E}^n z=(1+\Delta)^n z\,, \quad \Delta^n z=(\mathrm{E}-1)^n z\,; \\ \mathrm{d}^n z=(\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3-\ldots)^n z=[(\mathrm{E}-1)-\frac{1}{2}(\mathrm{E}-1)^2+\ldots]^n z \end{array}\right\} \quad (69)$$

Elles serviront de formules pour exprimer les fonctions différentielles partielles, en y changeant simplement E, Δ, d en $\frac{\mathrm{E}}{x}$, $\frac{\Delta}{x}$, $\frac{\mathrm{d}}{x}$, ou en $\frac{\mathrm{E}}{y}$, $\frac{\Delta}{y}$, $\frac{\mathrm{d}}{y}$ respectivement.

Ajoutons la formule qui établit la communication entre les fonctions totales et les fonctions partielles : c'est

$$\mathrm{E}z=\frac{\mathrm{E}}{x}\;\frac{\mathrm{E}}{y}z\,. \qquad (70)$$

Elle est évidemment vraie ; car, pour avoir $\varphi(x+\alpha\,,\,y+\beta)=\mathrm{F}z$, il suffit de changer d'abord y en $y+\beta$, c'est-à-dire, de prendre d'abord $\frac{\mathrm{E}}{y}z$; ensuite, dans le résultat, de changer x en $x+\alpha$; c'est-à-dire, de prendre l'état varié $\frac{\mathrm{E}}{x}$, selon x, de $\frac{\mathrm{E}}{y}z$.

Cela posé, il est facile de voir d'abord que toutes les fonctions différentielles sont *distributives*. En effet, les états variés E, $\frac{\mathrm{E}}{x}$, $\frac{\mathrm{E}}{y}$ le sont évidemment, ainsi que les facteurs constans. Or, d'après leurs définitions (69), les différences et différentielles totales ou partielles sont des fonctions polynômes dont les composantes sont des ordres d'états variés et des facteurs constans ; donc, en vertu du théorème (n.° 6), elles sont elles-mêmes *distributives*.

En second lieu, tous les états variés sont *commutatifs* avec le facteur constant; il est même très-remarquable que tout état varié est commutatif avec toute fonction d'ordre constant; c'est-à-dire, qu'on a

$$E\varphi z=\varphi E z\,,\qquad \frac{E}{x}\varphi z=\varphi\frac{E}{x}z\,,\qquad \frac{E}{y}\varphi z=\varphi\frac{E}{y}z.$$

Il est fort indifférent, en effet, de changer d'abord x en $x+\alpha$, par exemple, dans la fonction z, puis de prendre la fonction φ, ou bien de prendre d'abord la fonction φ de z, pour y changer ensuite x en $x+\alpha$. Il suit de là que les états variés sont commutatifs, tant entre eux qu'avec toutes les différences et différentielles.

En troisième lieu, les différences et différentielles, étant commutatives avec les états variés, et étant des fonctions polynômes composées d'états variés qui sont commutatifs avec les facteurs constans, seront, en vertu du théorème (n.° 10), commutatives avec les facteurs constans.

En quatrième lieu, d'après la définition de la différence partielle $\frac{\Delta}{x}z$, celle-ci sera commutative avec $\frac{\Delta}{y}z$ et $\frac{d}{y}z$ (n.° 10), puisque ces dernières sont commutatives avec $\frac{E}{x}z$ et les facteurs constans.

En cinquième lieu, d'après la définition de la différentielle partielle $\frac{d}{x}z$, celle-ci sera commutative avec $\frac{d}{y}z$ (n.° 10), puisque cette dernière l'est avec les différens ordres de $\frac{\Delta}{x}z$ et avec les facteurs constans.

De toutes ces observations réunies, il résulte que toutes les fonctions différentielles et leurs différens ordres, positifs ou négatifs, sont des fonctions commutatives, tant entre elles qu'avec les facteurs constans. On pourra y ajouter les fonctions intégrales

$$\Sigma\,,\quad \frac{\Sigma}{x}\,,\quad \frac{\Sigma}{y}\,,\quad \int,\quad \frac{\int}{x}\,,\quad \frac{\int}{y}\,,$$

ainsi que leurs differens ordres ; puisque ces fonctions ne sont que des differences et différentielles d'ordres négatifs (n.° 1).

Ainsi, toutes les formules données dans l'article précédent sont immediatement applicables à toutes ces fonctions. On en recueille sur-le-champ plusieurs expressions abrégées dont voici les plus remarquables.

Dans la formule (46), je mets z au lieu de Fx ; je compare avec l'équation (62), et j'ai

$$E^n z = (L^{-1} d_{,})^n z \; ; \qquad (71)$$

et par conséquent aussi

$$\frac{E^n}{x} z = \left(L^{-1} \frac{d}{x}\right)^n z \; ; \qquad \frac{E^n}{y} z = \left(L^{-1} \frac{d}{y}\right)^n z \, . \qquad (72)$$

D'après les expressions précédentes et la définition $\Delta^n z = (E-1)^n z$ (69), on a sur-le-champ

$$\Delta^n z = (L^{-1} d - 1)^n z \; ; \quad \frac{\Delta^n}{x} z = \left(L^{-1} \frac{d}{x} - 1\right)^n z \; ;$$

$$\frac{\Delta^n}{y} z = \left(L^{-1} \frac{d}{y} - 1\right)^n z \, . \qquad (73)$$

En comparant les définitions (69) de la différentielle avec la formule (55) on obtient

$$d^n z = [L(1+\Delta)]^n z = (LE)^n z \; ; \quad \frac{d^n}{x} z = \left[L\left(1 + \frac{\Delta}{x}\right)\right]^n z = \left(L \frac{E}{x}\right)^n z \; ;$$

$$\frac{d^n}{y} z = \left[L\left(1 + \frac{\Delta}{y}\right)\right]^n z = \left(L \frac{E}{y}\right)^n z \, . \qquad (74)$$

Si, dans la formule $\Delta^n z = (E-1)^n z$, on met, au lieu de Ez, l'expression équivalente $\frac{E}{x} \frac{E}{y} z$, qui elle-même (69) est équivalente à $\left(1 + \frac{\Delta}{x}\right)\left(1 + \frac{\Delta}{y}\right) z$, on aura

$$\Delta^n z=\left[\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)\left(1+\frac{\Delta}{y}\right)-1\right]^n z=\left[\frac{E}{y}\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)-1\right]^n z$$

$$=\left[\frac{E}{x}\left(1+\frac{\Delta}{y}\right)-1\right]^n z\,. \qquad (75)$$

Si, dans $d^n z=(LE)^n z$, (74), on met, au lieu de Ez, l'expression (70), on aura

$$d^n z=\left(L\frac{E}{x}\frac{E}{y}\right)^n z\,; \qquad (76)$$

or, d'après la formule (61) et les expressions (72), on a

$$L\frac{E}{x}\frac{E}{y}z=L\frac{E}{x}z+L\frac{E}{y}z=\frac{d}{x}z+\frac{d}{y}z=\left(\frac{d}{x}+\frac{d}{y}\right)z\,;$$

donc, au lieu de (76), on aura

$$d^n z=\left(\frac{d}{x}+\frac{d}{y}\right)^n z\,. \qquad (77)$$

Si, dans l'équation (64), on change u, f, x, φ en m, $\frac{E}{x}$, n, $\frac{E}{y}$, respectivement, on aura

$$\frac{E^m}{x}\frac{E^n}{y}z=\varphi(x+m\alpha\,,\ y+n\beta)=L^{-1}\left(mL\frac{E}{x}+nL\frac{E}{y}\right)z\,;$$

équation qui, d'après (62), deviendra

$$\frac{E^m}{x}\frac{E^n}{y}z=\varphi(x+m\alpha\,,\ y+n\beta)=L^{-1}\left(m\frac{d}{x}+n\frac{d}{y}\right)z\,. \qquad (78)$$

On sait (n.^{os} 11, 18) *développer* toutes ces expressions abrégées.

C'est ici le lieu de faire observer qu'on peut former, en combinant les fonctions différentielles entre elles et avec les facteurs constans, une infinité de fonctions différentielles nouvelles qui toutes, d'après nos théorèmes généraux (n.^{os} 5.... 10) seraient distributives et commutatives, tant entre elles qu'avec les facteurs constans. Ainsi, en affectant des notations particulières à des fonctions polynômes, telles, par exemple, que

$$az+b\mathrm{E}z\ ,\ az+b\mathrm{E}z+c\mathrm{E}^2z\ ,\ \mathrm{d}z+a\mathrm{d}^2z+b\mathrm{d}^3z+\ldots,\ldots;$$

on formerait de nouveaux algorithmes qui auraient toutes leurs lois théoriques et pratiques dans les formules (n.° 16). Le *Calcul des variations*, en particulier, est le résultat d'une considération de cette espèce.

Les facteurs, étant des fonctions éminemment distributives et commutatives entre elles, sont visiblement compris comme cas particuliers dans nos formules. Alors l'expression $\mathrm{L}\varphi^\alpha z$ est le *logarithme naturel du facteur* φ^α *qui multiplie* z ; l'autre expression $\mathrm{L}^{-1}\psi z$ est la même chose que l'expression vulgaire $\varepsilon^{\psi z}$, (n.° 1). Il n'est pas même nécessaire d'aller chercher ailleurs une théorie des logarithmes; elle est toute entière dans la définition (55) et les formules (59), (61), (62). Par la même raison, les moyens de développement fournis par les élémens, pour élever un polynôme quelconque à une puissance quelconque, sont tous des cas particuliers de ceux qui conduisent au développement de la formule (68).

18. Nous avons, dans ce qui précède, esquissé l'ensemble des lois qui rapprochent et mettent en communication toutes les fonctions différentielles, c'est-à-dire, la théorie la plus générale du *calcul différentiel*. La pratique de ce calcul, laquelle n'est autre chose que l'exécution des opérations indiquées dans les définitions, ne formerait pas une branche séparée, si on n'avait pas remarqué que, pour certaines classes de fonctions variables, les fonctions différentielles réduites se présentent sous des formes beaucoup plus simples qu'on n'aurait pu le préjuger. D'ailleurs les fonctions, variables en général, eu égard à l'état actuel de l'analise, se composent d'un assez petit nombre d'autres fonctions qu'on appelle *élémentaires*, et dont il suffit de connaître les fonctions différentielles pour être en état, d'après les règles du calcul ordinaire, de trouver celles des pre-

mières. Il serait déplacé d'entrer ici dans aucun détail concernant les *états variés* et les *différences* des fonctions élémentaires ; je me borne à la recherche de leurs *différentielles*.

Les fonctions *élémentaires simples* d'une seule variable x sont les fonctions monômes

$$x^m\ ,\quad a^x\ ,\quad \mathrm{L}x\ ,\quad \mathrm{Sin.}x\ ,\quad \mathrm{Cos.}x\ ,$$

dans lesquelles on attribue à x une différence constante. Les fonctions *élémentaires composées* sont

$$\varphi x.\psi x\ ,\quad (\varphi x)^m\ ,\quad a^{\varphi x}\ ,\quad \mathrm{L}\varphi x\ ,\quad \mathrm{Sin.}\varphi x\ ,\quad \mathrm{Cos.}\varphi x\ .$$

Il y a, pour faire dépendre les différentielles de celles-ci, et, en général, des fonctions composées, de celles des fonctions simples, un théorème important qu'il faut préliminairement établir.

Soient $y=\varphi x$, et $\mathrm{F}y=\mathrm{F}\varphi x$; φ, F sont des fonctions quelconques. En supposant que la différence de y est la constante β, on a, par la formule (47)

$$\mathrm{F}(y+m)=\mathrm{F}y+\frac{m}{\beta}\,\mathrm{dF}y+\frac{m^2}{1.2\,\beta^2}\,\mathrm{d}^2\mathrm{F}y+\frac{m^3}{1.2.3.\beta^3}\mathrm{d}^3\mathrm{F}y+\ldots\ldots$$

Ici m est arbitraire ; partant, je puis faire

$$m=n\mathrm{d}\varphi x+\frac{n^2}{1.2}\,\mathrm{d}^2\varphi x+\frac{n^3}{1.2.3}\,\mathrm{d}^3\varphi x+\ldots\ldots \qquad (79)$$

et j'aurai

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{F}(y+m)=\mathrm{F}y+\frac{n}{\beta}\,\mathrm{dF}y\,.\,\mathrm{d}\varphi x+\frac{n^2}{1.2.\beta}\,\mathrm{dF}y\,.\,\mathrm{d}^2\varphi x+\ldots\ldots\\ +\frac{n^2}{1.2.\beta^2}\,\mathrm{d}^2\mathrm{F}y(\mathrm{d}\varphi x)^2+\ldots\ldots\\ +\ldots\ldots\end{aligned}\right\}(80)$$

mais, d'après la formule (46), eu égard à l'hypothèse (79), on a

$$\varphi(x+n\alpha)=\varphi x+\frac{n}{1}\,\mathrm{d}\varphi x+\frac{n^2}{1.2}\,\mathrm{d}^2\varphi x+\ldots\ldots=y+m\ ;$$

donc

$$F(y+m)=F\varphi(x+n\alpha) .$$

Je développe le second membre de celle-ci, par la même formule (46), et j'ai pour $F(y+m)$ cette autre expression

$$F(y+m)=F\varphi x+\frac{n}{1}dF\varphi x+\frac{n^2}{1.2}d^2F\varphi x+\ldots..;$$

laquelle, comparée avec la première (80), donne sur-le-champ, à cause de l'indéterminée n,

$$dF\varphi x=\frac{dFy}{\beta}.d\varphi x . \qquad (81)$$

Si on avait $x=\psi t$, en donnant à x la difference constante α, il est clair qu'on aurait, par la formule (81)

$$dF\varphi\psi t=\frac{dFy}{\beta}.\frac{d\varphi x}{\alpha}.d\psi t ;$$

et ainsi de suite.

Cela posé, d'après la formule (56), en y supposant que la fonction φ devienne le facteur a, et que z soit égal à l'unité, nous avons

$$da^x=a^x La^\alpha ; \qquad (82)$$

α étant la variation constante de x. Dans cette hypothèse, on a $\alpha=\Delta x$, $0=\Delta^2 x=\Delta^3 x=\ldots..$; par conséquent, d'après la définition (39)

$$dx=\Delta x=\alpha .$$

D'ailleurs, d'après (59) on a

$$La^\alpha=\alpha La ;$$

donc, au lieu de (82), on aura

$$da^x=a^x dx.La . \qquad (83)$$

Supposons ensuite

$$F\phi x = Fy = a^{\phi x} = a^y \;.$$

Nous aurons, d'après le théorème (81)

$$da^{\phi x} = \frac{da^y}{\beta} \,.\, d\phi x \;.$$

Mais, d'après (83), puisque $dy=\beta$ par hypothèse, on a

$$da^y = a^y La = a^{\phi x} \,.\, La \;;$$

donc, on aura

$$da^{\phi x} = a^{\phi x} \,.\, d\phi x \,.\, La \;; \qquad (84)$$

c'est-à-dire, la formule pour différencier les exponentiels.

Si on fait attention que $La^{\phi x} = \phi x La$, et par conséquent que $d\phi x \,.\, La = dLa^{\phi x}$, la formule (84) deviendra

$$da^{\phi x} = a^{\phi x} \,.\, dLa^{\phi x} \;;$$

dans laquelle, si on fait $Fx = a^{\phi x}$, ce qui est permis, on aura

$$dFx = Fx \,.\, dLFx \;; \qquad (85)$$

c'est l'expression de ce théorème : la différentielle d'une fonction variable est toujours égale à cette fonction multipliée par la différentielle de son logarithme.

On en conclut sur-le-champ

$$dLFx = \frac{dFx}{Fx} \;: \qquad (86)$$

c'est la formule pour différencier les logarithmes naturels.

en faisant attention que $L(Fx)^m = mLFx$; d'après les formules (85), (86), on aura

$$d(Fx)^m = (Fx)^m \,.\, dL(Fx)^m = m(Fx)^m \,.\, dLFx = m(Fx)^{m-1} \,.\, dFx \;: \qquad (87)$$

c'est la formule de différentiation des puissances.

Puisque $L(\phi x \,.\, Fx) = L\phi x + LFx$, on aura (85)

(d$\phi x \,.\, Fx$)

$$d(\phi x.Fx)=\phi x.Fx.dL(\phi x.Fx)=\phi x.Fx(dL\phi x+dLFx) ;$$

donc, d'après (86)

$$d(\phi x.Fx)=Fx.d\phi x+\phi x.dFx : \qquad (88)$$

c'est la formule de différentiation des produits.

Soit

$$Fx=\frac{\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x}{\text{Cos.}^x\alpha}. \qquad (89)$$

α est une constante, x est variable, et sa différence constante est 1. On a

$$\Delta Fx=\frac{\text{Cos.}\alpha(x+1)+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\alpha(x+1)}{\text{Cos.}^{x+1}\alpha}-\frac{\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\alpha x}{\text{Cos.}^x\alpha};$$

puis, en développant, par les formules trigonométriques connues, les cosinus et sinus de $\alpha x+\alpha$, et en réduisant

$$\Delta Fx=Fx.\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha ;$$

par conséquent, en général

$$\Delta^m Fx=Fx(\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)^m ;$$

donc, d'après la définition (39), on aura

$$dFx=Fx.[(\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)-\tfrac{1}{2}(\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)^2+\ldots.]$$

et, en comparant avec la formule (55),

$$dFx=Fx.L(1+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha). \qquad (90)$$

D'ailleurs (88)

$$dFx=\left(\frac{1}{\text{Cos.}\alpha}\right)^x.d(\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x)$$

$$+(\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x).d\left(\frac{1}{\text{Cos.}\alpha}\right)^x. \qquad (91)$$

Mais, d'une part, en différenciant la formule connue

$$\mathrm{Cos.}^2 \alpha x + \mathrm{Sin.}^2 \alpha x = 1 ,$$

d'après (87), on trouve

$$d\mathrm{Cos.}\alpha x = -\frac{\mathrm{Sin.}\alpha x}{\mathrm{Cos.}\alpha x} . d\mathrm{Sin.}\alpha x ; \qquad (92)$$

et par conséquent

$$d(\mathrm{Cos.}\alpha x + \sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\alpha x) = d.\mathrm{Sin.}\alpha x . \frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{Cos.}\alpha x}(\mathrm{Cos.}\alpha x + \sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\alpha x) ; \qquad (93)$$

D'autre part, en se rappelant que $dx = 1$, on a, par la formule (83)

$$d\left(\frac{1}{\mathrm{Cos.}\alpha}\right)^x = -\left(\frac{1}{\mathrm{Cos.}\alpha}\right)^x L\mathrm{Cos.}\alpha ;$$

donc, en substituant cette expression et celle (93) dans (91), et comparant avec (90), on aura

$$d.\mathrm{Sin.}\alpha x . \frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{Cos.}\alpha x} - L\mathrm{Cos.}\alpha = L(1 + \sqrt{-1}.\mathrm{Tang.}\alpha) ;$$

et de là en faisant

$$A\sqrt{-1} = L(\mathrm{Cos.}\alpha + \sqrt{-1}.\mathrm{Tang.}\alpha) ,$$

on tire

$$d\mathrm{Sin.}\alpha x = A\mathrm{Cos.}\alpha x ; \qquad (94)$$

puis, en mettant cette expression dans (92),

$$d\mathrm{Cos.}\alpha x = -A\mathrm{Sin.}\alpha x . \qquad (95)$$

Si on changeait ici αx en x, on aurait ces formules

$$d\mathrm{Sin.}x = \frac{A}{\alpha}\mathrm{Cos.}x , \qquad d\mathrm{Cos.}x = -\frac{A}{\alpha}\mathrm{Sin.}x .$$

Ici la différence de x est 1 ; si x était fonction d'une autre variable, on aurait, en vertu du théorème (81)

$$d\mathrm{Sin.}x = \frac{A}{\alpha} dx\mathrm{Cos.}x , \quad d\mathrm{Cos.}x = -\frac{A}{\alpha} dx\mathrm{Sin.}x . \qquad (96)$$

Dans ces formules, la quantité α est un arc arbitraire.

La constante A, quoique impliquée d'imaginaires, est facilement ramenée à une forme toute réelle. En effet, à cause de la formule connue

$$\text{Cos.}^2\alpha = \frac{1}{1+\text{Tang.}^2\alpha} = \frac{1}{(1+\sqrt{-1}.\text{Tang}\,\alpha)(1-\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)}\,;$$

on a

$$A\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\text{L}[\text{Cos}^2\alpha.(1+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)^2] = \tfrac{1}{2}\text{L}\left(\frac{1+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha}{1-\sqrt{-1}.\text{Tang}\,\alpha}\right)\,;$$

et, en développant la dernière expression d'après une formule logarithmique connue, puis en divisant par $\sqrt{-1}$,

$$A = \text{Tang.}\alpha - \tfrac{1}{3}\text{Tang.}^3\alpha + \tfrac{1}{5}\text{Tang.}^5\alpha - \ldots \qquad (97)$$

Ainsi, quand on ne saurait pas d'ailleurs que cette expression de A est égale à α, on aurait toujours le moyen, d'après les équations (96), et (97), de différencier les fonctions trigonométriques. Au surplus, par les seuls élémens, on démontre que $\frac{A}{\alpha}=1$ (voyez, *Théorie des fonctions analitiques*, n.° 28 de la 1.re édition, et n.° 23 de la seconde).

19. Nous avons vu naître le calcul différentiel du simple développement des fonctions d'une variable suivant les puissances de cette variable : ce calcul va nous servir maintenant à nous élever à quelque chose de plus général.

Supposons qu'on donne, entre les variables x, y, l'équation $V=0$ et l'équation $z=\text{F}x$. On peut du moins imaginer qu'on ait tiré de la première celle-ci $y=\phi x$, et qu'entre cette dernière et la seconde, on ait éliminé x, pour avoir $z=fy$; de manière que l'hypothèse revient à donner les trois équations

$$y=\phi x\,,\quad z=\text{F}x\,,\quad z=fy\,. \qquad (98)$$

Alors, d'après la formule (45), on aura

$$\mathrm{F}x = fy = fp + \frac{(y-p)}{1}\frac{\mathrm{d}fp}{\beta} + \frac{(y-p)^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}^2fp}{\beta^2} + \ldots \qquad (99)$$

Dans celle-ci, p est une arbitraire qui a pour différence constante β. Je différencie l'équation (99), par rapport à x seul, et j'ai

$$\mathrm{dF}x = \mathrm{d}y.\frac{\mathrm{d}fp}{\beta} + \frac{(y-p)}{1}\mathrm{d}y.\frac{\mathrm{d}^2fp}{\beta^2} + \ldots \qquad (100)$$

puis je suppose qu'en faisant $y=p$ dans $V=0$, on trouve entre autres $x=\theta$, et réciproquement ; on aura (98)

$$p=\phi\theta\ ,\quad \mathrm{d}p=\mathrm{d}\phi\theta\ ,\quad fp=f\phi\theta=\mathrm{F}\theta\ .$$

Ensuite, je fais $y=p$ dans (100), et cette équation devient

$$\mathrm{dF}\theta = \mathrm{d}\phi\theta.\frac{\mathrm{d}fp}{\beta}\ ; \qquad (101)$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}fp}{\beta} = \frac{\mathrm{dF}\theta}{\mathrm{d}\phi\theta}\ .$$

L'équation (101) est la même que (81), trouvée d'une autre manière. Je divise l'équation (100) par $\mathrm{d}y$, je différencie par rapport à x, et j'ai

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{dF}x}{\mathrm{d}y}\right) = \mathrm{d}y.\frac{\mathrm{d}^2fp}{\beta^2} + \frac{(y-p)}{1}\mathrm{d}y.\frac{\mathrm{d}^3fp}{\beta^3} + \ldots \qquad (102)$$

dans celle-ci, je fais $y=p$, et j'ai

$$\frac{\mathrm{d}^2fp}{\beta^2} = \frac{1}{\mathrm{d}\phi\theta}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{dF}\theta}{\mathrm{d}\phi\theta}\right) :$$

J'opère sur l'équation (102) comme j'ai fait sur (99) et (100); c'est-à-dire, je divise par $\mathrm{d}y$, je différencie, je fais $y=p$, et j'ai

$$\frac{\mathrm{d}^3fp}{\beta^3} = \frac{1}{\mathrm{d}\phi\theta}\mathrm{d}\left[\frac{1}{\mathrm{d}\phi\theta}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{dF}\theta}{\mathrm{d}\phi\theta}\right)\right].$$

L'induction est manifeste, et l'on voit que j'aurai, en général,

$$\frac{d^n fp}{\beta^n} = \frac{1}{d\varphi\theta} d\left\{\frac{1}{d\varphi\theta} d\left\{\frac{1}{d\varphi\theta} d\left\{\ldots\ldots \frac{1}{d\varphi\theta} d\left\{\frac{dF\theta}{d\varphi\theta}\right\}\right\}\right\}\ldots\ldots\right\}. \qquad (103)$$

Il y a, dans cette expression, un nombre $n-1$ de différentielles subordonnées. Elle est fort simple; mais on en découvre une autre qui se prête mieux aux développemens que la pratique exige, en employant un procédé qui n'est pas dépourvu d'élégance.

Je fais, pour abréger,

$$\frac{d fp}{\beta} = A, \qquad \frac{d^2 fp}{\beta^2} = B \ldots\ldots\ldots \frac{d^n fp}{\beta^n} = N.$$

Je multiplie successivement l'équation (99) par $\frac{x-\theta}{y-p}$, $\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2, \ldots$; je fais d'ailleurs attention qu'en général

$$\frac{dy}{(y-p)^m} = -\frac{1}{m-1} d(y-p)^{-(m-1)}$$

relation qui se vérifie aisément, d'après la formule (87); et j'ai

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right) dFx &= A(x-\theta)\cdot\frac{dy}{y-p} + B(x-\theta).\, dy + \frac{C}{1.2}(x-\theta).dy + \ldots\ldots \\
\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2 dFx &= -A(x-\theta).d(x-\theta)^{-1} + B(x-\theta).\frac{dy}{y-p} + \frac{C}{1.2}(x-\theta)^2 dy + \ldots\ldots \\
\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^3 dFx &= -\frac{A}{2}(x-\theta).d(y-p)^{-2} - B(x-\theta)d(y-p)^{-1} + \frac{C}{1.2}(x-\theta)^3\frac{dy}{y-p} + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} (104)$$

Or, d'après la formule (45), on a

$$y-p = (x-\theta)d\varphi\theta + \frac{(x-\theta)^2}{1.2} d^2\varphi\theta + \ldots\ldots; \qquad (105)$$

puis, en différenciant par rapport à x

$$dy = d\varphi\theta + (x-\theta)d^2\varphi\theta + \ldots\ldots \qquad (106)$$

Il suit d'abord de (106) que $(y-p)^{-m}$ et $d(y-p)^{-m}$ seront respectivement des formes

$$(y-p)^{-m}=A(x-\theta)^{-m}+B(x-\theta)^{-(m-1)}+\ldots\ldots+G(x-\theta)^{-1}+H+K(x-\theta)+L(x-\theta)^2+\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}(y-p)^{-m}=A'(x-\theta)^{-m-1}+B'(x-\theta)^{-m}+\ldots\ldots+G'(x-\theta)^{-2}+0+K'+L'(x-\theta)+\ldots\ldots \quad (107)$$

de cette dernière on conclut que, m étant un nombre entier plus grand que o, il manque, dans le développement de $\mathrm{d}(y-p)^{-m}$ suivant les puissances ascendantes de $(x-\theta)$, le terme multiplié par $(x-\theta)^{-1}$; puis ultérieurement que, n étant aussi un nombre plus grand que o, il manquera, dans le développement de $(x-\theta)^{n+1}.\mathrm{d}(y-p)^{-m}$, le terme multiplié par $(x-\theta)^n$. D'ailleurs, il est évident (107) que, tant que n sera égal à m ou plus grand, ce développement ne renfermera point des puissances négatives de $(x-\theta)$. Mais, d'après la formule (87), q étant positif, $\mathrm{d}^n(x-\theta)^q$ est nul, quand $n>q$; et $\mathrm{d}^n(x-\theta)^q$ est de la forme $R(x-\theta)^r$, r étant plus grand que zéro, quand $n<q$. Donc, en prenant la différence d^n de l'expression $(x-\theta)^{n+1}\mathrm{d}(y-p)^{-m}$, tous les termes où $(x-\theta)$ a un exposant moindre que n seront détruits, tous les autres prendront la forme $R(x-\theta)^r$, puisque, le terme en $(x-\theta)^n$ manquant, dans tous les autres, l'exposant de $(x-\theta)$ est plus grand que n; par conséquent, lorsqu'on fera $x=\theta$, on aura toujours

$$\mathrm{d}^n[(x-\theta)^{n+1}.\mathrm{d}(y-p)^{-m}]=0. \qquad (108)$$

Il suit, en second lieu, de l'équation (106), que l'expression $(x-\theta)^{n+1}.\dfrac{\mathrm{d}y}{y-p}$ est toujours de la forme

$$(x-\theta)^{n+1}\frac{\mathrm{d}y}{y-p}=(x-\theta)^n+P(x-\theta)^{n+1}+\ldots;$$

mais (87) $\mathrm{d}^n(x-\theta)^n=1.2.3\ldots\ldots n$; donc, quand on fera $x=\theta$, on aura toujours

$$\mathrm{d}^n[(x-\theta)^{n+1}.\frac{\mathrm{d}y}{y-p}]=1.2.3\ldots\ldots n. \qquad (109)$$

Je fais à présent l'application de ces deux observations importantes à la suite d'équations (104).

Je fais $x=\theta$ dans la première ; le premier terme, à cause de (109), devient A et les suivans s'anéantissent ; donc

$$A=\left\{\frac{x-\theta}{y-p}\,\mathrm{dF}x\right\}_0.$$

J'indiquerai par le o, placé en flanc d'une expression, qu'il faut faire, dans son développement, $x-\theta=0$.

Je différencie une fois la seconde équation (104), puis je fais $x=\theta$; le premier terme $-A\mathrm{d}[x-\theta)^2\mathrm{d}(y-p)^{-1}]$ est nul (108) ; le second $B\mathrm{d}\left[(x-\theta)^2\,\frac{\mathrm{d}y}{y-p}\right]$ devient B (109) ; tous les suivans s'évanouissent ; donc

$$B=\mathrm{d}\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2\mathrm{dF}x\right\}_0.$$

Je différencie deux fois de suite la troisième équation (104), puis je fais $x=\theta$; les deux premiers termes du second membre, étant dans le cas de (108), sont nuls ; le troisième se réduit à C d'après (109) ; les suivans sont visiblement nuls ; donc

$$C=\mathrm{d}^2\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^3\mathrm{dF}x\right\}_0.$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin pour conclure en toute rigueur qu'en général

$$N=\frac{\mathrm{d}^n fp}{\beta^n}=\mathrm{d}^{n-1}\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^n\mathrm{dF}x\right\}_0 \qquad (110)$$

ainsi l'équation (99) devient

$$\mathrm{F}x=\mathrm{F}\theta+\frac{(y-p)}{1}\left\{\frac{x-\theta}{y-p}\,\mathrm{dF}x\right\}_0+\frac{(y-p)^2}{1.2}\,\mathrm{d}\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2\mathrm{dF}x\right\}_0$$
$$+\frac{(y-p)^3}{1.2.3}\,\mathrm{d}^2\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^3\mathrm{dF}x\right\}_0+\ldots\ldots \qquad (111)$$

ou bien, si l'on veut mettre, pour y *et* p, les expressions correspondantes φx et $\varphi\theta$,

$$Fx = F\theta + (\varphi x - \varphi\theta)\left\{\frac{(x-\theta)\mathrm{d}Fx}{\varphi x - \varphi\theta}\right\}_0 + \frac{(\varphi x - \varphi\theta)^2}{1.2}\mathrm{d}\left\{\frac{(x-\theta)^2\mathrm{d}Fx}{(\varphi x - \varphi\theta)^2}\right\}_0$$

$$+\frac{(\varphi x - \varphi\theta)^3}{1.2.3}\left\{\frac{(x-\theta)^3\mathrm{d}Fx}{(\varphi x - \varphi\theta)^3}\right\}_0 + \ldots \quad (112)$$

C'est la formule du professeur Burman (voyez *Mémoires de l'Institut*, 1.re classe, tome II, page 16); dans le second des deux mémoires dont ceci est l'extrait, je l'avais déduite de la célèbre formule de Lagrange pour le retour des suites.

Dans l'expression (110) du terme général des coefficiens de la formule (111), on pourra mettre, avant les différentiations, au lieu de $y-p$, son expression en x, si la forme de l'équation $V=0$ le permet; sinon, après les différentiations, il faudra substituer pour $\frac{x-\theta}{y-p}$, $\mathrm{d}y$, d^2y, ... ce que deviennent ces fonctions, qnand $x-\theta$ et $y-p$ s'anéantissent à la fois; ce qui sera possible, en général, d'après l'équation $V=0$.

Si l'équation donnée entre x et y est simplement $y=\varphi x$, on aura d'après (105)

$$\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)_0 = \frac{1}{\mathrm{d}\varphi\theta};$$

en supposant toutefois que l'équation $\varphi x=0$ ne donne pour x qu'une seule valeur égale à θ. C'est ce qu'il faudra substituer au lieu de $\frac{x-\theta}{y-p}$ après les développemens.

Si l'équation donnée entre x et y est par exemple

$$x-\theta=(y-p)\psi x,$$

qui donne en effet $x=\theta$ quand $y=p$ et réciproquement; l'équation (111) devient

$$Fx = F\theta + (y-p)\psi\theta.\mathrm{d}F\theta + \frac{(y-p)^2}{1.2}\mathrm{d}[(\psi\theta)^2.\mathrm{d}F\theta]$$

$$+\frac{(y-p)^3}{1.2.3}\mathrm{d}^2[(\psi\theta)^3.\mathrm{d}F\theta] + \ldots\ldots \quad (113)$$

Celle-ci,

Celle-ci, quand on fait $p=0$, est la formule de Lagrange que nous venons de rappeler.

Soit, entre les variables x et y, la relation

$$x-\theta=(y-\lambda)\psi(x,y), \qquad (114)$$

qui donne $x=\theta$ quand $y=\lambda$, et réciproquement.

Dans la fonction donnée $\mathrm{F}(x,y)$ et dans (114), je regarde x seul comme variable et j'ai, d'après la formule (113),

$$\mathrm{F}(x,y)=\mathrm{F}(\theta,y)+(y-\lambda)\frac{\mathrm{d}}{\theta}\mathrm{F}(\theta,y).\psi(\theta,y)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(y-\lambda)^n}{1.2\ldots n}\frac{\mathrm{d}^n}{\theta}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\theta}\mathrm{F}(\theta,y).[\psi(\theta,y)]^n\right\}+\ldots \qquad (115)$$

$\mathrm{F}(\theta,y)$ et les coefficiens de $(y-\lambda)$ sont des fonctions de y que je développe suivant les puissances de $(y-\lambda)$, par le moyen de la formule (45) et j'ai, en faisant d'ailleurs pour abréger $u=\mathrm{F}(\theta,\lambda)$, $v=\psi(\theta,\lambda)$

$$\mathrm{F}(\theta,y)=u+(y-\lambda)\frac{\mathrm{d}}{\lambda}u+\frac{(y-\lambda)^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}^2}{\lambda}u.+\frac{(y-\lambda)^3}{1.2.3}\frac{\mathrm{d}^3}{\lambda}u+\ldots\ldots;$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\theta}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\theta}\mathrm{F}(\theta,y).[\psi(\theta,y)]^n\right\}=\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\theta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\theta}u.v^n\right)+(y-\lambda)\frac{\mathrm{d}}{\lambda}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\theta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\theta}u.v^n\right)+\ldots$$

Je substitue ces résultats dans (115), j'ordonne suivant les puissances de $(y-\lambda)$, et j'ai

$$\mathrm{F}(x,y)=u+A(y-\lambda)+B\frac{(y-\lambda)^2}{1.2}+\ldots\ldots+N\frac{(y-\lambda)^n}{1.2\ldots n}+\ldots; \qquad (116)$$

équation dans laquelle le terme général des coefficiens est

$$\mathrm{N}=\frac{\mathrm{d}^n}{\lambda}u+n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}}{\theta}u.v\right)+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\theta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\theta}u.v^2\right)+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\lambda}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\theta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\theta}u.v^{n-1}\right)+\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\theta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\theta}u.v^n\right). \qquad (117)$$

Telle est (116) une formule très-étendue, dont j'ai fait, dans mes deux mémoires, de nombreuses applications. J'y étais parvenu immédiatement, et par une méthode bien différente : celle de l'élimination des fonctions arbitraires, par les différentiations partielles ; méthode qui, maniée par les Laplace, les Lagrange, etc. a fourni les plus brillans résultats ; et qui, dans la matière dont nous nous occupons, permet d'aborder avec succès ce problème très-général : Une équation étant donnée entre plusieurs variables, développer une fonction proposée d'une ou de plusieurs de ces variables en série ordonnée suivant les puissances de l'une d'entr'elles, ou suivant les puissances et produits de plusieurs d'entr'elles. Je ne puis donner ici qu'une idée de la manière de procéder, en en faisant l'application à un cas peu compliqué.

Soit donnée l'équation.

$$ft=u\phi(x+t)+v\psi(x+t). \qquad (118)$$

Il s'agit de développer $F(x+t)$ suivant les puissances et produits de u, v?

La résolution de l'équation (118) donnerait pour t une expression de la forme $t=f(u, v, x)$: u, v, x n'ayant dailleurs entr'elles aucune équation de condition ; ainsi, on peut considérer t comme fonction des trois variables indépendantes u, v, x, dont les différences sont constantes et égales à l'unité. Cela étant, on sait, et il serait d'ailleurs facile de le conclure de la formule (78, n.° 17), qu'on a, en désignant, pour plus de simplicité, $x+t$ par p,

$$\left.\begin{aligned} Fp=Fp_0+u\frac{d}{u}Fp_0&+\frac{u^2}{1.2}\frac{d^2}{u}Fp_0+\ldots\ldots \\ +v\frac{d}{v}Fp_0&+2\frac{uv}{1.2}\frac{d}{u}\frac{d}{v}Fp_0+\ldots\ldots \\ &+\frac{v^2}{1.2}\frac{d^2}{v}Fp_0+\ldots\ldots \\ &+\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

Le zéro, en flanc de $\mathrm{F}p$, $\frac{\mathrm{d}}{u}\mathrm{F}p$, $\frac{\mathrm{d}}{v}\mathrm{F}p$, ..., signifie qu'il faut faire égales à zéro les variables u, v, après les développemens.

Je différencie successivement $\mathrm{F}p$ par rapport à u, v, x, et j'ai, en faisant attention au théorème (81),

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\,\mathrm{F}p=\mathrm{dF}p.\frac{\mathrm{d}}{u}\,t\,;\ \frac{\mathrm{d}}{v}\,\mathrm{F}p=\mathrm{dF}p.\frac{\mathrm{d}}{v}\,t\,;\ \frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p=\mathrm{dF}p\left(1+\frac{\mathrm{d}}{x}\,t\right).$$

J'élimine entre celles-ci $\mathrm{dF}p$, et j'ai

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.\frac{\frac{\mathrm{d}}{u}\,t}{1+\frac{\mathrm{d}}{x}\,t}\,;\quad \frac{\mathrm{d}}{v}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.\frac{\frac{\mathrm{d}}{v}\,t}{1+\frac{\mathrm{d}}{x}\,t}\,. \tag{120}$$

Je différencie successivement l'équation (118) suivant u, v, x et j'écris les résultats comme il suit

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\,t(\mathrm{d}ft-u\mathrm{d}\varphi p-v\mathrm{d}\psi p)=\varphi p\,, \tag{121}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{v}\,t(\mathrm{d}ft-u\mathrm{d}\varphi p-v\mathrm{d}\psi p)=\psi p\,, \tag{122}$$

$$\left(1+\frac{\mathrm{d}}{x}\,t\right)(\mathrm{d}ft-u\mathrm{d}\varphi p-v\mathrm{d}\psi p)=\mathrm{d}ft\,. \tag{123}$$

J'élimine entre ces trois dernières le facteur polynôme commun à leurs premiers membres, et j'ai

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\,t=\frac{\varphi p}{\mathrm{d}ft}\left(1+\frac{\mathrm{d}}{x}\,t\right),\quad \frac{\mathrm{d}}{v}\,t=\frac{\psi p}{\mathrm{d}ft}\left(1+\frac{\mathrm{d}}{x}\,t\right). \tag{124}$$

Je mets ces expressions (124) dans les équations (120), et j'ai

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.\frac{\varphi p}{\mathrm{d}ft}\,;\quad \frac{\mathrm{d}}{v}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.\frac{\psi p}{\mathrm{d}ft}\,. \tag{125}$$

Comme la fonction F est arbitraire, celles-ci donnent

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{\mathrm{d}}{u}\,\varphi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\varphi p\,.\,\frac{\varphi p}{\mathrm{d}ft}\,, & \frac{\mathrm{d}}{v}\,\varphi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\varphi p\,.\,\frac{\psi p}{\mathrm{d}ft}\,,\\[2ex] \frac{\mathrm{d}}{u}\,\psi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\psi p\,.\,\frac{\varphi p}{\mathrm{d}ft}\,, & \frac{\mathrm{d}}{v}\,\psi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\psi p\,.\,\frac{\psi p}{\mathrm{d}ft}\,.\end{array}\right\}\quad(126)$$

Quand on fait, dans (118), $u=v=0$, il vient $ft=0$. Supposons que cette équation donne $t=\theta$; on aura $\mathrm{F}p_0=\mathrm{F}(x+\theta)$; et, d'après les équations (125),

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\,\mathrm{F}p_0=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}(x+\theta)\,.\,\frac{\phi(x+\theta)}{\mathrm{d}f\theta}\,;\quad \frac{\mathrm{d}}{v}\,\mathrm{F}p_0=\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}(x+\theta)\,.\,\frac{\psi(x+\theta)}{\mathrm{d}f\theta}\,.$$

Voilà déjà les trois premiers termes du développement (119) entièrement déterminés. Pour passer outre, on différencie les équations (125), la première suivant u et v, la seconde suivant v; et on a, pour $\frac{\mathrm{d}^2}{u}\,\mathrm{F}p$, $\frac{\mathrm{d}}{u}\,\frac{\mathrm{d}}{v}\mathrm{F}p$, $\frac{\mathrm{d}^2}{v}\,\mathrm{F}p$, des expressions qui contiennent linéairement les différentielles, selon u, v, x, de $\mathrm{F}p$, φp, ψp et t. On élimine les différentielles suivant u et v, par le moyen des équations (124), (125), (126); et, réductions faites, il vient

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}^2}{u}\,\mathrm{F}p=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.(\varphi p)^2\right]}{(\mathrm{d}ft)^2}-\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.(\varphi p)^2.\,\mathrm{d}^2ft\,.\left(1+2\,\frac{\mathrm{d}}{x}\,t\right)}{(\mathrm{d}ft)^3}\,,\\[3ex] \frac{\mathrm{d}}{u}\,\frac{\mathrm{d}}{v}\mathrm{F}p=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.\,\varphi p\,.\,\psi p\right]}{(\mathrm{d}ft)^2}-\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.(\varphi p).(\psi p).\,\mathrm{d}^2ft\left(1+2\,\frac{\mathrm{d}}{x}\,t\right)}{(\mathrm{d}ft)^3}\,,\\[3ex] \frac{\mathrm{d}^2}{v}\,\mathrm{F}p=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.(\psi p)^2\right]}{(\mathrm{d}ft)^2}-\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.(\psi p)^2\,.\,\mathrm{d}^2ft\left(1+2\,\frac{\mathrm{d}}{x}\,t\right)}{(\mathrm{d}ft)^3}\,.\end{array}\right\}\quad(127)$$

Dans celles-ci, on satisfait à l'hypothèse $u=v=0$, qui donne $t=\theta$,

$p=x+\theta$, et, d'après (123) $\frac{\mathrm{d}}{x}t=0$; et on a les trois coefficiens différentiels $\frac{\mathrm{d}^2}{u}\mathrm{F}p_0$; $\frac{\mathrm{d}}{u}\frac{\mathrm{d}}{v}\mathrm{F}p_0$, $\frac{\mathrm{d}^2}{v}\mathrm{F}p_0$.

On continue de la même manière ; c'est-à-dire, on différencie les équations (127), suivant u et v, pour avoir $\frac{\mathrm{d}^3}{u}\mathrm{F}p$, $\frac{\mathrm{d}^2}{u}\frac{\mathrm{d}}{v}\mathrm{F}p$, $\frac{\mathrm{d}}{u}\frac{\mathrm{d}^2}{v}\mathrm{F}p$, $\frac{\mathrm{d}^3}{v}\mathrm{F}p$. Dans les résultats, les différentielles selon u et v de $\mathrm{F}p$, φp, ψp sont éliminées par les équations (125), (126) ; $\frac{\mathrm{d}}{u}t$, $\frac{\mathrm{d}}{v}t$ le sont d'après (124) ; on élimine les deux autres $\frac{\mathrm{d}}{u}\frac{\mathrm{d}}{x}t$, $\frac{\mathrm{d}}{v}\frac{\mathrm{d}}{x}t$, qui sont la même chose que $\frac{\mathrm{d}}{x}\frac{\mathrm{d}}{u}t$, $\frac{\mathrm{d}}{x}\frac{\mathrm{d}}{v}t$, respectivement, après avoir différencié suivant x les équations (124). Ensuite on satisfait à l'hypothèse $u=v=0$, qui donne $0=\frac{\mathrm{d}}{x}t=\frac{\mathrm{d}^2}{x}t$; et, ce qu'il faut bien remarquer, en général $\frac{\mathrm{d}^n}{x}t=0$; comme il est aisé de le conclure de l'équation (123) ; et on a les quatre coefficiens

$$\frac{\mathrm{d}^3}{u}\mathrm{F}p_0,\ \frac{\mathrm{d}^2}{u}\frac{\mathrm{d}}{v}\mathrm{F}p_0,\ \frac{\mathrm{d}}{u}\frac{\mathrm{d}^2}{v}\mathrm{F}p_0,\ \frac{\mathrm{d}^3}{v}\mathrm{F}p_0 :$$

La route à suivre pour continuer indéfiniment est suffisamment reconnue ; et il est visible que tout se réduit à des différentiations, suivant u et v, des derniers résultats obtenus, et à l'élimination des différentielles, suivant u et v, de $\mathrm{F}p$, φp, ψp, d'après (125), et des différentielles de la forme $\frac{\mathrm{d}^n}{x}\frac{\mathrm{d}}{u}t$, $\frac{\mathrm{d}^n}{x}\frac{\mathrm{d}}{v}t$, d'après les équations (124) différenciées, suivant x, autant de fois qu'il est nécessaire.

Supposons actuellement, en particulier $ft=t$, et partant $\mathrm{d}ft=1$; en faisant cette hypothèse dans (125) et (126), on aura d'abord

$$\frac{d}{u}\left\{\frac{d}{x}Fp.(\varphi p)^m\right\}=(\varphi p)^m.\frac{d}{x}\;\frac{d}{u}\,Fp+\frac{d}{x}Fp.\frac{d}{u}(\varphi p)^m\;;$$

et comme, d'après (125), (126),

$$\frac{d}{x}\;\frac{d}{u}\,Fp=\varphi p.\frac{d^2}{x}\,Fp+\frac{d}{x}Fp.\frac{d}{x}\,\varphi p\;;$$

$$\frac{d}{u}(\varphi p)^m=m(\varphi p)^{m-1}.\frac{d}{u}\,\varphi p=m(\varphi p)^m.\frac{d}{x}\,\varphi p\;;$$

il viendra, en réduisant,

$$\frac{d}{u}\left\{\frac{d}{x}Fp.(\varphi p)^m\right\}=\frac{d}{x}\left\{\frac{d}{x}Fp.(\varphi p)^{m+1}\right\}. \qquad (128)$$

On trouvera, de la même manière,

$$\frac{d}{v}\left\{\frac{d}{x}Fp.(\varphi p)^m.(\psi p)^n\right\}=\frac{d}{x}\left\{\frac{d}{x}Fp.(\varphi p)^m.(\psi p)^{n+1}\right\}. \qquad (129)$$

Cela étant, en différenciant successivement, par rapport à u, la première (125), on aura, eu égard à (128),

$$\frac{d^2}{u}Fp=\frac{d}{u}\left(\frac{d}{x}Fp.\varphi p\right)=\frac{d}{x}\left\{\frac{d}{x}Fp.(\varphi p)^2\right\},$$

$$\frac{d^3}{u}Fp=\frac{d}{x}\;\frac{d}{u}\left[\frac{d}{x}Fp.(\varphi p)^2\right]=\frac{d^2}{x}\left\{\frac{d}{x}Fp.(\varphi p)^3\right\};$$

et, en général

$$\frac{d^m}{u}Fp=\frac{d^{m-1}}{x}\left\{\frac{d}{x}Fp.(\varphi p)^n\right\}. \qquad (130)$$

On différenciera ensuite l'équation (130) successivement par rapport à ν ; et, en faisant attention à (129), on trouvera

$$\frac{\mathrm{d}}{\nu}\,\frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\frac{\mathrm{d}}{\nu}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{x}\,\frac{\mathrm{d}}{\nu}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.\,(\varphi p)^m\right\}=\frac{\mathrm{d}^m}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p.(\varphi p)^m\psi p\right\},$$

$$\frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\nu}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.\,(\varphi p)^m.(\psi p)^2\right\};$$

et, en général

$$\frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\nu}\,\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}^{m+n-1}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\,\mathrm{F}p\,.\,(\varphi p)^m.(\psi p)^n\right\}. \tag{131}$$

C'est le terme général des coefficiens du développement cherché, où il n'y a plus qu'à satisfaire à la condition $u=\nu=0$, qui (118) donne $t=0$. Alors, dans notre terme général (131), p se change en x ; les différentielles partielles suivant x, deviennent totales ; il est alors

$$\frac{\mathrm{d}^m}{u}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\nu}\,\mathrm{F}p_0=\mathrm{d}^{m+n-1}\left\{\mathrm{dF}x\,.\,(\varphi x)^m.(\psi x)^n\right\}; \tag{132}$$

et on a enfin (119)

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{F}(x+t)=\mathrm{F}x+u\mathrm{dF}x\,.\,\varphi x+\frac{u^2}{1.2}\,\mathrm{d}\{\mathrm{dF}x\,.\,(\varphi x)^2\}+\ldots\ldots\\
+\nu\mathrm{dF}x\,.\,\psi x+2\,\frac{u\nu}{1.2}\,\mathrm{d}\{\mathrm{dF}x.\varphi x.\psi x\}+\ldots\ldots\\
+\frac{\nu^2}{1.2}\,\mathrm{d}\{\mathrm{dF}x\,.\,(\psi x)^2\}+\ldots\ldots\\
+\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{133}$$

Je m'abstiendrai de faire des applications des formules de déve-

loppement qu'on vient de lire, pour ne pas excéder les limites que je me suis prescrites. En effet, mon projet a été uniquement d'offrir un aperçu un peu détaillé de la manière dont j'ai traité les principes du calcul différentiel, dans la 1.re partie du travail que j'ai eu l'honneur de présenter à la 1.re classe de l'institut; les applications des formules de développement des fonctions en séries sont l'objet d'une seconde partie. J'y suis parvenu à déduire de ces formules, sans avoir besoin de recourir à aucune notation nouvelle, les formules principales fondées jusqu'ici sur l'*analise combinatoire* ou sur le *calcul des dérivations*. MM. les Commissaires de la classe ont bien voulu dire, à cet égard, dans leur rapport:
» En rappelant ainsi au calcul différentiel des méthodes variées, et
» dont quelques-unes ne paraissent pas très-convenables à l'état
» actuel de l'analise, (l'auteur) a fait une chose très-utile pour
» la science. Il faut bien que tous les faits nouveaux, dès qu'ils com-
» posent un ensemble, quoiqu'ils ne semblent point avoir en eux-
» mêmes une très-grande importance, soient ramenés aux théories
» qui forment le corps de la science, et dont il est le plus à
» propos d'encourager la culture. »

Il serait encore plus étranger à mon dessein d'entrer dans aucun détail concernant la 3.me partie, dans laquelle je m'occupe de la recherche des moyens pratiques les plus simples de développer ultérieurement, et jusqu'à ce qu'on ait mis en évidence les différences constantes, les différentielles des fonctions composées, dont l'ensemble est donné immédiatement par un premier développement, c'est-à-dire, par les formules de la seconde partie.

Mais il pourra n'être pas inutile maintenant de jeter un coup-d'œil général sur les divers systèmes qui, jusqu'ici, ont été suivis dans l'exposition des principes du calcul différentiel; les réflexions que cet examen fera naître seront tout à fait propres à faire ressortir les avantages de la théorie qui vient d'être exposée, à prévenir de fausses interprétations, et enfin à réfuter les objections auxquelles cette théorie a pu et pourrait encore donner naissance.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Réflexions sur les divers systèmes d'exposition des principes du calcul différentiel, et, en particulier, sur la doctrine des infiniment petits;

Par M. Servois, professeur aux écoles d'artillerie.

Parmi les différentes manières de présenter le calcul différentiel, je ne dirai pas qu'il y en ait une qu'il soit nécessaire d'adopter. Toutes celles qui sont légitimes ont, du moins aux yeux de ceux qui les proposent, quelques avantages particuliers. Mais, s'il est utile de lier solidement le calcul différentiel avec l'analise algébrique ordinaire; si le passage de l'une à l'autre doit être facile et s'exécuter, pour ainsi parler, de plain-pied; si l'on doit pouvoir répondre, d'une manière à la fois claire et précise, aux questions: Qu'est-ce qu'une différentielle? Quand et comment se présentent comme d'elles-mêmes les différentielles? Avec quelles fonctions analitiques conservent-elles, non de simples analogies, mais des rapports intimes? Je croirai ne rien accorder à la partialité, en affirmant qu'on inclinera vers la théorie dont j'ai essayé de tracer une esquisse rapide dans l'article qui précède celui-ci.

Dans l'analise algébrique, après avoir considéré les quantités comme déterminées ou constantes, on est mené naturellement à les considérer comme variables. Toute variation, qu'elle soit elle-même constante ou variable, est essentiellement une quantité finie; au moins est-ce là le premier jugement qu'on a dû en porter. Or, il faut exprimer la variation d'une fonction composée de variables élémentaires, par le moyen des variations de celles-ci : voilà le premier problème que l'on puisse se proposer dans cette partie ; les premiers essais de solution conduisent à des séries. Ainsi, quand, dès l'arithmétique, on n'aurait pas déjà trouvé des séries, telles que les quotiens et les racines, approchées par le moyen des décimales, on y serait nécessairement parvenu, en considérant la quantité comme variable. Les séries et le *calcul différentiel* ont donc dû prendre naissance ensemble ; c'est à l'entrée de ce dernier qu'on rencontre un premier développement de l'*état varié* d'une fonction quelconque, z par exemple. En essayant d'ordonner ce développement d'une autre manière, on ne peut se dispenser de faire attention à la série très-remarquable de différences

$$\Delta z - \tfrac{1}{2}\Delta^2 z + \tfrac{1}{3}\Delta^3 z - \tfrac{1}{4}\Delta^4 z + \ldots,$$

à laquelle on est tenté de donner un nom qui rappelle sa composition : celui de *différentielle* se présente comme de lui-même. Déjà, en comparant les deux développemens différens dont est susceptible le binôme élémentaire $(1+a)^m$, on avait trouvé la série

$$a - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{4}a^4 + \ldots,$$

à laquelle on avait donné le nom de *logarithme* de $(1+a)$; ainsi, par la simple analogie, la différentielle est *comme* le logarithme de l'état varié $(z+\Delta z)$. Chemin faisant, d'autres rapports, entre la différentielle, la différence, l'état varié et les nombres, se sont manifestés ; il a fallu en rechercher la cause ; et tout s'est expliqué fort heureusement, quand, après avoir dépouillé, par une sévère abstraction, ces fonctions de leurs qualités spécifiques, on a eu simplement à considérer les deux propriétés qu'elles possèdent en commun, d'être *distributives* et *commutatives entre elles*.

Cette marche, si naturelle, n'a point été celle des inventeurs.

Il est de fait que le calcul différentiel est né des besoins de la géométrie. Or, le calcul algébrique, qui s'occupe essentiellement de la quantité *discrète*, c'est-à-dire, des *nombres*, ne peut s'appliquer à la quantité *continue*, c'est-à-dire, à l'*étendue*, que lorsqu'on suppose que les variations numériques deviennent arbitrairement ou indéfiniment petites. Ainsi, le moyen d'union entre le calcul et la géométrie est nécessairement la *méthode des limites*; c'est pourquoi les inventeurs, et les bons esprits qui sont venus après, ont pris, ou du moins indiqué, pour méthode d'*exposition* et d'*application* du calcul différentiel, celle des limites.

Newton n'a point, comme Mac-Laurin et quelques autres de ses compatriotes, transporté sans ménagement la mécanique dans son calcul des fluxions; sa théorie est fondée sur celle des dernières raisons des quantités; et, suivant lui, *Ultimæ rationes reverà non sunt rationes QUANTITATUM ULTIMARUM, sed LIMITES ad quos rationes semper appropinquant.* (Livre 1.er des *Principes*; Scolie sur le lemme XI); principe très-lumineux, et qu'on n'a pas assez remarqué.

Leibnitz, co-inventeur, professait la même doctrine; il a constamment donné ses différentielles pour des quantités incomparablement petites; et, dans les applications, il a toujours cru qn'on pouvait rendre les démonstrations rigoureuses par la méthode d'Archimède: celle des limites..... *Quod etiam Archimedes sumsit aliique post ipsum omnes, et hoc ipsum est quod dicitur differentiam esse datâ quâvis minorem; et Archimede quidem PROCESSU res semper deductione ad absurdum confirmari potest.* (Réponse aux difficultés de Nieuwentiit; œuvres, tom. 3.me, page 328). D'ailleurs, ce savant homme n'a jamais admis de quantités *infiniment petites*, dans le sens propre de ce terme. On connaît la discussion assez longue qui a existé entre lui et Jean Bernouilli à cet égard; discussion dans laquelle il a constamment tenu la négative (Voyez le *Commerce épistolaire* entre ces deux illustres géomètres, publié par Cramer).

Euler ne parle pas un autre langage, dans la belle préface de ses *Institutiones calculi differentialis...... Hic autem* LIMES *qui quasi rationem ultimam incrementorum constituit , verum est objectum calculi differentialis.* Et si, dans le cours de son livre, il échappe à ce grand homme quelques expressions un peu dures, on doit, ce me semble, les interpréter bénignement, d'après ce principe formellement reconnu.

On sait que d'Alembert s'est distingué parmi les géomètres qui ont appliqué la méthode des limites au calcul différentiel. Ainsi, on ne doit point être surpris de compter dans les mêmes rangs les bons géomètres qui sont venus après : tels que Karoten, Kœstner, Holland, Tempelhof, Vincent Ricati et Saladini, Cousin, Lhuilier, Paoli, Pasquich, Gourief, etc. Il ne serait d'ailleurs pas difficile de faire voir que les méthodes particulières, telle que celle des *Fonctions dérivées* de l'immortel Lagrange, laquelle a de nombreux sectateurs, et celle des *indéterminées*, proposée ou recommandée par Boscowich, Naudenot, Arbogast, Carnot, etc., reviennent foncièrement à celle des limites. Comment est-il donc arrivé que cette étrange méthode des *infiniment petits* ait acquis, du moins sur le continent, tant de célébrité ; et même qu'elle soit parvenue à placer son nom parmi les synonymes de *méthode différentielle ?*

Je pourrais, si j'en avais le loisir, assigner à cette usurpation plusieurs causes probables ; mais ce qui m'étonne d'avantage, c'est que la méthode des infiniment petits conserve encore, non seulement des sectateurs, mais des fauteurs enthousiastes : écoutons un moment, un de ces derniers, et admirons ! « Le soin d'éviter l'idée de l'*infini*, » dans des recherches mathématiques, prouve incontestablement, » outre une routine aveugle, une véritable ignorance de la signi- » fication de cette idée ; et nous ne craignons pas d'avouer que » nous croyons anticiper sur le jugement de la postérité, en déclarant » que, quèlque grands que puissent être les travaux de certains » géomètres, le soin qu'ils mettent à imiter les anciens, dans » l'exclusion de l'idée de l'infini, prouve, d'une manière irréfragable,

» qu'ils ne sont pas à la hauteur à laquelle la science est portée » depuis Leibnitz, puisqu'ils évitent cette région élevée où se trouve » le principe de la génération des quantités, et par conséquent la » veritable source des lois mathématiques, pour venir ramper dans » la région des sens, la seule connue des anciens, où l'on ne trouve » que le grossier mécanisme des calculs. » (*Réfutation de la théorie des fonctions analitiques* de Lagrange. Paris, 1812. Page 40) Déjà, dans un premier ouvrage (*Introduction à la philosophie des mathématiques*. Paris, 1811), le même auteur, en annonçant que « les » procédés (du calcul différentiel) implique une *antinomie* qui » les fait paraître, tour à tour, comme doués et comme dépourvus » d'une exactitude rigoureuse ».... (*Philosophie*, etc., page 32), avait gourmandé les géomètres *non infinitaires*, avec ce ton tranchant et cette emphase dogmatique qui forment la couleur dominante des écrits inspirés par le *Système philosophique* (celui de KANT) dont il fait profession.

Essayons, un instant, d'apprécier tout cela à sa juste valeur.

D'abord, je me rappelle fort bien que Kant, trouvant l'*infini* dans la *raison pure* et le *fini* dans la *sensibilité*, a conclu, de la coexistence de ces deux facultés dans l'être *cognitif*, qu'il doit y avoir, relativement à l'idée *cosmologique*, par exemple, plusieurs *antinomies* qui ne sont au fond que des illusions auxquelles il n'est point difficile de se soustraire, quand on veut bien distinguer soigneusement ce que chacune des *formes de la cognition* y apporte pour sa part. Faisons la même chose, par rapport à la prétendue *antinomie* mathématique que le disciple s'applaudit d'avoir découverte dans la théorie du calcul différentiel. Admettons, ce qui est vrai, que le *calcul* appartienne exclusivement à la *sensibilité* qui, selon ces Messieurs, est la faculté de l'*individuel*; il s'ensuivra qu'il y a, non seulement paralogisme, mais erreur palpable à soumettre au *calcul* l'*infini*, qui est du domaine d'une autre faculté: celle de l'*absolu*, ou ce qu'ils appellent la *raison pure*. Je demande pardon à mes lecteur de l'emploi que je viens de faire d'un idiome avec lequel, sans doute, peu de personnes en France sont familiarisées ; mais je fais ici un argument que nous appellions jadis *ad hominem*.

Qu'on ne dise pas que cette illusion est tellement nécessaire qu'on ne puisse la décliner...! On marche devant celui qui nie le mouvement. Newton, d'Alembert, Lagrange, etc., ont marché ; c'est-à-dire, qu'ils ont mis en effet les principes du calcul différentiel hors de toute dépendance de la chose et même du mot *infini*.

Mais l'infini n'est-il pas *cette région élevée où se trouve le principe de la génération des quantités, la véritable source des lois mathématiques ?* Non certainement, à moins que vous ne soyez bien décidé à rester sous l'influence de l'illusion que vous avez signalée. J'ajoute, relativement au calcul différentiel, que l'introduction de l'idée d'infini n'y est pas même utile.

L'idée d'infiniment petit n'abrège point l'*exposition*. En effet, il est impossible d'établir la hiérarchie des infiniment petits de différens ordres, sans avoir recours à la série de Taylor, ou à quelques autres équivalens. Je défie de prouver sans cela, d'une manière satisfaisante, que, par exemple, dz étant un infiniment petit du 1.er ordre, d^2z en est un du second. Même défaut dans les *applications*. Si on n'admet pas l'hypothèse de la courbe polygone, hypothèse qui paraît si étrange à ceux qui viennent d'étudier les élémens de la géométrie Euclidienne, je défie qu'on démontre, sans la série de Taylor, que le prolongement, jusqu'à la tangente, de l'ordonnée infiniment voisine de celle du point de tangence, que la différence entre l'arc infinitésimal et sa corde, etc., sont des infiniment petits du 2.e ordre *au plus*. Si l'on admet la gothique hypothèse : le rapport $\frac{dy}{dx}$ est *rigoureusement* égal à celui de l'ordonnée à la sous-tangente ; pourquoi donc alors néglige-t-on des termes en différenciant l'équation de la courbe ? D'ailleurs, comme l'a fort bien remarqué l'auteur de la théorie des fonctions analitiques, c'est *un fait* que les résultats du *calcul infinitésimal* sont exacts par *compensation d'erreurs* : or, je porte encore le défi d'expliquer ce fait *majeur*, sans avoir recours aux séries. Cela étant, puisqu'il faut absolument, et avant tout, être maître du développement en séries, pourquoi ne passerait-on pas de là immédiatement au calcul différentiel, par la porte de plain-pied qui est ouverte ? et pourquoi reviendrait-on, par un circuit ténébreux, celui des considérations infinitésimales, aux principes de ce calcul ? Qu'on se forme, si l'on veut, et ce qui est possible, d'après la vraie théorie, des méthodes abrégées qui permettent de biffer ou d'omettre, à l'avance, des termes de développement, qui disparaîtront à la fin de longs calculs; je ne m'y oppose pas; les géomètres exercés le font tous; et quand une fois on est en possession de ces méthodes, on peut, dans la géométrie et dans la mécanique, parler un langage qui se rapproche de celui des *infinitaires*, sans néanmoins attacher aux mêmes termes les mêmes idées; mais il serait absolument impraticable de commencer par là.

Il y a plus. Si l'on consulte l'histoire du calcul différentiel, combien y verra-t-on de questions puériles ou ridicules, de contestations plus qu'animées, d'erreurs même, prendre leur source dans l'obscurité répandue par les infiniment petits, et dans la difficulté de leur maniement. Je ne puis m'engager dans cette discussion; mais qui est-ce qui ne se rappelle pas les *incompréhensibilités* de Sturmius; les *Subtilités* de Guido Grandi; les *Ponts jetés* entre le *fini* et l'*infini* de Fontenelle; la méprise de Sauveur, dans le problème de la *Brachystochrone*; celle de Jean Bernouilli lui-même, dans sa première solution du problème des *Isopérimètres*; celle de Charles sur les *solutions particulières* des équations différentielles; les discussions relatives à l'expression analitique de la force accélératrice du mouvement varié : discussions qui dégénérèrent en dispute entre Parent et Saurin, relativement aux théorèmes d'Huygens sur la force centrifuge, et qui enfantèrent cette ridicule distinction de la force considérée dans la courbe polygone et dans la courbe rigoureuse; discussions enfin qui ne sont pas encore terminées, à en juger du moins par quelques mémoires de Trembley (*Académie de Berlin*, 1801, *etc.*) *etc.*, *etc.*

En un mot, je suis convaincu que la méthode infinitésimale n'a ni ne peut avoir de théorie qu'en pratique ; c'est un instrument dangereux entre les mains des commençans, qui imprime nécessairement, et pour long-temps, un caractère de gaucherie, de pusillanimité, à leurs recherches dans la carrière des applications. Enfin, *anticipant*, à mon tour, *sur le jugement de la postérité*, j'ose prédire que cette méthode sera un jour accusée, et avec raison, d'avoir retardé le progrès des sciences mathématiques. Mais je dois reprendre le fil de mes réflexions.

J'ai déjà insinué la distinction que j'établis, d'après Euler, entre la méthode d'*exposition* et la méthode d'*application* du calcul différentiel. Celle-ci, quand il est question de l'*espace* et du *temps*, objets des principales applications, est nécessairement la méthode des suites en général. Sous le rapport particulier de la pratique, rien, à mon avis, ne surpasse, en élégance, j'allais presque dire en majesté, la marche tracée dans les deux dernières parties de l'excellente *Théorie des fonctions analitiques*. Quant à la première méthode, celle d'exposition, j'ai toujours trouvé quelques inconvéniens à la déduire de la considération des fonctions dérivées, ou en général des limites. Un des plus graves, selon moi, est de ne conduire aux séries fondamentales qu'après leur avoir gratuitement assigné leur forme. Cet inconvénient, bien senti par l'auteur des *Fonctions dérivées*, n'a pas été heureusement écarté par la démonstration proposée (*Théorie des fonctions*, page 7 de la 1.re édit. et page 8 de la 2.me). Je m'en suis expliqué franchement, à la tête de mon second mémoire ; et j'ai cité les opinions conformes d'Arbogast (*Lettre manuscrite*) et de Burja (*Mémoires de Berlin*, 1801); mais personne moins que moi n'aurait songé à oser fonder là-dessus le scandale d'une *REFUTATION de la théorie des fonctions analitiques*. J'ai donc dû porter mes vues d'un autre côté ; et voici la marche que j'ai suivie.

Les premiers développemens en séries que l'on rencontre, sont les

les résultats de transformations successives appliquées à une équation identique. Ecrivons, par exemple,

$$\frac{1}{1+a}=\frac{1}{1+a}.$$

Exécutons indéfiniment sur le second membre l'opération de la divison, et nous aurons la série

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+a^4-\ldots\ldots$$

Ecrivons encore l'équation identique

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+x}+\frac{b+x}{(a+x)(a-b)}.$$

Faisons successivement $x=0$, $x=c$, $x=d$, ...; et nous aurons la suite des transformées

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a}+\frac{b}{a(a-b)};$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+c}+\frac{b+c}{(a+c)(a-b)};$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+d}+\frac{b+d}{(a+d)(a-b)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Prenons la somme des produits respectifs de ces équations par 1, par $\frac{b}{a}$, par $\frac{b(b+c)}{a(a+c)}$, par $\frac{b(b+c)(b+d)}{a(a+c)(a+d)}$, par .....; et nous aurons, en réduisant, la série

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a}+\frac{b}{a(a+c)}+\frac{b(b+c)}{a(a+c)(a+d)}+\ldots+\frac{b(b+c)(b+d)\ldots(b+p)}{a(a+c)(a+d)\ldots(a+p)(a+q)}$$

$$+\frac{b(b+c)(b+d)\ldots.(b+p)(b+q)}{a(a+c)(a+d)\ldots.(a+p)(a+q)(a-b)}\,.$$

C'est avec cette formule que Nicole enseigne à sommer une infinité de suites (*Mémoires de l'académie des sciences de Paris*. 1727).

Ces séries ont la propriété d'être arrêtées à quel terme on veut, et d'avoir un terme complémentaire, nécessaire pour conserver l'identité. Dans la première, ce complément est le reste de la division à laquelle on s'en tient, divisé par $1+a$; et dans la seconde, il se trouve à la fin. Je savais que la série de Taylor a, dans le fait, un semblable complément qui doit aussi appartenir à toutes celles qui en dérivent, et par conséquent à toutes les séries connues; d'où il m'a été permis de conjecturer que toutes les séries doivent être le résultat d'une suite de transformations d'équations identiques; que toutes doivent jouir de l'avantage d'être arrêtées où l'on veut, et de conserver l'identité par le moyen d'un terme complémentaire. Cette conjecture s'est heureusement changée en certitude, et il en est résulté une notion nouvelle, et bien importante, sur la nature des séries. On a vu au commencement du précédent mémoire, comment, en partant d'équations identiques, je suis arrivé aux développemens fondamentaux. « Le procédé que suit l'auteur (est-il » dit dans le rapport de MM. les Commissaires) a deux avantages » qu'il faut remarquer; le premier, c'est qu'il n'exige pas que l'on » connaisse à l'avance la forme des séries qu'on cherche; le second, » c'est qu'il permet d'arrêter ces séries à quelque terme que ce soit ». La forme du complément se reconnait sur-le-champ. Pour la série de Taylor, en particulier, cette forme est celle que Ampère a remarqué le premier, dans un très-beau mémoire d'analise (XIII.e cahier du *Journal de l'école polytechnique*).

Ici encore, je me trouve en opposition directe avec le *Philosophe transcendantal*. « Les séries, prises dans toute leur généralité,... ont, » par elles-mêmes, dans le nombre indéfini de leurs termes, et

» sans le secours d'*aucune quantité complémentaire*, une signification » déterminée.... c'est là le point philosophique de l'importante » question des séries ; et c'est ce point que, suivant nous, les » géomètres n'ont pas encore atteint, dans l'état où se trouve la » science. » (*Réfutation etc.*, page 58). On n'a pas encore besoin cette fois d'ergotisme, pour faire ressortir la fausseté de ces assertions. L'équation identique, les transformations successives, la série et son complément sont *des faits*. Les séries divergentes ne peuvent être employées qu'avec leur complément ; et c'est ainsi qu'on a depuis long-temps résolu fort heureusement le paradoxe présenté par le développement de la fraction $\frac{1}{1+1}$. Quand la convergence est reconnue, on prononce la diminution successive et indéfinie du complément, d'après la comparaison des développemens consécutifs et la raison d'identité ; alors seulement les séries servent utilement aux besoins de la pratique, sans avoir égard à ce complément.

On aura remarqué, sans doute, que notre procédé d'exposition offre un autre avantage considérable : c'est de conserver aux quantités par rapport auxquelles nos séries sont ordonnées toute la généralité dont elles sont susceptibles, c'est-à-dire, de ne point exiger de considérations particulières, sous le rapport du positif, du négatif, de l'entier ou du fractionnaire.

Un second inconvénient de l'application des limites à l'exposition du calcul différentiel, inconvénient qu'elle partage avec la méthode infinitésimale, est de laisser sous le voile du mystère ces belles analogies des fonctions différentielles entre elles et avec les facteurs. On a vu comment je suis parvenu à déchirer ce voile. A cet égard, MM. les Commissaires ont encore eu la bonté de dire : « En montrant » que c'est à leur nature *distributive*, en général, et *commutatives* » *entre elles* et avec le facteur constant, que les états variés, les » différences et les différentielles doivent leurs propriétés et les ana- » logies de leurs développemens avec ceux des puissances, (l'auteur) » en donne la *véritable origine*, et éloigne cette idée de *séparation*

» *des échelles* qu'Arbogast avait imaginée, d'après Lorgna, pour » expliquer les mêmes circonstances, et qui a paru un peu hasardée. » En effet, et il ne faut qu'une légère attention pour l'apercevoir, nous ne perdons jamais de vue, dans nos formules, le *sujet des fonctions*; et il n'y a ni séparation d'échelles ni opérations qui se terminent exclusivement à ces échelles. La notation proposée (n.° 2) n'est point d'un usage indispensable; elle est seulement très-utile, en tant qu'elle épargne la peine de représenter, à chaque instant, des fonctions polynômes par de nouvelles lettres. La belle méthode d'intégrer les équations aux coefficiens constans, publiée dans les *Annales de mathématiques* (tome 3, pag. 244 et suiv.), et qui ajoute tant d'intérêt aux formules de l'analogie, ne réclame pas davantage la séparation des échelles, comme il serait aisé de le faire voir. Je ne puis rien dire ici d'un autre genre d'application que ces formules fournissent à l'auteur du mémoire cité (*ibid.* n.os 9 et 10); cela m'engagerait trop loin. Je ferai seulement observer que, si l'on craint de broncher dans une route scabreuse et peu fréquentée, il faut ne prendre, pour formules de départ, que celles à la formation desquelles on a assisté, et qui, identiques d'abord, n'ont été transformées que d'après la double propriété des nombres d'être distributifs et commutatifs entre eux. Ainsi, par exemple, je conclurais au moins à une révision de la formule de départ, si, parmi les résultats qu'elle m'aurait donnés, je trouvais une série comme celle-ci (*ibid.* pag. 252, formule 23)

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2-3^2}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{x^2-5^2}-\ldots.$$

En effet, à cause de

$$\frac{x^2}{x^2-1}=1+\frac{1}{x^2-1}\,,\quad \frac{x}{x^2-3^2}=1+\frac{3^3}{x^2-3^2}\,,\quad \frac{x^2}{x^2-5^2}=1+\frac{5^2}{x^2-5^2}\,,\ldots..$$

elle se change en

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)+\left\{\frac{1}{x^2-1}-\frac{3}{x^2-3^2}+\frac{5}{x^2-5^2}-\ldots\right\};$$

d'où, à cause de

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

on conclut

$$0=\frac{1}{x^2-1}-\frac{3}{x^2-3^2}+\frac{5}{x^2-5^2}-\ldots=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}-\ldots\\-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}+\ldots\end{array}\right.$$

Ici je fais l'essai de $x=0$, et j'ai, en divisant par 2,

$$0=-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\ldots=-\frac{\pi}{4};$$

résultat qui n'est pas vrai.

Je fais encore l'essai de $x=1$, et j'ai

$$0=\frac{1}{0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\ldots-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{0};$$

résultat encore plus étrange que le premier. (*)

On me permettra, je pense, de tirer encore de ma théorie des

(*) C'est la formule (21) du mémoire cité, empruntée d'Euler, et de laquelle l'auteur a déduit la sienne (23), qui contient le germe de l'erreur que je relève ici. Cette formule d'Euler, vraie pour quelques cas particuliers, n'en est pas moins, en général, d'une fausseté manifeste, puisqu'en y supposant $\alpha=n\pi$, n étant un nombre entier positif ou négatif, elle donne $\frac{n}{4}\pi^2=0$.

fonctions *distributives* et *commutatives*, une conséquence d'une autre nature : c'est que la notation Leibnitzienne, pour le calcul différentiel, doit être conservée. Laissons aux Anglais leurs lettres ponctuées; conservons aux accens l'utile emploi de multiplier nos alphabets; et, en nous rapprochant de la notation qui, de l'aveu de tous les analistes, est la plus parfaite, celle des puissances, destinons exclusivement les exposans numériques à représenter les différens ordres de fonctions répétées. Quand à ma notation des différentielles partielles, on en pensera ce qu'on voudra; elle n'a d'autre avantage que d'être en harmonie avec celle que j'ai cru devoir adopter pour les *fonctions particlles* en général, laquelle ne peut guère être plus simple ni plus significative. Au reste, il est remarquable qu'Euler en ait proposé une toute semblable, dans un mémoire qui fait partie des *Nova Acta* de Petersbourg (1786, pag. 17).

J'aurais pu me dispenser de donner (n.° 19) une idée de l'extension dont les séries fondamentales (n.° 15) sont susceptibles, si j'avais cru devoir me borner à établir ce qui est précisément nécessaire pour différencier les fonctions; mais, à mon avis, le calcul différentiel *pur* s'étend plus loin qu'on ne le pense communément; et, en particulier, le développement des fonctions en séries appartient plutôt à la substance de ce calcul qu'à ses applications. D'ailleurs, j'ai voulu montrer comment des séries fondamentales on peut s'élever à ce qu'il y a de plus général, d'une manière fort naturelle. Ici encore je suis en opposition avec le *Philosophe*, au moins pour la méthode. On sait avec quel fracas il a communiqué au premier corps savant de l'Europe, et ensuite au public, certaine formule générale, *d'où il tire toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions*; c'est-à-dire, qu'il *descend*, pendant que je m'efforce de *monter*.

La formule générale du *Criticiste* présente Fx développée suivant les produits des états variés successifs de φx, savoir

$$\varphi x\ ,\ \varphi x\,.\,\varphi(x+\xi)\ ,\ \varphi x\,.\,\varphi(x+\xi)\,.\,\varphi(x+2\xi)\ ,\ldots\ldots;$$

ξ étant la différence constante de la variable x. Les coefficiens des differens termes sont des fonctions très-compliquées des différences des mêmes fonctions, dans lesquelles il faut, après tout développement, mettre une des valeurs de x, donnée par la résolution de l'équation $\varphi x=0$. On aura sans doute déjà aperçu que cette formule n'est elle-même qu'un *cas particulier* de notre formule (23, n.° 13). Effectivement, il suffit de faire

$$\varphi x=\varphi x\ ,\quad \varphi' x=\varphi(x+\xi)\ ,\quad \varphi'' x=\varphi(x+2\xi)\ ,\ldots\ldots;$$

et partant

$$\alpha=\alpha\ ,\quad \beta=\alpha+\xi\ ,\quad \gamma=\alpha+2\xi\ ,\ldots\ldots,$$

pour avoir, par nos équations (23), (27), et la série et les coefficiens du *Philosophe*.

Pour passer de là à la série ordonnée suivant les puissances de φx, il suppose ξ infiniment petit et, sous ce prétexte, il change tout bonnement les Δ en d. Cela pourra paraître fort bien aux yeux attaqués du strabisme infinitésimal ; mais ce n'est plus de cela qu'il s'agit ; c'est aux détails de transition, poussés jusqu'à l'une ou l'autre des formes reconnues dans le précédent mémoire (n.° 19), que je l'attendais. Or, à cet égard, il est d'une discrétion merveilleuse. Voyez, en effet, les tableaux d'expressions équivalentes (*Réfutation*, etc., pages 18, 19, 33) liées par ces phrases laconiques : « on verra de plus que ces expressions simplifiées davantage » peuvent être mises sous la forme..... on peut facilement trans- » former ces expressions en celles-ci..... » ; et, si vous ne voulez pas l'en croire sur parole, ayez le courage d'entreprendre ces transformations......! Ajoutez à cela que ses tableaux d'expressions analitiques ne présentent pas toujours une loi générale bien prononcée : tel est, en particulier, celui des expressions marquées par la lettre N (page 19). Je l'ai insinué (n.° 13), et je l'affirme ici positivement ; ces difficultés de détail sont un vice capital dans la méthode *descendante*, (que j'appellerais *synthétique*, si je ne discutais avec un *Criticiste*) ; et leur absence de la méthode *ascendante* assure à celle-ci tout l'avantage sur sa rivale. (*)

(*) J'ai dit (n.° 15) qu'on pouvait, par un simple changement dans la manière d'ordonner, passer du développement suivant les produits $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)\left(\frac{x-p-\alpha}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)\left(\frac{x-p-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{x-p-2\alpha}{\alpha}\right)$, ..., au développement suivant les puissances $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^2$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^3$, ... On verra peut-être avec quelque intérêt comment je puis justifier cette assertion.

Je prends, comme plus simple, le développement de $F(x+n\alpha)$. Il ne faut qu'une légère attention, après les premiers essais de développement, pour reconnaître qu'on a

$$\left.\begin{aligned} F(x+n\alpha)=Fx&+\frac{n}{1}\left\{\Delta Fx-\frac{1}{2}\Delta^2Fx+\frac{1}{3}\Delta^3Fx-\ldots\right\}\\ &+\frac{n^2}{1.2}\left\{\Delta^2Fx-\frac{3}{3}\Delta^3Fx+\frac{11\Delta^4Fx}{3.4}-\ldots\right\}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{n^m}{1.2\ldots m}\left\{\Delta^mFx-\frac{A\Delta^{m+1}Fx}{m+1}+\frac{B\Delta^{m+2}Fx}{(m-1)(m+2)}-\ldots\right\}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

équation dans laquelle les coefficiens A, B, ... de la série qui multiplie $\frac{n^m}{1.2\ldots.m}$, série que, pour abréger, je désignerai à l'avenir par Π, sont, d'après la théorie générale des équations, et en représentant respectivement par S_1, S_2, S_3, ... S_μ, des sommes de produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ..., μ à μ,

$A=S_1(1,2,\ldots,m)$, $B=S_2(1,2,\ldots,m+1)$, $C=S_3(1,2,\ldots,m+2)$, ..., $M=S_\mu(1,2,\ldots m+\mu-1)$.

μ est le rang de la lettre M; A étant supposée la première. Je désignerai par P la série qui multiplie $\frac{n^{m+1}}{1.2\ldots m+1}$; ses coefficiens seront $\frac{A'}{m+2}$, $\frac{B'}{(m+2)(m+3)}$, ...;

On

On me permettra, avant de terminer, de présenter ici, sur l'application de la philosophie transcendentale, et en général des

---

A', B', ... étant ce que deviennent A, B, ... respectivement, quand on y change m en $m+1$. Or, il est visible qu'on a les relations

$$A'=A+m+1\,,\quad B'=B+A'(m+2)\,,\quad C'=C+B'(m+3)\,,\ldots\ldots,\quad M'=M+L'(m+\mu)\,;$$

d'où l'on conclut sur-le-champ

$$\begin{aligned}M'=M&+L(m+\mu)+K(m+\mu-1)(m+\mu)+\ldots\ldots\\&+A(m+2)\ldots(m+\mu)+(m+1)\ldots(m+\mu)\,.\end{aligned}\qquad(2)$$

Je fais, pour abréger,

$$\mathrm{A}=\frac{A}{m+1}\,,\quad \mathrm{B}=\frac{B}{(m+1)(m+2)}\,,\ldots.;\quad \mathrm{A}'=\frac{A'}{m+2}\,,\quad \mathrm{B}'=\frac{B'}{(m+2)(m+3)}\,,\ldots.$$

ce qui donne

$$\Delta^m \mathrm{F}x-\mathrm{A}\,\Delta^{m+1}\mathrm{F}x+\mathrm{B}\,\Delta^{m+2}\mathrm{F}x-\ldots\ldots=\Pi\,,\qquad(3)$$

$$\Delta^{m+1}\mathrm{F}x-\mathrm{A}'\Delta^{m+2}\mathrm{F}x+\mathrm{B}'\Delta^{m+3}\mathrm{F}x-\ldots\ldots=P\,;\qquad(4)$$

et la relation générale (2) devient

$$M'=\frac{m+1}{m+1+\mu}\{\mathrm{M}+\mathrm{L}+\mathrm{K}+\ldots\ldots+\mathrm{B}+\mathrm{A}+1\}:\qquad(5)$$

Je fais ici $m=0$; alors (1) A, B, C, ... sont nuls et j'ai

$$\mathrm{A}'=\tfrac{1}{2}\,,\quad \mathrm{B}'=\tfrac{1}{3}\,;\quad \mathrm{C}'=\tfrac{1}{4}\,,\ldots..\mathrm{M}'=\frac{1}{1+\mu}\,;$$

ce qu'on sait déjà (1). Je fais ensuite $m=1$, dans (5); et, d'après les valeurs de A, B, C, ... relatives à $m=0$, j'ai systèmes métaphysiques aux mathématiques, quelques réflexions qui ne pourraient que difficilement trouver place ailleurs, et que le sujet qui m'occupe semble amener d'une manière assez naturelle.

$$M'=\frac{2}{2+\mu}\{M+L+\ldots+A+1\}=\frac{2}{2+\mu}\left\{\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu-1}+\ldots+\tfrac{1}{2}+1\right\}; \quad (6)$$

or, on a l'équation identique

$$\frac{(2+\mu-1)}{1+\mu}.1+\frac{(2+\mu-2)}{\mu}.\tfrac{1}{2}+\frac{(2+\mu-3)}{\mu-1}.\tfrac{1}{3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(2+\mu-\mu-1)}{1}.\frac{1}{1+\mu}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1+\mu},$$

ou bien

$$(2+\mu)\left\{\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{\mu.2}+\frac{1}{(\mu-1).3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2.\mu}+\frac{1}{1+\mu}\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots\ldots+\tfrac{1}{2}+1\right\}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1+\mu};$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{\mu.2}+\frac{1}{(\mu-1).3}+\ldots+\frac{1}{2.\mu}+\frac{1}{1+\mu}=\frac{2}{2+\mu}\left\{\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots+\tfrac{1}{2}+1\right\};$$

c'est-à-dire (6) qu'on a, lorsque $m=1$,

$$M'=M+\tfrac{1}{2}L+\tfrac{1}{3}K+\ldots+\frac{1}{\mu-1}B+\frac{1}{\mu}A+\frac{1}{\mu+1}. \quad (7)$$

En général, si, pour le cas de m, on a la relation (7), je dis que, pour le cas de $m+1$, on aura

$$M''=M'+\tfrac{1}{2}L'+\tfrac{1}{3}K'+\ldots+\frac{1}{\mu-1}B'+\frac{1}{\mu}A'+\frac{1}{\mu+1}. \quad (8)$$

En effet, d'après l'hypothèse (7) et la relation générale (5), on aura

J'avais bien prévu, en lisant KANT, que les géomètres seraient, tôt ou tard, l'objet des tracasseries de sa secte. On trouve, dans

---

$$M'=M+\tfrac{1}{2}L+\tfrac{1}{3}K+\ldots.=\frac{m+1}{m+1+\mu}(M+L+K+\ldots..)\,,$$

$$L'=L+\tfrac{1}{2}K+\tfrac{1}{3}I+\ldots.=\frac{m+1}{m+\mu}(L+K+I+\ldots.)\,,$$

$$K'=K+\tfrac{1}{2}I+\tfrac{1}{3}H+\ldots.=\frac{m+1}{m-1+\mu}(K+I+H+\ldots..)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Je tire de là ces deux résultats

$$1.^{\circ}\quad M+L+K+\ldots.=\frac{m+1+\mu}{m+1}.M'\,,\quad L+K+I+\ldots..$$
$$=\frac{m+\mu}{m+1}L'\,,\quad K+I+H+\ldots=\frac{m+\mu-1}{m+1}K'\,,\ldots.\,,$$

$$2.^{\circ}\quad M'+L'+K'+\ldots=M+L+K+\ldots+\tfrac{1}{2}(L+K+I+\ldots)+\tfrac{1}{3}(K+I+H+\ldots)+\ldots.\,;$$

donc, on aura, par la substitution du 1.er dans le 2.me,

$$M'+L'+K'+\ldots.=\frac{(m+1+\mu)}{m+1}\,\frac{M'}{1}+\frac{(m+\mu)}{m+1}.\frac{L'}{2}+\frac{(m+\mu-1)}{m+1}\,\frac{K'}{3}+\ldots..\,;$$

par conséquent

$$(m+1)(M'+L'+K'+\ldots)=(m+2+\mu)\left(M'+\frac{L'}{2}+\frac{K'}{3}+\ldots\right)-(M'+L'+K'+..)\,;$$

ce qui donne

$$\frac{m+2}{m+2+\mu}\{M'+L'+K'+\ldots.\}=M'+\tfrac{1}{2}L'+\tfrac{1}{3}K'+\ldots..\,;$$

équation dont le premier membre est, d'après (5), l'expression de M''. Donc les prolégomènes de la *Critique de la raison pure*, ce passage très-significatif : (Je cite d'après la traduction latine de Born) *Cum enim vix unquam de mathesi suâ philosophati sint* (*arduum sanè negotium*).... *tritæ regulæ atque empiricè usurpatæ..... iis sunt instar axiomatum ;* mais j'étais loin d'imaginer jusqu'à quel

---

la relation (8) est vraie quand la relation (7) a lieu ; mais, pour $m=0$, $m=1$, cette dernière est démontrée ; donc elle est géneralement vraie. En l'appliquant à l'équation (4), on aura

$$\begin{aligned} P=\Delta^{m+1}\mathrm{F}x-\mathrm{A}\Delta^{m+2}\mathrm{F}x+\mathrm{B}\Delta^{m+3}\mathrm{F}x-\mathrm{C}\Delta^{m+4}\mathrm{F}x+\ldots\\ -\tfrac{1}{2}\Delta^{m+2}\mathrm{F}x+\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\Delta^{m+3}\mathrm{F}x-\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\Delta^{m+4}\mathrm{F}x+\ldots\\ +\tfrac{1}{3}\Delta^{m+3}\mathrm{F}x-\tfrac{1}{3}\mathrm{A}\Delta^{m+4}\mathrm{F}x+\ldots\\ -\tfrac{1}{4}\Delta^{m+4}\mathrm{F}x+\ldots\\ +\ldots \end{aligned}$$

La première ligne horizontale est la même chose (3) que $\Delta\Pi$; la 2.me la même chose que $-\frac{1}{2}\Delta^2\Pi$; la 3.me la même chose que $+\frac{1}{3}\Delta^3\Pi,\ldots$; donc

$$P=\Delta\Pi-\tfrac{1}{2}\Delta^2\Pi+\tfrac{1}{3}\Delta^3\Pi-\tfrac{1}{4}\Delta^4\Pi+\ldots,$$

C'est la relation qui règne entre deux séries consécutives, coefficiens de n, dans le développement de $\mathrm{F}(x+n\alpha)$, suivant les puissances de n ; relation que nous avons établie d'une autre manière (n.o 15) ; et de laquelle il suit que, si l'on fait, comme en l'endroit cité,

$$\Delta\mathrm{F}x-\tfrac{1}{2}\Delta^2\mathrm{F}x+\tfrac{1}{3}\Delta^3\mathrm{F}x-\ldots=\mathrm{dF}x,$$

on aura

$$\Pi=\mathrm{d}^m\mathrm{F}x\quad,\qquad P=\mathrm{d}^{m+1}\mathrm{F}x\,;$$

On passe absolument de la même manière du développement de $(1+b)^n$, donné par la formule du binôme, au développement suivant les puissances de n ; d'où l'on voit que c'est pure paresse aux analistes d'introduire l'infini pour effectuer ce passage.

point ils seraient maltraités. Voyez, dans cette fastueuse conclusion de la *Philosophie des mathématiques* (pages 256 et suivantes), avec quel superbe dédain on y répond à cette question : *Quel était l'état des mathématiques, et sur-tout de l'algorithmie, avant cette philosophie des mathématiques ?* Vingt fois on y répète : « On ne » le savait pas...... on ne s'en doutait même pas...... on n'en avait » pas l'idée...... »

Mais sommes-nous bien aussi pauvres qu'on le dit ? et la *Philosophie critique* ne se pavanerait-elle point un peu aux dépens de notre plumage ?

« Les théories des logarithmes et des sinus, purement algébriques, » n'étaient point connues.... » Quelqu'un a dejà réclamé contre cette allégation, en citant entr'autres l'ouvrage de Suremain-de-Missery (*Théorie purement algébrique des quantités imaginaires*; Paris 1801).

« La loi fondamentale de la théorie des différences n'était pas connue..... » On qualifie ainsi l'expression de la différence Δ^{μ} du du produit $Fx.fx$, par les différences de Fx et de fx, formule que Taylor a publiée depuis long-temps, dans les *Transactions philosophiques* (tome 30, page 676, etc.). Il est bien vrai qu'on ne l'avait pas « reconnue pour la loi fondamentale de toute la théorie » des différences et des différentielles », parce qu'il n'est pas vrai qu'elle jouisse de cette propriété. Les lois vraiment fondamentales de ces deux théories sont dans les définitions de la différence et de la différentielle. On déduit de ces définitions quelques faits généraux, fort utiles pour la pratique : la prétendue loi est du nombre. Au surplus, le *Philosophe* a bien senti l'insuffisance de sa loi, quand il est question de différencier les fonctions de plusieurs variables ; car elle ne va pas jusqu'à donner la forme des développemens en différences et différentielles partielles. Mais admirez le subterfuge qu'il emploie pour sauver l'universalité de cette loi ; il affirme que la *forme* dont il s'agit « n'a besoin d'aucun artifice » pour être déduite ou démontrée..... » ; mais, si cela est, vous n'en êtes que plus coupable d'avoir présenté cette *forme* dans une formule fausse (*Philosophie* , etc., formule (*bh*), page 116). On peut la comparer avec la vraie formule que j'ai donnée dans le précédent mémoire (75), et qui comprend, comme *cas très-particulier*, la loi philosophique.

« La théorie des *grades* et *gradules* n'était point connue..... » c'est-à-dire, qu'on n'avait pas pensé à créer de nouvelles notations pour représenter des expressions aussi simples que

$$\frac{\Delta^m L\varphi(x+\mu\xi)}{L\varphi x}, \quad \frac{d^m L\varphi x}{L\varphi x}.$$

Voilà, *tout au plus*, ce que je puis accorder. Les nouveaux calculs du philosophe sont trop voisins de celui des différences et de celui des différentielles pour constituer une branche particulière de l'analise ; et certes, ce ne serait pas là peine de faire du calcul différentiel lui-même un algorithme séparé de celui des différences, si la différentielle s'exprimait en fonction des différences aussi simplement que le *gradule* s'exprime en fonction des différentielles. C'est une considération de philosophie toute commune qui a suggéré aux analistes, à Euler en particulier, la triple génération du nombre suivant les formes $N=P+Q$, $N=P.Q$, $N=P^Q$. D'après la même considération, il n'est échappé à aucun d'eux qu'on peut faire varier x, dans $z=\varphi x$, de trois manières ; c'est-à-dire, en supposant que x devienne $x+\xi$, $x.\xi$, x^ξ ; et qu'en conséquence de chacune de ces hypothèses, la fonction z peut aussi varier de trois manières, et devenir $z+\xi$, $z.\xi$, z^ξ ; de sorte que, pour déterminer ce que devient z, quand l'accroissement ξ est répété un certain nombre de fois, il y a, en général, neuf problèmes à résoudre. Le calcul des différences et celui des différentielles sont nés de la considération du premier de ces problèmes, c'est-à-dire, de la correspondance établie entre les états variés $x+\xi$ et $z+\xi$; et, si les autres problèmes étaient aussi féconds, il resterait encore bien des nouveaux algorithmes à créer; de sorte que l'énumération, présentée par la philosophie transcendantale, des branches de ce qu'elle appelle *Théorie de la constitution algorithmique*, serait loin d'être complète. Mais les analistes n'ont pas ignoré que les autres problèmes se ramenaient très-bien au premier. Cependant le calcul des gradules semble se recommander sur-le-champ, par une application importante; celle que le philosophe en fait à la recherche de la forme des racines d'une équation déterminée, exprimées en fonction de ses coefficiens.... Voilà du moins ce qu'on voudrait nous faire conclure d'une discussion qui occupe quatorze mortelles pages in-4.° (*Philosophie*, *etc.*, pag. 83—96) hérissées des signes algorithmiques les plus sauvages. Mais quand, peu effrayé de tout cet appareil, on se donne la peine de discuter les raisonnemens, de simplifier les calculs, et de traduire les formules en langue analitique vulgaire, on ne peut se défendre de refuser net son assentiment aux assertions de l'auteur.

Après avoir posé l'équation identique

$$(a'+x)(a''+x)....=A+Bx+....=\Xi\ , \tag{1}$$

on nous dit que c'est par le calcul différentiel qu'on doit chercher à exprimer A, B, ... en fonction de a', a'', ..., et que réciproquement c'est par le calcul des *gradules* qu'on doit arriver aux expressions de a', a'', ... en fonction de A, B, ... « En effet » le produit $(a'+x)(a''+x)$ .... ne saurait être décomposé en parties » de la sommation que par le calcul différentiel; et la somme » $A+Bx+$..... ne peut être composée en facteurs que par le calcul » des gradules » (*ibid.* pag. 83). La première proposition est fausse; on a su exprimer les coefficiens en fonction des racines, long-temps avant la découverte du calcul différentiel. La 2.^{e} proposition, qui n'est point une conséquence de la première, à moins qu'on ne veuille introduire dans l'analise un vague de raisonnement que repousse l'exactitude de la science, n'est point prouvée. Je vais même découvrir, très-facilement, par l'analise commune, le résultat auquel parvient le philosophe, armé de ses gradules.

Voici des hypothèses évidemment permises

$$
\begin{array}{lll}
\text{Quand les facteurs } a'+x\,,\ a''+x\,,\ldots\ldots\,, & & \text{La fonction } \Xi \\
\hline
\text{deviennent}\left\{\begin{array}{l}
1.^{\circ}\ (a'+x)^{t'-a},\ (a''+x)^{t''-a}\ldots, \\
2.^{\circ}\ (a'+x)^{t'-b},\ (a''+x)^{t''-b}\ldots, \\
3.^{\circ}\ (a'+x)^{t'-c},\ (a''+x)^{t''-c}\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{array}\right. & & \text{devient}\left\{\begin{array}{l}
\Xi^{n-a}\,, \\
\Xi^{n'-b}\,, \\
\Xi^{n''-c}\,, \\
\ldots\ ;
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Pour plus de simplicité, ne prenons que trois facteurs. La première hypothèse donne

$$(a'+x)^{t'-a}.(a''+x)^{t''-a}.(a'''+x)^{t'''-a}=\Xi^{n-a}\ ;$$

dans ce résultat, formons la seconde hypothèse; nous aurons

$$(a'+x)^{(t'-a)(t'-b)}.(a''+x)^{(t''-a)(t''-b)}.(a'''+x)^{(t'''-a)(t'''-b)}=\Xi^{(n-a)(n'-b)}. \quad (2)$$

Si l'on avait admis quatre facteurs, on ferait dans ce résultat la 3.^{e} hypothèse. En général, quand il y a m facteurs on fait $m-1$ hypothèses successives. Actuellement soient faits dans (2) $t'=a$; $t''=b$, $t'''=c$, et il viendra

$$a'''=\Xi^{\frac{(n-a)(n'-b)}{(c-a)(c'-b)}}-x\,; \qquad (3)$$

Si l'on fait a, b, c infiniment petits, n, n' seront aussi infiniment petits ;

petits ; et , parce qu'en général $a^x = 1 + xLa$, quand x est infiniment petit , l'équation (3) deviendra

$$a''' = \{ 1 + (n-a)(n'-b)L\Xi \}^{\frac{1}{(c-a)(c-b)}} - x \; ; \qquad (4)$$

expression qui , lorsqu'on suppose « la quantité arbitraire x égale » à zéro , pour plus de simplicité » (*ibid.* pag. 90) prend la forme

$$a''' = \left\{ 1 + N \frac{1}{\infty_1 \cdot \infty_2} \right\}^{M \infty' \cdot \infty''} . \qquad (5)$$

Voilà , bien sérieusement , le résultat unique du rôle que l'on confie au calcul des gradules , pour lui assurer une entrée brillante dans le monde. Etait-ce bien la peine de le mettre en scène ? J'ose le demander.

J'ai fait remarquer qu'on dispose, dans (4) , de l'arbitraire x, en lui donnant la valeur zéro ; mais cette hypothèse réduit Ξ à A ; par conséquent , dans le second membre de (5) , il n'entre plus que le coefficient A ; et la racine a''' n'est plus exprimée que par un seul des coefficiens de l'équation. D'ailleurs cette hypothèse contrarie évidemment celle qu'on est obligé de faire plus bas (pag. 95), d'après laquelle les différentielles successives de x, savoir dx , d^2x ,..., doivent satisfaire à certaines conditions qui, soit dit en passant, auraient grand besoin elles-mêmes d'être conciliées entre elles. Quoi qu'il en soit, *dato non concesso* , que le second membre de (5) soit une fonction des coefficiens A , B ,....; quelle est la conséquence qu'on prétend en tirer ? c'est que « la quantité a''' est une quan- » tité irrationnelle ou radicale de l'ordre 3—1 » (page 90) ou de la forme

$$a''' = \varphi \left\{ \sqrt[\beta]{\sqrt[\alpha]{n} + n' + n''} \right\} ; \qquad (6)$$

n , n' , n'' étant des fonctions des coefficiens A , B ,....

Ici le philosophe a beau s'envelopper du mystère transcendantal, on n'en aperçoit pas moins que son raisonnement se réduit à ceci : l'expression du second membre de (6) peut être ramenée à la forme du second membre de (5) ; donc cette expression représente la forme de a'''. Je nie la conséquence. Pour que deux choses puissent être prononcées égales entre elles, lorsqu'elles sont égales à une troisième, il faut que celle-ci soit déterminée : or, l'expression second membre de (5) est complètement indéterminée, puisqu'elle revient à la forme $N^{\frac{\infty}{\infty}}$ ou $N^{\frac{0}{0}}$. Je le demande ; que dirait-on de la logique de l'analiste qui, ayant trouvé, au bout de ses calculs, les deux expressions $a=\frac{0}{0}$, $b=\frac{0}{0}$, en conclurait $a=b$?

« La loi fondamentale de la théorie des nombres était inconnue.... » On nous donne pour telle un théorème algébrique (*ibid.* équat. (D), pag. 67) qui n'est pas plutôt la loi fondamentale de cette théorie que le théorème connu

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1},$$

dont le premier est une conséquence peu éloignée. Les nombres entiers sont des termes de la suite indéfinie de nombres, qui a zéro pour origine et 1 pour différence entre deux termes consécutifs quelconques ; c'est là leur définition, et conséquemment la vraie loi fondamentale de leur théorie. Le *Philosophe* s'empresse de conclure de son théorème l'*impossibilité de soumettre les nombres premiers à une loi* (*ibid.* page 68) ; mais je serai bien curieux de voir comment il concilierait cette conséquence avec la remarque singulière que Lambert a consignée dans son *Essai d'architectonique* (Riga, 1771, page 507) et dont voici la substance : dans le 2.^{me} membre de l'équation

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\ldots+\frac{x^m}{1-x^m}+\ldots=x+2x^2+2x^3+3x^4+2x^5+4x^6+2x^7+\ldots\ldots$$

chaque coefficient est égal au nombre des diviseurs de l'exposant ;

de manière que *tous les termes et les seuls termes* affectés du coefficient 2 ont un exposant premier.

« La résolution théorique des équations d'équivalence était tout » à fait problématique....» Malgré les promesses de la philosophie, elle en est encore au même point. Les formes assignées aux racines (*ibid.* pag. 94) ne sont ni plus ni moins problématiques qu'elles l'étaient; et *la résolution générale des équations* (*littérales*) *de tous les degrés*, donnée par le philosophe (Paris, 1812) est certes bien loin d'avoir levé tous les doutes. Voyez, entr'autres, ceux de mon estimable ami, le professeur Gergonne, dans ce recueil, tom. III, pag. 51, 137, 206).

« La résolution des équations différentielles était encore plus im» parfaite.... » La philosophie l'a donc bien avancée ! Je n'en suis point persuadé. J'aurais désiré d'ailleurs qu'on fît au moins une légère mention des méthodes générales proposées par Fontaine, Condorcet, Pezzi, etc. ; quand ce n'eût été que pour les combattre.

« La loi de la forme générale des séries (le développement de Fx, » suivant les puissances de φx), et encore moins la loi de la forme » la plus générale de ces fonctions techniques (le développement » suivant les produits des états variés), n'étaient nullement connus..... » La première cependant n'est qu'un cas particulier de la formule de Burman que j'ai donnée (112); elle se trouve dans le *Calcul des dérivations* d'Arbogast (n.° 287) ; et l'autre est, comme je l'ai dit, un cas particulier de ma formule (23), connue au moins pour des cas très-étendus : tel est celui-ci

$$\mathrm{F}x=A+Bx\varphi x+Cx^2\varphi x.\varphi' x+Dx^3\varphi x.\varphi' x.\varphi'' x+\ldots.. ;$$

car c'est à cela que revient la résolution du problème de l'article 348 du *Calcul des dérivations*. Ajoutons qu'Euler s'est élevé à quelque chose de plus général encore, lorsque, dans un mémoire fort original (*Nova Acta Petrop.* 1786) sur la fameuse série de Lambert ; il part de cette expression

$$z^n = 1 + \varphi n + \varphi' n + \varphi'' n + \ldots\ldots$$

« La loi de Taylor ne s'étend qu'aux fonctions données immé-
» diatement, et non à celles données par les équations......» (*Réfutation*, etc., pag. 30). Nous avons démontré le contraire dans notre précédent mémoire (n.° 19).

« Deduire le développement de x (d'après l'équation donnée » $0 = \varphi(x, a)$), suivant les puissances de ψa; c'est dejà beaucoup » plus que ce qu'on fait jusqu'à ce jour dans l'algorithmie....» (*ibid.* pag 32). Cette prétention doit être appréciée après avoir lu les articles, depuis 318 jusqu'à 326 inclusivement, du *Calcul des dérivations*.

Je serai plus bref encore sur l'autre question du *Criticiste : Quel sera l'état de l'algorithmie, après cette philosophie des mathématiques?* Je vois des promesses; l'avare lui-même n'en est pas chiche; et des annonces de résultats..... c'est autre chose encore; écoutons. (*Réfutation*, *etc.*, pag. 38).

« Si la philosophie avait dejà donné la législation des mathéma-
» tiques.....» Cette législation appartient sans doute à la philosophie, en général, mais non à aucun système particulier. Les péripatéticiens Hertinus, Dasypodius et Comp.ᵉ ont mis la géométrie en syllogismes. Les philosophes de Port-Royal, nouveaux Procustes, ont torturé cette même géométrie, pour la réduire aux proportions de leur étroite logique. Un philosophe allemand, d'abord disciple de Kant, puis transfuge dans les rangs opposés, vient de persuader au mathématicien Langsdorf qu'il fallait refondre les principes de la science, admettre, en géométrie, des *points spacieux*, etc., etc. Voilà un échantillon des services que les systèmes rendent aux mathématiques.

« Et qu'elle l'eût garantie, par l'explication rigoureuse de toutes
» les difficultés.....» Oui! les difficultés imaginaires du calcul différentiel, expliquées par une *Antinomie critique!* Les paradoxes de

Kramp résolus par des *zéros*, ou des infiniment petits, *pairs* et *impairs* ! etc. !

« Et sur-tout par la découverte des lois fondamentales de cette science..... ». Je le répète, il n'y a d'autres lois fondamentales que les définitions, qui ne sont plus à découvrir.

« Lois qui doivent enfin conduire à la solution des grands pro- » blèmes qu'on n'a pu résoudre jusqu'à ce jour..... ». *Fiat! Fiat!*

« Que resterait-il à faire aux géomètres ? Deux choses : l'une...., » de recevoir, de la philosophie, les principes des mathématiques...». Ce serait mon parti, si la philosophie était un corps de doctrine révélée.

« L'autre d'étudier la philosophie transcendantale qui est la base » de cette dernière.... ». Mais, si le résultat de cette étude était de ne pas croire au transcendantalisme, ou du moins d'en douter ? Car, après tout, c'est une opinion humaine ; bien plus, c'est un système enveloppé de ténèbres que peu de personnes peuvent se flatter de percer. Ch. Villers accuse les académiciens de Berlin de n'y avoir vu goutte ; d'autres lui adressent la même politesse. Au milieu du brouhaha des discussions philosophiques d'outre-Rhin, on ne distingue bien clairement que ce refrein.... « On ne m'entend » pas...! ». Et l'on prétendrait établir, sur une base de cette nature, la plus claire et la plus certaine des sciences !....

Pour moi je déclare, en finissant, que je m'en tiens provisoirement à la philosophie des mathématiques dont Dalembert qui en valait bien un autre, et comme philosophe et comme mathématicien, a posé les principes. « Comme la certitude des mathémati- » ques, dit-il, (*Encyclop.*, Art. *APPLICATION*) vient de la sim- » plicité de leur objet, la métaphysique n'en saurait être trop » simple et trop lumineuse ; elle doit toujours se réduire à des » notions claires, précises et sans obscurité. En effet, comment les » conséquences pourraient-elles être certaines et évidentes, si les » principes ne l'étaient pas ? Plus cette métaphysique, ajoute-t-il, » (*Ibid.* Art. *ÉLÉMENS*) est simple et facile, et, pour ainsi dire,

» populaire, et plus elle est précieuse; on peut même dire que la » facilité et la simplicité en sont la pierre de touche ».

Au surplus, bien convaincu que j'ai raison contre la *Philosophie critique*; je ne veux point me donner des torts envers le philosophe : je me hâte donc de déclarer que je me plairai toujours à reconnaître, dans l'auteur de la *Philosophie des mathématiques*, un géomètre très-habile et très-instruit, dont les travaux pourraient devenir extrêmement utiles à la science, s'il parvenait jamais à se soustraire à l'influence du système philosophique par lequel, suivant moi, il s'est très-peu philosophiquement laissé subjuguer.

La Fère, le 10 d'août 1814.

ARITHMÉTIQUE.

Sur le caractère de divisibilité des nombres par certains diviseurs;

Par M. GERGONNE.

SOIT N un nombre entier quelconque, écrit dans le système de numération dont b est la base. Concevons qu'on ait partagé ce nombre, en allant de droite à gauche, en tranches de m chiffres chacune, sauf la dernière qui pourra en avoir moins; et soient, en allant aussi de droite à gauche, A_0, A_1, A_2, A_3,.... ces tranches, considérées comme autant de nombres isolés. On aura évidemment

$$N=A_0+A_1b^m+A_2b^{2m}+A_3b^{3m}+\ldots\ldots$$

Cette équation pourra ensuite être mise sous les trois formes suivantes

$$N=b^m(A_1+A_2b^m+A_3b^{2m}+\ldots)+A_0 \,. \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} N=\{A_1(b^m-1)+A_2(b^{2m}-1)+A_3(b^{3m}-1)+\ldots\} \\ \qquad +(A_0+A_1+A_2+A_3+\ldots) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} N=\{A_1(b^m+1)+A_2(b^{2m}-1)+A_3(b^{3m}+1)+\ldots\} \\ \qquad +(A_0+A_2+A_4+\ldots)-(A_1+A_3+A_5+\ldots)\,. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

En observant que les premières parties de ces diverses expressions de N sont respectivement divisibles par b^m, b^m-1, b^m+1, et conséquemment par tous diviseurs de ces trois nombres, on pourra établir les propositions suivantes.

1.° *Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre quelconque par un diviseur quelconque de la* m.me *puissance de la base du système, est le même que celui qu'on obtient en divisant sa première tranche de* m *chiffres à droite par ce diviseur.*

2.° *Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre quelconque par un diviseur quelconque du plus grand nombre de* m *chiffres est le même que celui qu'on obtient en divisant la somme de ses tranches de* m *chiffres par ce diviseur.*

3.° *Dans tout système de numération le reste de la division d'un nombre quelconque par l'un quelconque des diviseurs de la* m.me *puissance de la base augmentée d'une unité est le même que celui qu'on obtient en divisant par le même diviseur la somme des tranches de* m *chiffres de rangs impairs moins la somme des tranches de* m *chiffres de rangs pairs.*

Afin donc que la première division réussisse, dans chaque cas, il sera nécessaire et suffisant que la seconde, plus simple, réussisse également. Voilà donc autant de caractères de divisibilité des nombres par certains diviseurs.

Ainsi, par exemple, dans notre système de numération, la divisibilité d'un nombre par 37 tiendra à la divisibilité par 37 de la somme de ses tranches de trois chiffres; sa divisibilité par 7 dépendra de la divisibilité par 7 de la somme de ses tranches de trois chiffres de rangs impairs moins la somme de ses tranches de trois chiffres de rangs pairs.

Si l'on suppose $m=1$, on retombe sur les caractères connus de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 11.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. QUELLE surface décrit le sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les arêtes sont assujetties à toucher perpétuellement une surface fixe du second ordre ?

II. Quelle surface décrit le sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces sont assujetties à être perpétuellement tangentes à une même surface fixe du second ordre ?

HYDROSTATIQUE.

De la stabilité des corps flottans ;

Premier mémoire de la seconde partie des *développemens de géométrie ;*

Par M. CH. DUPIN, correspondant de l'institut de France, associé étranger de celui de Naples, capitaine du génie maritime, etc.

Rapport sur ce mémoire, fait à la première classe de l'institut de France,

Par M. CARNOT.

M. Sané, M. Poinsot et moi, avons été chargés par la classe de lui rendre compte d'un mémoire sur la stabilité des corps flottans, qui lui fut présenté le 10 janvier dernier, par M. Charles Dupin, capitaine en premier au corps du génie maritime, et aux travaux duquel la classe a déjà plusieurs fois applaudi. Ce mémoire même a été composé par un jeune officier qui s'attendait à chaque moment à recevoir des ordres pour se rendre aux armées.

Le mémoire de M. Dupin est la première application des méthodes exposées par le même auteur dans cinq autres mémoires de géométrie, approuvés par la classe, et publiés ensuite sous le titre de *Développemens de géométrie*, pour faire suite à la géométrie descriptive et à la géométrie analitique de M. Monge.

En voyant ces premières recherches, notre illustre Lagrange, dont les suffrages peuvent être regardés comme les plus beaux titres d'un jeune géomètre, a fait d'elles cet éloge, confirmé par le jugement de la classe. « L'auteur a trouvé le secret de dire des choses neuves et » intéressantes, sur un sujet que nous croyons épuisé. ».

Le nouveau sujet que M. Dupin s'est proposé de traiter, dans le mémoire dont nous avons à rendre compte, est plus difficile encore que celui des mémoires précédens, et semblait pareillement épuisé. La théorie de l'équilibre des corps flottans sur un fluide a fait l'objet des recherches des plus grands géomètres. Archimède est le premier qui s'en soit occupé ; et le livre où il traite cette matière, si peu abordable de son temps, est, avec raison, regardé comme un des écrits qui font le plus d'honneur à son génie. En n'employant que la méthode synthétique, Archimède recherche les conditions de l'équilibre des corps sphériques, cylindriques et paraboliques. Il détermine dans quel cas l'équilibre doit être stable et dans quel cas il ne doit pas l'être. En admirant la force d'esprit qu'exigeaient ces premiers résultats d'une science alors dans l'enfance, on ne peut s'empêcher d'avouer qu'une méthode qui doit, à chaque corps nouveau dont on s'occupe, recourir à de nouveaux moyens de solution, ne soit d'une étude et d'une application extrêmement pénibles.

M. Dupin annonce que, dans un second mémoire, il reprendra toutes les questions traitées par Archimède, pour les faire dériver, comme autant de corollaires, d'un seul et même principe : si cette partie est bien traitée, ce ne sera pas la moins intéressante de son travail.

Dix-neuf siècles se passèrent avant qu'on revînt aux questions traitées par Archimède, pour reculer de ce côté les bornes de la science. Deux géomètres l'entreprirent, pour ainsi dire, en même temps.

Bouguer, dans le voyage où il fut, avec Lacondamine, mesurer sous l'équateur un arc du méridien, employait ses loisirs à composer le *Traité du navire*; tandis qu'Euler, à Pétersbourg, écrivait son livre intitulé *Scientia navalis*. Dans ces deux ouvrages, on voit la question de l'équilibre des corps flottans traitée sous un point de vue beaucoup plus général que ne l'avait fait Archimède. La seule restriction qu'on s'y permette encore est de regarder les corps comme symétriques par rapport à un plan. Telle est, en effet, la forme de nos vaisseaux de guerre ou de commerce, ces grands corps flottans dont l'équilibre et la stabilité sont d'une considération si importante.

Bouguer se rapprocha de la méthode des anciens ; il présenta ses idées sous une forme géométrique ; il les rendit par là plus sensibles ; et les ingénieurs maritimes de toutes les nations adoptèrent sa manière de déterminer la stabilité des corps flottans. Euler n'abandonna pas sa méthode accoutumée, et parvint au même but par une analise simple, élégante et facile.

M. Dupin suit une marche différente de celle qu'avaient adoptée ces deux illustres géomètres ; il emploie une géométrie qui n'était pas connue de leur temps, et ce nouvel instrument le conduit à de nouveaux résultats.

Au lieu de se tenir toujours infiniment près de chaque position d'équilibre, pour voir ainsi ce qui se passe autour d'elle, il considère, à la fois, toutes les positions qu'un corps peut prendre, en flottant sur un même fluide, lorsque ce corps est d'un poids constant et d'une forme extérieure invariable.

Pour que le corps flottant soit en équilibre, il faut, comme on sait, que son centre de gravité soit sur la même verticale que le centre de volume de sa carène ; cette carène étant terminée au niveau du fluide par un plan horizontal qu'on appelle le *plan de flottaison*.

Mais, le poids du corps étant supposé constant, le volume de la carène l'est aussi. Si donc, par des transpositions dans l'intérieur, on fait prendre au centre de gravité du corps flottant toutes les positions possibles, sans que la figure extérieure de ce corps change, on va trouver, pour ces différens états d'un même corps, une infinité de plans de flottaison différens, et une infinité de carènes différentes. Chacune de ces carènes a son centre de volume en un point particulier. Voilà, par conséquent, une infinité de centres de carène. Ils forment une surface : c'est la *Surface des centres de carène*. Tous les plans de flottaison sont tangens à une autre surface qui, par rapport à ces plans, est du genre de celles que M. Monge a nommées *enveloppes* : c'est la *surface enveloppe des flottaisons*.

On n'avait pas encore eu l'idée d'envisager ces deux surfaces, et c'est leur considération qui conduit M. Dupin, d'abord à des théorèmes qui renferment tous ceux que l'on connaît déjà sur la stabilité des corps flottans, et ensuite à beaucoup d'autres théorèmes nouveaux.

L'auteur observe premièrement que la définition de la surface des centres de carène et celle de l'enveloppe des flottaisons étant purement géométriques, la recherche des propriétés générale de ces surfaces doit appartenir uniquement à la science de l'étendue. Il s'occupe d'abord des propriétés de la première de ces surfaces, et la traite d'après les principes qu'il a exposés dans ses *Développemens de géométrie* : voici les résultats auxquels il parvient.

La surface des centres de carène est nécessairement d'une étendue finie ; elle est fermée de toutes parts. Quelle que soit la forme irrégulière du corps flottant, la surface des centres de carène est toujours continue (en ce sens que ses plans tangens se succèdent constamment, par une dégradation insensible dans leurs directions, de manière à ne former ni angles ni arêtes sur la surface).

Si l'on place le corps flottant dans une position d'équilibre, le centre de sa carène sera en un certain point de la surface lieu des centres, et le plan tangent à la surface en ce point sera nécessairement parallèle au plan de flottaison, c'est-à-dire horizontal.

De là résulte immédiatement cette autre propriété générale. Dans une position d'équilibre quelconque, la droite menée par le centre de gravité du corps flottant et par le centre de carène, est normale, en ce dernier point, à la surface des centres de carène.

Ainsi, dès le principe, l'auteur ramène la recherche des positions d'équilibre d'un corps flottant à la détermination des droites normales à la surface des centres de carène, en ne prenant, parmi ces normales que celles qui passent par le centre de gravité du corps.

Il ne suffit pas de déterminer une position d'équilibre, il faut s'assurer de plus que cette position est stable.

On voit des corps flottans que l'on cherche vainement à déranger de leur position primitive. De quelque côté qu'on les incline, ils tendent toujours à se redresser. On en voit, au contraire qui, dès qu'on les dérange un peu de leur première position, de quelque côté qu'on les incline, s'inclinent encore davantage, et ne reviennent plus à leur première assiette. Enfin on en voit d'autres qui, penchés d'un certain côté, tendent à se redresser, tandis qu'en les penchant dans une autre direction, ils s'écartent de plus en plus de la position primitive. Dans le premier cas, on dit que l'équilibre est *stable*, dans le second, qu'il est absolument *instable*, et dans le troisième que cet équilibre est *mixte*.

Or, rien n'est plus facile que d'assigner les caractères de ces différens genres d'équilibre, en considérant la surface des centres de carène. Lorsqu'on incline très-peu le corps flottant, on peut concevoir qu'il tourne autour d'un axe horizontal. Maintenant, par le centre de la carène qui correspond à la position d'équilibre, concevons un plan perpendiculaire à cet axe; ce plan sera vertical et coupera normalement en ce point la surface des centres de carène. Déterminons, pour ce même point, le centre de courbure de cette section; il sera sur la même verticale que le centre de gravité du corps flottant. Cela posé, 1.° s'il est au-dessus, l'équilibre est absolument *stable*; 2.° s'il est au-dessous, l'équilibre est absolument *instable*; 3.° s'ils se confondent, l'équilibre est *mixte*. Ainsi, ce centre de courbure joue, dans la théorie de M. Dupin, le même rôle que le *métacentre* dans la théorie de Bouguer.

De ces principes résulte ce théorème nouveau et remarquable : *suivant que la position d'un corps flottant est stable ou non stable, la distance du centre de gravité de ce corps au centre de sa carène est un* minimum *ou un* maximum, *par rapport à toutes les positions voisines que peut prendre le corps flottant.*

En appliquant à la stabilité les propriétés de la courbure des surfaces, l'auteur conclut d'abord que, si l'on incline successivement, autour de tous les axes possibles, un corps en équilibre sur un fluide, 1.° la direction de la plus grande stabilité est celle où l'axe est parallèle à la direction de la plus grande courbure de la surface des centres de carène, 2.° la direction de la moindre stabilité est celle où l'axe est parallèle à la direction de la moindre courbure de la même surface.

De là il suit immédiatement que les directions de plus grande et de moindre stabilité d'un corps flottant quelconque se croisent toujours à angle droit.

Pour examiner les stabilités comprises entre ces deux extrêmes, M. Dupin se sert encore de la surface des centres de carène; il a recours à la *courbe indicatrice* et aux *tangentes conjuguées* de cette surface. On peut voir, dans le rapport de M. Poisson, sur les trois premiers mémoires de M. Dupin, la définition de cette courbe et de ces tangentes, ainsi que l'exposition de leurs principales propriétés, faite avec autant de clarté que de précision. (*)

Il nous suffit de dire que, si l'on coupe une surface par un plan infiniment voisin de son plan tangent et parallèle à ce plan, la section est une courbe du second degré, que M. Dupin appelle *indicatrice*, parce qu'elle indique en effet la forme de la surface, à partir du point où elle est touchée par le plan tangent que l'on

---

(*) Consultez aussi la page 368 du 4.me volume de ce recueil.

considère. Les diamètres conjugués de cette indicatrice représentent autant de *systèmes de tangentes conjuguées* de cette surface.

Revenons à la surface des centres de carène. Elle a partout ses deux courbures dirigées dans le même sens : son indicatrice est donc constamment une *ellipse*. Les axes de cette ellipse sont parallèles aux directions de plus grande et de moindre stabilité du corps flottant.

Les degrés de stabilité du corps flottant sont proportionnels aux quarrés des diamètres de l'indicatrice ; ces diamètres étant dirigés dans le sens de l'inclinaison du corps flottant.

Or, les diamètres d'une ellipse sont disposés symétriquement de côté et d'autre des deux axes ; donc les stabilités intermédiaires sont aussi disposées symétriquement de côté et d'autre des deux directions de plus grande et de moindre stabilité.

Si l'on appelle, avec M. Dupin, stabilités conjuguées, celles qui appartiennent à des inclinaisons répondant à deux diamètres conjugués de l'indicatrice, on verra qu'elles jouissent de cette propriété générale : pour une même position d'équilibre, la somme de deux stabilités conjuguées est nécessairement constante et égale à la somme de la plus grande et de la moindre stabilités du corps flottant.

Enfin M. Dupin, par le secours de la courbe indicatrice détermine, dans les cas d'equilibre mixte, les limites qui séparent les directions où l'équilibre est stable d'avec celles où il ne l'est pas.

Jusqu'ici, l'auteur supposait que la forme extérieure du corps flottant dût rester constamment la même ; il suppose ensuite que cette forme varie d'une manière très-générale ; il s'assujettit seulement à laisser constantes les hauteurs des centres de gravité du corps et de sa carène, ainsi que la figure de la flottaison. Alors il examine les transformations infinies que peut éprouver la surface des centres de carène ; il ramène ces transformations à celles dont il a fait l'examen dans ses *Développemens de géométrie*. Il en conclut que les nouvelles surfaces des centres de carène auront toutes un contact, au moins du second ordre, avec la surface primitive ; et par conséquent, que tous les nouveaux corps flottans auxquels ces nouvelles surfaces appartiennent ont la même stabilité que le premiers corps flottant. C'est ainsi que M. Dupin cherche à utiliser les principes qu'il a présentés dans ses premiers mémoires.

Telles sont les principales propriétés de la surface des centres de carène. Après les avoir développées, l'auteur considère spécialement la surface enveloppe des flottaisons et l'aire de chaque flottaison.

Cette seconde surface est, comme la première, fermée de toutes parts ; elle présente aussi partout ses deux courbures dirigées dans le même sens. Elles ont ensemble cette corrélation singulière qu'elles ne peuvent jamais se couper ; tantôt la première embrasse complètement la seconde ; tantôt la seconde embrasse complètement la première.

D'après sa définition, l'enveloppe des flottaisons a pour plans tangens tous les plans de flottaison. Or, le point de contact de l'enveloppe et de ces plans est le centre de gravité de l'aire de chaque flottaison (cette aire étant terminée par le périmètre du corps flottant). Ce théorème revient, quant au fond, à celui qu'on doit à de Lacroix, membre de l'ancienne académie des sciences ; Euler en parle dans la préface de son traité : *Scientia navalis*.

M. Dupin fait voir généralement que le plus grand et le plus petit rayon de courbure de la surface des centres sont égaux au plus grand ou au plus petit moment d'inertie de l'aire de la flottaison, divisé par le volume de la carène.

De là il conclut immédiatement que la direction de la plus grande ou de la moindre stabilité du corps flottant est parallèle à l'axe du plus grand ou du plus petit moment d'inertie de l'aire de la flottaison : *théorème connu*.

Par une correspondance bien singulière, la courbure de la surface des centres de carène dépend donc spécialement de la figure de la flottaison ; mais la courbure de la surface enveloppe des flottaisons dépend de quantités plus compliquées. Cependant, il est intéressant

de

connaître les élémens de cette courbure ; ils indiquent dans quelles directions les stabilités primitives croissent ou décroissent par les degrés les plus lents ou les plus rapides, et peuvent montrer les états prochains de stabilité d'un corps flottant dérangé de sa position d'équilibre. Cette recherche ne peut être que d'un grand intérêt pour la théorie de la construction des vaisseaux.

Voici, à ce sujet, les résultats auxquels l'auteur parvient ; ils s'offrent sous une forme singulière.

Si l'on charge le contour de la flottaison par des poids proportionnels à la tangente de l'angle formé par la verticale et la paroi du corps flottant, les axes principaux du plus grand et du plus petit moment d'inertie de cette ligne pesante seront respectivement parallèles aux directions de plus grande et de moindre courbure de l'enveloppe des flottaisons.

Et si l'on divise par la superficie de la flottaison deux fois ce plus grand ou ce plus petit moment d'inertie, le quotient sera le rayon de moindre ou de plus grande courbure de la surface des flottaisons.

Après s'être occupé de tout ce qui peut caractériser une position d'équilibre, considérée isolément, M. Dupin considère, à la fois, toutes les positions d'équilibre que peut prendre un corps flottant dont la forme est invariable, ainsi que son poids et la position de son centre de gravité.

Cette partie de son travail, quoiqu'elle ne paraisse pas devoir être aussi féconde que la première en conséquences utiles, semble peut-être plus originale, et par la généralité des résultats, et par la simplicité des moyens de solution.

D'après la théorie précédemment exposée, la recherche de toutes les positions d'équilibre du corps flottant est ramenée à celle de toutes les droites que l'on peut, du centre de gravité de ce corps, mener normalement à la surface des centres de carène.

L'auteur prouve d'abord que tout corps solide, flottant sur un fluide, présente au moins deux positions d'équilibre ; l'une dont la stabilité est absolue ; l'autre dont l'instabilité est pareillement absolue ; principe qui n'avait pas encore été démontré directement.

Ensuite ce géomètre fait voir que le nombre des positions d'équilibre d'un corps flottant est généralement pair ; et il prouve que le nombre des positions d'équilibre du premier genre est toujours égal au nombre des positions du second genre.

Et si l'on fait tourner la surface des centres de carène autour d'un axe quelconque mené par le centre de gravité du corps flottant, puisqu'on determine la surface de révolution enveloppe de l'espace parcouru par cette surface ; en se dirigeant ensuite sur la courbe de contact de l'enveloppe et de l'enveloppée, on rencontrera successivement tous les centres de carène qui appartiennent aux positions d'équilibre, et ces centres appartiendront alternativement à des positions stable, instable, stable, instable, etc.

S'il y a des positions d'équilibre mixtes, il faudra regarder chacune d'elles comme la réunion de deux positions d'équilibre, l'une stable et l'autre instable ; et l'on trouvera toujours, en marchant sur la courbe de contact dont nous venons de parler, que les centres de carène qui correspondent à des positions d'équilibre, appartiennent alternativement à des positions d'équilibre stable et instable.

Ce nouvel ouvrage de M. Dupin confirme les espérances que ce jeune savant a données par ses premiers travaux ; et l'on ne peut qu'applaudir à ses efforts constans pour en diriger les résultats vers la pratique du grand art auquel il s'est voué. Nous pensons que le mémoire de M. Dupin mérite l'approbation de la classe, et nous lui proposons de le faire comprendre dans la collection des savans étrangers.

Signé Sané, Poinsot et Carnot, *rapporteur*.

Le Secrétaire perpétuel pour les sciences mathématiques certifie que ce rapport est extrait du procès-verbal de la séance du mardi 30 août 1814.

Signé Delambre, chevalier de la Légion d'honneur.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

De l'usage des infiniment petits dans la géométrie élémentaire;

Par M. GERGONNE.

LA manière dont je me suis expliqué en divers endroits de ce recueil, et l'emploi fréquent que j'y ai fait de la série de Taylor, donnent assez à connaître que je ne pense pas que la méthode des infiniment petits doive être employée dans les sciences exactes, du moins comme méthode d'exposition.

Mais je manquerais de bonne foi si je dissimulais les objections graves que l'on peut opposer aux méthodes plus rigoureuses par lesquelles celle-là est communément remplacée. Il est certain, en effet, que ces méthodes sont d'ordinaire longues, compliquées et difficiles à suivre; ce qui est un inconvénient notable, sur-tout dès l'entrée d'une science, où l'on s'expose, par leur emploi prématuré, à rebuter un grand nombre de commençans que des méthodes moins sévères auraient au contraire attirés, et dont les études et les succès auraient pu tourner ensuite au profit de la science. Dans les élémens de géométrie, en particulier, la réduction à l'absurde ou la méthode d'exhaussion, constamment employée par les disciples d'Euclide, présente un vice capital qui consiste dans son opposition formelle avec l'esprit d'invention, et dans la nécessité où elle met souvent celui qui enseigne de supposer déjà connus à l'avance, par une sorte de révélation d'en haut, les résultats dont il va établir la légitimité; résultats qui, par suite, ne se gravent que très-difficilement dans la mémoire de l'élève qui ne voit immédiatement, par exemple, pourquoi le volume d'une pyramide est plutôt le produit de sa hauteur par le tiers de sa base que par toute autre fraction de cette base, et qui ne conçoit pas mieux comment les premiers inventeurs sont parvenus à deviner ces sortes de résultats. (*)

C'est là sans doute ce qui a pu déterminer plusieurs auteurs d'élémens à donner la préférence à la méthode des limites qui, au surplus, ne diffère guère que par les termes de celle d'exhaussion; mais cette méthode des limites, outre qu'elle ne satisfait peut-être pas autant l'esprit que la première, n'est point elle-même sans difficulté, et n'est pas, plus que l'autre, exempte de longueurs, du moins lorsqu'on veut la présenter d'une manière bien rigoureuse, et en mettre les résultats à couvert de tout soupçon d'inexactitude.

Il y a déjà assez long-temps que j'ai songé à substituer à l'un et à l'autre procédés un tour de raisonnement qui, bien qu'il écarte toute considération d'infiniment petits, réunit cependant à la simplicité et à la concision l'avantage inappréciable de laisser la marche de l'inventeur tout à fait à découvert, et de ne rien laisser à désirer du côté de la rigueur. Un seul exemple suffira pour le faire concevoir nettement; je le choisirai des plus simples.

(*) Ceci me rappelle qu'aux examens d'admission à l'école polytechnique, un jeune homme interrogé, il y a quelques années, sur le centre de gravité du volume du tétraèdre, et débutant ainsi, dans sa réponse: « je vais prouver que le centre de » gravité du volume d'un tétraèdre est à une distance de sa base qui ne saurait » être moindre ni plus grande que le quart de sa hauteur », fut tout à coup déconcerté, par cette brusque apostrophe de l'examinateur: « Comment avez-» vous deviné cela? » L'examinateur avait raison; cela semblait en effet tomber des nues; mais le jeune homme n'aurait-il pas été fondé à lui demander, à son tour, pourquoi il rejetait en statique un mode de procéder dont il venait de s'accommoder en géométrie?

Je suppose que, sachant mesurer les aires des figures rectilignes, on ait besoin, pour la première fois, de déterminer celle d'un cercle. La nouveauté du problème et son peu d'analogie apparente avec les problèmes antérieurement résolus pourront d'abord causer quelque embarras, et la première pensée qui s'offrira pour le surmonter, sera de substituer quelque approximation à une évaluation rigoureuse.

On circonscrira donc au cercle un polygône régulier d'un très-grand nombre de côtés; et, supposant entre l'une et l'autre figures une identité qui réellement n'a lieu qu'à peu près, on prendra pour l'aire approchée du cercle le produit du périmètre du polygône circonscrit par la moitié du rayon; résultat évidemment d'autant plus approché que les côtés du polygône seront plus nombreux, mais, dans tous les cas, plus grand que le véritable.

Dans la vue de le diminuer un peu, et conséquemment d'atténuer encore l'erreur, il se présente assez naturellement à la pensée de substituer au périmètre du polygône la longueur de la circonférence, qui est plus petite, c'est-à-dire, de prendre pour l'aire approchée du cercle le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon. On ne pourra plus savoir ici, du moins *a priori*, si l'erreur est en *plus* ou en *moins*, attendu l'espèce de compensation introduite dans la première évaluation; mais, si l'erreur existe en effet, sa grandeur absolue n'en devra pas moins demeurer évidemment subordonnée au nombre des côtés du polygône circonscrit, et décroître à mesure que ce nombre augmentera.

Cette erreur, si elle existait, devrait donc être, de sa nature, essentiellement variable; mais, d'un autre côté, elle ne saurait l'être, puisque la considération du polygône n'entre plus pour rien dans la dernière évaluation à laquelle on s'est arrêté, et que les élémens qu'on y emploie sont constans comme l'aire même qu'on cherche à évaluer: donc l'erreur est tout à fait nulle; donc il a dû s'opérer une exacte compensation; donc l'evaluation est rigoureuse; donc, etc.

J'ai traîné, à dessein, le raisonnement un peu en longueur, afin d'en rendre l'esprit plus facile à saisir; mais, lorsqu'une fois il est devenu assez familier, on peut le rendre beaucoup plus concis; il se réduit en effet à dire que si l'erreur d'un calcul fait sur des quantités constantes dans la vue d'évaluer, par approximation, une autre quantité aussi constante, est de nature à être indéfiniment décroissante, cette erreur est, par là même, tout à fait nulle.

Les mêmes considérations peuvent être facilement transportées dans le calcul différentiel. On peut y envisager d'abord les dx, les dy,... comme des quantités d'une petitesse finie arbitraire, et leur introduction dans les calculs comme un simple procédé d'approximation. Alors leur évanouissement de certains résultats sera le critérium de l'exactitude de ces résultats; ce qui rentre exactement dans les idées déjà développées depuis long-temps par M. Carnot d'une manière si lumineuse (Voyez ses *Réflexions sur la méthaphysique du calcul infinitésimal*, Paris, 1813). Mais il faut convenir qu'ici il peut s'offrir souvent, relativement aux suppressions de termes, des difficultés de pratique assez sérieuses, et que le recours à la série de Taylor peut seul faire complètement évanouir.

CORRESPONDANCE.

Lettre au Rédacteur des Annales, *contenant une démonstration élémentaire du* Lemme *énoncé à la page* 345 *du* 4.me *volume de ce recueil.*

MONSIEUR,

J'AURAIS bien désiré pouvoir répondre complètement à l'appel que vous faites aux géomètres, dans la note de la page 348 du 4.me volume des *Annales* ; et rendre ainsi tout à fait élémentaire la belle théorie développée à la page 138 du même volume. En attendant que quelqu'un de plus adroit que moi y soit parvenu, je vais au moins donner du *Lemme* de la page 345 une démonstration, toujours algébrique, mais délivrée du moins de l'emploi du calcul différentiel.

La question dont il s'agit (pag. 346) est de rendre *minimum* l'expression

$$z=a\sqrt{k^2+x^2\text{Sin.}^2\alpha}+b\sqrt{k^2+y^2\text{Sin.}^2\beta}\ , \qquad (1)$$

sous les conditions

$$x+y=A\ , \qquad (2)$$

$$a\text{Sin.}\alpha=b\text{Sin.}\beta=\lambda k\ ; \qquad (3)$$

A et λ étant deux constantes.

Soient fait d'abord passer sous les radicaux, dans (1), les coefficiens qui les affectent ; en ayant égard à (3), cette équation deviendra

$$z=k\{\sqrt{a^2+\lambda^2x^2}+\sqrt{b^2+\lambda^2+y^2}\}\ ;$$

d'où en quarrant et extrayant ensuite la racine quarrée,

$$z=k\sqrt{(a^2+b^2)+\lambda^2(x^2+y^2)+2\sqrt{a^2b^2+\lambda^2(a^2y^2+b^2x^2)+\lambda^4x^2y^2}}\ ;$$

équation qui, à l'aide de (2), et en posant, pour abréger,

$$(a+b)^2+\lambda^2A^2=C^2\ ,\quad ab+\lambda^2xy=Z\ ,$$

peut facilement être mise sous cette forme

$$z=k\sqrt{C^2+2\{\sqrt{Z^2+\lambda^2(ay-bx)^2}-Z\}}\ . \qquad (4)$$

Or, on voit évidemment que, C étant une constante, z ne peut devenir *minimum*, qu'autant que la fonction

$$\sqrt{Z^2+\lambda^2(ay-bx)^2}-Z$$

sera la plus petite possible ; et, comme d'ailleurs elle ne peut jamais devenir négative, on ne peut parvenir au but qu'en la rendant absolument nulle, c'est-à-dire, en posant

$$Z=\sqrt{Z^2+\lambda^2(ay-bx)^2}\;;$$

ce qui donne, en quarrant, réduisant, divisant par λ^2, extrayant la racine quarrée et transposant,

$$bx=ay\;,$$

En combinant cette équation avec (3), il vient

$$x\mathrm{Sin}.\alpha=y\mathrm{Sin}.\beta\;,$$

d'où

$$k^2x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha=k^2y^2\mathrm{Sin}.^2\beta\;,$$

et

$$k^2x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha+x^2y^2\mathrm{Sin}.^2\alpha\mathrm{Sin}.^2\beta=k^2y^2\mathrm{Sin}.^2\beta+x^2y^2\mathrm{Sin}.^2\alpha\mathrm{Sin}.^2\beta\;,$$

ou encore

$$x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha(k^2+y^2\mathrm{Sin}.^2\beta)=y^2\mathrm{Sin}.^2\beta(k^2+x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha)\;,$$

ou enfin

$$\frac{x\mathrm{Sin}.\alpha}{\sqrt{k^2+x^2\mathrm{Sin}.^2\alpha}}=\frac{y\mathrm{Sin}.\beta}{\sqrt{k^2+y^2\mathrm{Sin}.^2\beta}}\;,$$

qui est précisément l'équation (6) de l'endroit cité.

Agréez, etc.

21 août 1814.

QUESTIONS

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de situation proposé à la page 231 du 3.me volume des Annales ;

Par M. ARGAND.

N. B. Le rédacteur des *Annales* a reçu de M. Argand un beau mémoire d'analise indéterminée, contenant la solution du difficile problème de la page 231 du 3.me volume de ce recueil. Ce mémoire étant trop étendu pour pouvoir paraître de suite, l'auteur, à la prière du rédacteur, a bien voulu en faire un extrait, présentant le procédé pratique, dégagé de tout raisonnement ; extrait très-propre à aider à l'intelligence du mémoire, lorsqu'il paraîtra ; c'est cet extrait que l'on va mettre sous les yeux du lecteur. On doit espérer que l'exemple de M. Argand encouragera quelques géomètres à aborder d'autres questions, proposées dans les *Annales*, et demeurées jusqu'ici sans solution.

PROBLÈME. Soit une circonférence divisée en un nombre quelconque N *de parties égales ; et soient affectés arbitrairement, et sans suivre aucun ordre déterminé, aux points de division, les numéros* 1, 2, 3,....N—1, N. *Soient joints ensuite, par des cordes, le point* 1 *au point* 2, *celui-ci au point* 3, *le point* 3 *au point* 4, *et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à joindre le point* N—1 *au point* N *et enfin ce dernier au point* 1. *On formera ainsi une sorte de polygône de* N *côtés, inscrit au cercle, et qui, en général, ne sera point régulier, puisque ses côtés pourront être inégaux, et que même quelques-uns d'entre eux pourront en couper un ou plusieurs des autres. Si l'on varie ensuite, de toutes les manières possibles, le numérotage des points de division, et qu'on répète, pour chaque numérotage, la même opération que ci-dessus, on formera un nombre déterminé de polygônes inscrits, parmi lesquels plusieurs ne différeront les uns des autres que par leur situation.*

On propose de déterminer, en général, quel sera le nombre des polygônes réellement différens ?

Solution. Soit N le nombre des côtés du polygône que, dans les exemples qui suivront, nous supposerons constamment $=6$.

1. Soit, en général, suivant la notation de M. Kramp, $m!=1,2,3,...m$: on aura ainsi

$$1!=1\ ,\ 2!=2\ ,\ 3!=6\ ,\ 4!=24\ ,\ 5!=120\ ,\ 6!=720.$$

On sait d'ailleurs que $0!=1$.

Employons le symbole $m?$ à désigner combien il y a de nombres premiers à m dans la suite $1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,....m$; on aura ainsi $1?=1\ ,\ 2?=1\ ,\ 3?=2\ ,\ 4?=2\ ,\ 5?=4\ ,\ 6?=2$. Il est connu que si $m=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}....$, $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,....$ étant des nombres premiers inégaux, on aura, en général, $m?=m\dfrac{a-1}{a}\cdot\dfrac{b-1}{b}\cdot\dfrac{c-1}{c}.....$

$D_1\ ,\ D_2\ ,\ D_3\ ,....D_\eta$ sont les diviseurs de N, N compris ; de sorte que, s'ils sont disposés par ordre de grandeur, on a $D_1=1$, $D_\eta=N$. Représentant donc, en général, par d un de ces diviseurs, d sera susceptible de η valeurs.

Pour $N=6$, on a $D_1=1\ ,\ D_2=2\ ,\ D_3=3\ ,\ D_4=6$, et $\eta=4$; les valeurs de d, dans ce cas, seront donc $1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 6$.

$d_1\ ,\ d_2\ ,\ d_3\ ,....d_\varepsilon$ sont les diviseurs de d, d non compris, de manière que leur nombre est ε, et que, s'ils sont disposés par ordre de grandeur, on a $d_1=1$.

Pour $d=1$, on a . . . . $\varepsilon=0$,
2 , $d_1=1$. . . . . $\varepsilon=1$,
3 , $d_1=1$. . . . . $\varepsilon=1$,
6 , $d_1=1, d_2=2, d_3=3$ $\varepsilon=3$.

2. $\mathrm{P}\ ,\ \Gamma\ ,\ \Lambda\ ,.....\mathrm{P}'\ ,\ \Gamma'\ ,\ \Lambda'\ ,.....$ sont des signes de fonctions dont on va successivement expliquer la nature.

La définition de la fonction P, quel que soit d, est

$$\mathrm{P}d=\left(\frac{N}{d}\right)^d\left(\frac{N}{d}\right)?d!$$

Ainsi pour $N=6$,

$$PD_1 = P1 = 6^1 . 6 ? 1! = 6 . 2 . 1 = 12 ,$$
$$PD_2 = P2 = 3^2 . 3 ? 2! = 9 . 2 . 2 = 36 ,$$
$$PD_3 = P3 = 2^3 . 2 ? 3! = 8 . 1 . 6 = 48 ,$$
$$PD_4 = P6 = 1^6 . 1 ? 6! = 1 . 1 . 720 = 720 .$$

3. Γ est une fonction dont la définition est

$$\text{Pour } d \text{ impair } \Gamma d = N \left(\frac{2N}{d}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{N}{d}\right) ? \left(\frac{d-1}{2}\right)!$$

$$\text{Pour } d \text{ pair } \Gamma d = \frac{N}{2} \left(\frac{2N}{d}\right)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{N}{d}\right) ? \left(\frac{d}{2}\right)!$$

Ainsi, pour $N=6$,

$$\Gamma D_1 = \Gamma 1 = 6 . 12^0 . 6 ? 0! = 6 . 1 . 2 . 1 = 12 ,$$
$$\Gamma D_2 = \Gamma 2 = 3 . 6^1 . 3 ? 1! = 3 . 6 . 2 . 1 = 36 ,$$
$$\Gamma D_3 = \Gamma 3 = 6 . 4^1 . 2 ? 1! = 6 . 4 . 1 . 1 = 24 ,$$
$$\Gamma D_4 = \Gamma 6 = 3 . 2^3 . 1 ? 3! = 3 . 8 . 1 . 6 = 144 .$$

4. Λ est une fonction dont la définition est

$$\text{Pour } d \text{ impair } \ldots\ldots\ldots\ldots \Lambda d = \Gamma d ;$$

$$\text{Pour } d \text{ pair et } \begin{cases} \dfrac{N}{d} \text{ impair} \ldots\ldots \Lambda d = \dfrac{2\Gamma d}{N} , \\[2ex] \dfrac{N}{d} \text{ pair} \ldots\ldots \Lambda d = \dfrac{4\Gamma d}{N} ; \end{cases}$$

Ainsi, pour $N=6$,

$$\Lambda D_1 = \Lambda 1 = \Gamma 1 = 12 ,$$
$$\Lambda D_2 = \Lambda 2 = \frac{2\Gamma 2}{6} = \frac{2 . 36}{6} = 12 ,$$
$$\Lambda D_3 = \Lambda 3 = \Gamma 3 = 24 ,$$
$$\Lambda D_4 = \Lambda 6 = \frac{2\Gamma 6}{6} = \frac{2 . 144}{6} = 48 ;$$

5. P', Γ', Λ' sont des fonctions dont la définition générale est

$$F'd = Fd - (F'd_1 + F'd_2 + F'd_3 + \ldots + F'd_\varepsilon) ;$$

d'où l'on voit que, pour calculer ces sortes de fonctions, il faut aller continuellement des plus petits nombres aux plus grands, en observant que, 1 n'ayant pas de diviseurs plus petits que lui, on a simplement $F'D_1 = F'1 = F1$.

Comme, par le n.° précédent, on a, dans le cas de d impair, $\Lambda d = \Gamma d$, et comme d'ailleurs un nombre impair ne peut avoir que des diviseurs impairs, il s'ensuit qu'on peut, quand d est impair, écrire plus simplement $\Lambda' d = \Gamma' d$.

A l'aide de ces attentions on trouvera, pour $N=6$,

$$P'D_1 = P'1 = P1 = 12\ ,$$
$$P'D_2 = P'2 = P2 - P'1 = 36 - 12 = 24\ ,$$
$$P'D_3 = P'3 = P3 - P'1 = 48 - 12 = 36\ ,$$
$$P'D_4 = P'6 = P6 - (P'1 + P'2 + P'3) = 720 - (12 + 24 + 36) = 648.$$
$$\Gamma' D_1 = \Gamma' 1 = \Gamma 1 = 12\ ,$$
$$\Gamma' D_2 = \Gamma' 2 = \Gamma 2 - \Gamma' 1 = 36 - 12 = 24\ ;$$
$$\Gamma' D_3 = \Gamma' 3 = \Gamma 3 - \Gamma' 1 = 24 - 12 = 12\ ,$$
$$\Gamma' D_4 = \Gamma' 6 = \Gamma 6 - (\Gamma' 1 + \Gamma' 2 + \Gamma' 3) = 144 - (12 - 24 - 12) = 96.$$
$$\Lambda' D_1 = \Lambda' 1 = \Gamma' 1 = 12\ ,$$
$$\Lambda' D_2 = \Lambda' 2 = \Lambda 2 - \Lambda' 1 = 12 - 12 = 0\ ,$$
$$\Lambda' D_3 = \Lambda' 3 = \Gamma' 3 = 12\ ,$$
$$\Lambda' D_4 = \Lambda' 6 = \Lambda 6 - (\Lambda' 1 + \Lambda' 2 + \Lambda' 3) = 48 - (12 + 0 + 12) = 24.$$

6. Des fonctions Γ' et Λ' on tire les fonctions σ, σ', σ'' de la manière suivante :

$$\text{Pour } d \text{ pair} \begin{cases} \sigma' d = \dfrac{d}{2}\Gamma' d\ , \\[2ex] \sigma'' d = \dfrac{d}{2}\Lambda' d, \\[2ex] \sigma\, d = \sigma' d + \sigma'' d\ ; \end{cases}$$

$$\text{Pour } d \text{ impair} \quad \sigma\, d = d\Gamma' d\ ;$$

σ' et σ'' ne s'emploient pas dans ce second cas.

Ainsi, pour $N=6$,

$$\sigma D_1 = \sigma 1 = \Gamma' 1 = 12 \;,$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma' D_2 = \sigma' 2 = \Gamma' 2 = 24 \\ \sigma'' D_2 = \sigma'' 2 = \Lambda' 2 = 0 \end{array}\right\} \sigma D_2 = \sigma 2 = \sigma' 2 + \sigma'' 2 = 24 \,,$$

$$\sigma D_3 = \sigma 3 = 3\Gamma' 3 = 36 \;,$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma' D_4 = \sigma' 6 = 3\Gamma' 6 = 288 \\ \sigma'' D_4 = \sigma'' 6 = 3\Lambda' 6 = \;\; 72 \end{array}\right\} \sigma D_4 = \sigma 6 = \sigma' 6 + \sigma'' 6 = 360 \,.$$

7. Les fonctions P' et σ conduiront aux fonctions ξ, en faisant $\xi = P' - \sigma$.

Ainsi, pour $N=6$,

$$\begin{aligned} \xi D_1 &= \xi 1 = P' 1 - \sigma 1 = \;\; 12 - \;\; 12 = \;\; 0 \;, \\ \xi D_2 &= \xi 2 = P' 2 - \sigma 2 = \;\; 24 - \;\; 24 = \;\; 0 \;, \\ \xi D_3 &= \xi 3 = P' 3 - \sigma 3 = \;\; 36 - \;\; 36 = \;\; 0 \;, \\ \xi D_4 &= \xi 6 = P' 6 - \sigma 6 = 648 - 360 = 288 \;. \end{aligned}$$

8. Ce qui précède forme, quand N est impair, la première partie du procédé ; mais, quand N est pair, il faut, de plus, effectuer les déterminations suivantes

$$\frac{N}{2} = M \text{ . puis pour } M \left\{ \begin{array}{ll} \text{pair} & L = \dfrac{M}{2} \;, \\ \text{impair} & L = \dfrac{M-1}{2} \;; \end{array} \right.$$

$$a = 2^M . M . M! \;, \quad Q = 2^M . M ? L! \;;$$

Ainsi, pour $N=6$,

$$M = \frac{6}{2} = 3 \;, \quad L = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$a = 2^3 . 3 . 3! = 144 \;; \quad Q = 2^3 . 3^2 . 1! = 72 \;;$$

On fera ensuite

Pour M pair $\left\{\begin{array}{l} g=Q, \\ h=0, \\ g'=\sigma'N-Q, \\ h'=\sigma''N. \end{array}\right.$ Pour M impair $\left\{\begin{array}{l} g=0, \\ h=Q, \\ g'=\sigma'N, \\ h'=\sigma''N-Q. \end{array}\right.$

M étant impair, dans notre exemple, on a

$$g=0\ ,\quad h=72\ ,\quad g'=\sigma'6=288\ ,\quad h'=\sigma''6-72=0\,.$$

On posera ensuite, quel que soit M,

$$\varkappa=a-Q\ ,\quad \omega=\xi N-2\varkappa\,.$$

Ainsi, dans notre exemple,

$$\varkappa=144-72=72\ ,\quad \omega=\xi 6-2\,.\,72=288-144=144\,.$$

9. Voici maintenant la seconde partie du procédé On y emploie les fonctions Σ, Σ', Σ'', Ξ qui, comme les précédentes ont pour *sujet* les différentes valeurs de d, avec cette restriction que Σ s'applique aux valeurs impaires seulement, Σ' et Σ'' aux valeurs paires, en exceptant la valeur $d=N$. Quant à Ξ, elle s'applique à toutes les valeurs de d, mais en exceptant encore $d=N$, si N est pair.

Les valeurs de ces diverses fonctions sont les suivantes :

$$\Sigma d=\frac{\sigma d}{2dN}\ ,\quad \Sigma' d=\frac{\sigma' d}{2dN}\ ,\quad \Sigma'' d=\frac{\sigma'' d}{2dN}\ ,\quad \Xi d=\frac{\xi d}{4dN}\,.$$

Ainsi, dans notre exemple,

$$\Sigma D_1=\Sigma 1=\frac{\sigma 1}{12}=\frac{12}{12}=1\ ,\quad \Sigma' D_2=\Sigma' 2=\frac{\sigma' 2}{2.2.6}=\frac{24}{24}=1\ ;$$

$$\Sigma D_3=\Sigma 3=\frac{\sigma 3}{2.3.6}=\frac{36}{36}=1\ ;\quad \Sigma'' D_2=\Sigma'' 2=\frac{\sigma'' 2}{2.2.6}=\frac{0}{24}=0\,.$$

$$\Xi D_1=\Xi 1=\frac{\xi 1}{4.1.6}=\frac{0}{24}=0\,,$$

$$\Xi D_2=\Xi 2=\frac{\xi 2}{4.2.6}=\frac{0}{48}=0\,,$$

$$\Xi D_3=\Xi 3=\frac{\xi 5}{4.3.6}=\frac{0}{72}=0\,.$$

10. Quant N est pair, on doit en outre faire

$$\text{Pour } M \text{ pair} \begin{cases} G=\dfrac{g}{N^2}\,, \\ H=0\,; \end{cases} \quad \text{Pour } M \text{ impair} \begin{cases} G=0\,, \\ H=\dfrac{h}{N^2}\,. \end{cases}$$

Ainsi, dans notre exemple, où $M=3$, on a

$$G=0\,, \quad H=\tfrac{72}{36}=2\,.$$

On fera ensuite, quel que soit M;

$$G'=\frac{g'}{2N^2}\,, \quad H'=\frac{h'}{2N^2}\,, \quad A'=A''=\frac{a}{2N^2}\,, \quad \Omega=\frac{\omega}{4N^2}\,;$$

ce qui donne, dans notre exemple,

$$G'=\tfrac{288}{72}=4\,, \quad H'=\tfrac{0}{72}=0\,, \quad A'=A''=\tfrac{72}{72}=1\,, \quad \Omega=\tfrac{144}{144}=1.$$

11. Enfin, en nommant Π le nombre des polygônes qui sont l'objet du problème, ce nombre, dans le cas de N impair, sera la somme de toutes les fonctions Σ, Σ', Σ'', Ξ; et, dans le cas de N pair, il sera cette somme, augmentée de celle des nombres G, H, G', H', A', A'', Ω.

Ainsi puisque, dans notre exemple, $N=6$, nombre pair, on aura

$$\Pi=\Sigma 1+\Sigma 3+\Sigma' 2+\Sigma'' 2+\Xi 1+\Xi 2+\Xi 3+G+H+G'+H'+A'+A''+\Omega$$
$$=1+1+1+0+0+0+0+0+2+4+0+1+1+1$$

ou

$$\Pi=12\,.$$

On aura donc douze polygônes essentiellement différens. Si l'on veut les construire, il suffira de construire douze cercles, de diviser chacun d'eux en six parties égales, de numéroter ensuite consécutivement les points de division ainsi qu'il suit

123456,	135264,	124635,
126453,	126543,	124653,
125634,	125364,	126354,
125436,	124365,	123645,

et joindre enfin les points de division par des cordes, suivant les conditions prescrites dans l'énoncé du problème.

12. En faisant successivement diverses suppositions pour N, et appliquant à chacune d'elles les méthodes qui viennent d'être développées, on trouve,

Pour $N=1$,	$\Pi=$ 0,
2,	1,
3,	1,
4,	2,
5,	4,
6,	12,
7,	39,
8,	202,
9,	1219,
10,	9468,
11,	83435,
12,	836017,
.....	.....

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes d'optique.

I. SUR une table rectangulaire donnée doivent être placées deux lumières élevées au-dessus de cette table d'une même quantité donnée, et qui doivent y être tellement posées que leurs projections tombent sur la droite qui joint les milieux des deux petits côtes du rectangle. On demande de quelle manière ces deux lumières doivent être placées ; 1.° pour que le point le moins éclairé du bord de la table le soit le plus possible ? 2.° pour que le point le plus éclairé du bord de la table le soit le moins possible ?

II. Résoudre le même problème pour une table elliptique ; les deux lumières devant répondre au grand axe ?

III. Résoudre le même problème pour quatre lumières et une table rectangulaire ; les lumières pouvant repondre 1.° aux droites qui joignent les milieux des côtés opposés ; 2.° aux deux diagonales ?

IV. Résoudre enfin le même problème pour une table elliptique ; les quatre lumières pouvant répondre 1.° aux deux axes ; 2.° aux deux diamètres conjugués égaux ?

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Reflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analise ;

Par M. ARGAND.

LA nouvelle théorie des imaginaires, dont il a déjà été plusieurs fois question dans ce recueil (*), a deux objets distincts et indépendans. Elle tend premièrement à donner une signification intelligible à des expressions qu'on était forcé d'admettre dans l'analise, mais qu'on n'avait pas cru jusqu'ici pouvoir rapporter à aucune quantité connue et évaluable. Elle offre, en second lieu, une méthode de calcul, ou, si l'on veut, une *notation* d'un genre particulier, qui emploie des signes géométriques, concuremment avec les signes algébriques ordinaires. Sous ces deux points de vue, elle donne lieu aux deux questions suivantes : Est-il rigoureusement démontré, dans la nouvelle théorie, que $\sqrt{-1}$ exprime une ligne perpendiculaire aux lignes prises pour $+1$ et -1 ? La notation des lignes *dirigées* peut-elle, dans quelque cas, fournir des démonstrations et solutions préférables, sous le rapport de la simplicité, de la brièveté, etc., à celles qu'elles paraissent destinées à remplacer?

Quant au premier point, il est et sera peut-être toujours sujet à discussion, tant qu'on cherchera à établir la signification de $\sqrt{-1}$

(*) Voyez les pages 61, 133, 222 et 364 du 4.me volume.

J. D. G.

par des conséquences d'analogie avec les notions reçues sur les quantités positives et négatives, et sur leur proportion entre elles. On a discuté et on discute encore sur les quantités négatives ; à plus forte raison pourra-t-on élever des objections contre les nouvelles notions des imaginaires.

Mais, il n'y aura plus de difficulté si, comme l'a fait M. Français (*Annales*, tom. IV, pag. 62), on établit, comme définition, ce qu'on entend par le *rapport de grandeur et de position* entre deux lignes. En effet, la relation entre deux lignes données de grandeur et de direction se conçoit avec toute la précision géométrique nécessaire. Qu'on nomme cette relation *rapport*, ou qu'on lui donne tel nom qu'on voudra, on pourra toujours en faire l'objet de raisonnemens rigoureux, et en tirer les conséquences de géométrie et d'analise dont nous avons, M. Français et moi, donné quelques exemples. La seule question qui reste est donc de savoir s'il est bien permis de désigner cette relation par les mots *rapport* ou *proportion*, qui ont déjà, dans l'analise, une acception determinée et immuable. Or, cela est effectivement permis, puisque, dans la nouvelle acception, on ne fait qu'*ajouter* à l'ancienne, sans d'ailleurs y rien *changer*. On généralise celle-ci de manière que l'acception commune est, pour ainsi dire, un cas particulier de la nouvelle. Il ne s'agit donc pas de chercher ici une *démonstration*.

C'est ainsi, par exemple, que le premier analiste qui a dit que $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ a dû donner cette équation, non comme un *théorème* démontré ou à démontrer, mais comme une *définition* des puissances à exposans négatifs. La seule chose qu'il eut à faire voir était qu'en adoptant cette definition, on ne faisait que généraliser la définition des puissances à exposans positifs, les seules connues jusque-là. Il en est de même des puissances à exposans fractionnaires, irrationnels ou imaginaires. On a dit (*Annales*, tom. IV, pag. 231) que Euler avait démontré que $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}=e^{-\frac{1}{2}\pi}$. Le mot *démontrer* peut être exact, en tant qu'on regarde cette équation comme tirée de l'équation $e^{x\sqrt{-1}}=\text{Cos.}x+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x$, d'où elle dérive facilement ; mais il ne le serait pas relativement à cette dernière ; car, pour démontrer qu'une certaine expression a telle valeur, il faut premièrement avoir défini cette expression ; or, existe-t-il des puissances à exposans imaginaires une definition antérieure à ce qu'on appelle la démonstration d'Euler ? c'est ce qui ne parait pas. Lorsque Euler a cherché à ramener l'expression $a^{x\sqrt{-1}}$ à des quantités évaluables, il a dû naturellement considérer le théorème $e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots$ antérieurement prouvé, pour toutes les valeurs *réelles* de z. En faisant $z=x\sqrt{-1}$, il a trouvé $e^{x\sqrt{-1}}=1+\frac{x\sqrt{-1}}{1}-\frac{x^2}{2}-\ldots$; d'où il a dû conclure, non que $e^{x\sqrt{-1}}=\text{Cos}\,x+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x$, mais que, si l'on définissait l'expression $e^{x\sqrt{-1}}$ en disant qu'elle représente une quantité égale à $\text{Cos.}x+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}x$, les puissances à exposans réels et les puissances à exposans imaginaires se trouveraient liées par une loi commune. Ce n'est donc là encore qu'une extension de principes et non la démonstration d'un théorème.

C'est aussi par une extension des principes que j'ai été conduit à regarder $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ comme exprimant la perpendiculaire sur le plan ±1, $\pm\sqrt{-1}$. Les deux résultats se contredisent, et assurément je n'ai garde de prétendre faire prévaloir le mien ; j'ai voulu seulement faire observer que MM. Servois et Français l'ont attaqué par des considérations qui, au fond, sont de la même nature que celles sur lesquelles je m'étais appuyé pour l'établir.

Mais, si la perpendiculaire dont il s'agit ne peut pas être exprimée par $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$, quelle sera donc son expression ? ou, pour mieux dire, peut-on trouver une expression telle que, si on l'adopte pour représenter cette perpendiculaire, toutes les lignes tirées dans une direction quelconque (lesquelles auraient alors leur expression) soient liées par une loi commune, comme cela a dejà lieu relativement à toute ligne tirée dans les plans ±1, $\pm\sqrt{-1}$? C'est là une question qui semble devoir exciter la curiosité des géomètres, du moins de ceux d'entre eux qui admettent la nouvelle théorie.

Je reviens au premier point de discussion ; et j'observe que la question, si $\sqrt{-1}$ exprime ou non une perpendiculaire sur ± 1, porte uniquement sur la signification du mot *rapport ;* car, tout le monde est d'accord d'entendre par cette expression une quantité telle que $+1 : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : -1$, ou que les rapports $\frac{\sqrt{-1}}{+1}$, $\frac{-1}{\sqrt{-1}}$ soient égaux. Ainsi l'objection qu'a faite M. Servois (*Annales*, tom. IV, pag. 228), contre la démonstration du premier théorème de M. Français, en disant « qu'il n'est pas prouvé que $\pm a\sqrt{-1}$ » soit moyen de position entre $+a$ et $-a$ », revient à dire que le sens du mot *rapport* ne renferme rien de relatif à la position. Cela est vrai, dans l'acception commune ; et encore pourrait-on dire que, dans l'idée du rapport de deux quantités de signes différens, il faut bien faire entrer celle de ces signes. Dans la nouvelle acception, la direction concourt avec la grandeur pour former le rapport. C'est donc, comme l'on voit, une simple question de mots, qui se décide par la définition précise qu'a donnée M. Français, et qui n'est d'ailleurs qu'une extension de la définition ordinaire.

Le second point de discussion est plus important. Sans doute il n'est aucune vérité accessible par l'emploi de la notation des *lignes dirigées*, à laquelle on ne puisse aussi parvenir par la marche ordinaire ; mais y parviendra-t-on plus ou moins facilement par une méthode que par l'autre ? la question mérite, ce me semble, d'être examinée. C'est à l'influence des méthodes et des notations sur la marche progressive de la science que les modernes doivent leur grande supériorité sur les anciens, en fait de connaissances mathématiques ; ainsi, quand il se présente une idée nouvelle en ce genre, on peut du moins examiner s'il n'y a point de parti à en tirer. M. Servois est le seul qui, depuis la publication de la nouvelle théorie, ait manifesté son opinion à ce sujet, et cette opinion n'est pas en faveur de l'emploi des *lignes dirigées* comme notation. L'usage des formules analitiques lui semble plus simple et plus expéditif (*Annales* , tom. IV , pag. 230). Je réclamerai, à l'égard de ma méthode , un examen plus particulier. J'observe qu'elle est nouvelle , et que les opérations mentales qu'elle exige , quoique fort simples , peuvent bien demander quelque habitude , pour être exécutées avec la célérité que donne la pratique dans les opérations ordinaires de l'algèbre. Quelques-uns des théorèmes que j'ai démontrés me semblent l'être plus facilement que par la marche purement analitique. C'est peut-être une illusion d'auteur , et je n'insisterai pas là-dessus ; mais je solliciterai , avec plus de confiance , la préférence , en faveur des lignes dirigées , pour la démonstration du théorème d'algèbre. « Tout polynôme $x^n+ax^{n-1}+\ldots$ est décomposable en facteurs du premier ou du second degré ». Je crois devoir revenir sur cette démonstration , tant pour résoudre l'objection qu'y a faite M. Servois (*Annales* , tom. IV , pag. 231) que pour montrer , avec plus de détail , comment elle découle facilement des nouveaux principes. L'importance et la difficulté de ce théorème qui a exercé la sagacité des géomètres du premier ordre , excuseront , je le présume , aux yeux des lecteurs , quelques répétitions de ce qui a été dit sur ce même sujet.

Les démonstrations qu'on a données de ce théorème semblent pouvoir être rangées sous deux classes.

Les unes se fondent sur certains principes métaphysiques relatifs aux fonctions et aux renversemens d'équations : principes sans doute vrais en eux-mêmes , mais qui ne sont point susceptibles d'une démonstration rigoureusement dite. Ce sont des espèces d'*axiomes* , dont la vérité ne peut être bien sentie qu'autant qu'on possède déjà l'*esprit* du calcul algébrique ; tandis que , pour reconnaître la vérité d'un *théorème* , il suffit de posséder les *principes* de ce calcul ; c'est-à-dire , d'en connaître les définitions et notations. De là vient que les démonstrations de ce genre ont été fréquemment attaquées. Le recueil auquel je confie ces réflexions en offre , en particulier , plusieurs exemples ; et les discussions qui ont eu lieu à ce sujet sont un indice que les raisonnemens qu'elles ont pour objet ne sont pas tout à fait sans reproches.

Dans d'autres démonstrations, on attaque de front la proposition à établir, en faisant voir qu'il existe toujours au moins une quantité, de la forme $a+b\sqrt{-1}$, qui, prise pour x, rend nul le polynôme proposé, ou bien qu'on peut résoudre ce polynôme en facteurs réels du premier ou du second degré. C'est la marche qu'a suivi Lagrange. Ce grand géomètre a montré que les raisonnemens faits avant lui, sur ce même sujet, par d'Alembert, Euler, Foncenex, etc., étaient incomplets (*Résolut. des équat. numériq.* notes IX et X). Les uns employaient des développemens en séries, les autres des équations subsidiaires; mais ils n'avaient pas prouvé, ce qui était pourtant nécessaire, que les coefficiens de ces équations et de ces series étaient toujours réels. Ces géomètres admettent implicitement le principe « que, si une question dans laquelle il s'agit de dé- » terminer une inconnue peut être resolue de n manières, elle doit » conduire à une équation du degré n. » Lagrange lui-même le regarde comme légitime, quoiqu'il n'en fasse pas usage dans les les démonstrations citées. Or, ne pourrait-on pas dire encore que ce principe, extrêmement probable sans doute, n'est pas démontré, et rentre dans la classe de ces sortes d'axiomes dont il était question tout à l'heure. Il semble sur-tout que, comme on ne peut en acquérir la persuasion que par une pratique assez longue dans la science, ce n'est pas le lieu de l'employer, quand il s'agit d'une proposition qui, dans l'ordre théorique, est une des premières qui se présentent à démontrer dans l'analise. Cette observation, au reste, n'a nullement pour objet d'élever une chicane, qui serait aussi déplacée qu'inutile, sur des conceptions auxquelles tous les géomètres doivent le tribut de leur estime. Elle tend seulement à faire sentir la difficulté de traiter ce sujet d'une manière satisfaisante.

D'après ces considérations, il paraît qu'une demonstration à la fois directe, simple et rigoureuse peut encore meriter d'être offerte aux géomètres. Je vais donc reprendre ici celle de la page 142 du IV.^{e} volume des *Annales*; mais, pour en écarter toute espèce de nuage, je l'affranchirai de la considération des quantités évanouissantes.

Il convient de rappeler, en peu de mots, les premiers principes de la théorie des lignes dirigées.

Ayant pris une direction $\overline{KA}$ pour celle des quantités positives, la direction opposée $\overline{AK}$ sera, comme à l'ordinaire, celle des quantités négatives. Tirant par K la perpendiculaire BKD, une des directions $\overline{KB}$, $\overline{KD}$, la première par exemple, appartiendra aux imaginaires $+a\sqrt{-1}$, la seconde aux imaginaires $-a\sqrt{-1}$. Le trait au-dessus des lettres indique que la ligne désignée est considérée comme tirée dans sa direction. On supprime ce trait, quand on ne considère dans la ligne que sa grandeur absolue.

Prenant, à volonté, des points F, G, H,....P, Q, on a

$$\overline{FG}+\overline{GH}+\ldots\ldots+\overline{PQ}=\overline{FQ}.$$

C'est la règle d'*addition*.

Si l'on a, entre quatre lignes, l'équation

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}},$$

et que, de plus, l'angle entre $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ soit égal à l'angle $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, ces lignes sont dites en *proportion*. De là se tire la règle de *multiplication*; car un produit n'est autre chose qu'un quatrième terme de proportion dont le premier est l'unité.

Il faut bien observer que ces deux règles sont indépendantes de l'opinion qu'on peut avoir sur la nouvelle théorie. Si l'on veut que $\sqrt{-1}$, symbole que l'algèbre s'obstine à nous montrer partout, et qui, appelé quelquefois absurde, n'a jamais donné néanmoins des résultats qui soient tels; si l'on veut, dis-je, que ce symbole ne soit rien du tout, sans pouvoir être pourtant égalé à zéro, cela ne fera pas de difficulté. Les lignes dirigees seront les *signes* seulement des nombres de la forme $a+b\sqrt{-1}$. Les règles ci-dessus n'en seront pas moins légitimes ; mais, au lieu de les déduire, *a priori*, de considérations en partie métaphysiques, on tirera la première d'une simple construction. La seconde sera une conséquence immédiate des formules $\text{Sin.}(a+b)=\text{Sin.}a\text{Cos.}b+$ etc. ; moyennant quoi l'emploi de ces règles pourra donner des démonstrations entièrement rigoureuses.

Les lignes dirigées seront donc les symboles des nombres $a+b\sqrt{-1}$. Comme ces nombres, elles seront susceptibles d'augmentation, diminution, multiplication, division, etc. ; elles les suivront, pour ainsi dire, dans toutes leurs fonctions ; en un mot, elles les *représenteront* complètement. Ainsi, dans cette manière de voir, des quantités concrètes représenteront des nombres abstraits ; mais les nombres abstraits ne pourront réciproquement représenter les quantités concrètes.....

Dans ce qui suit, les accens, indifféremment placés, seront employés pour indiquer la grandeur absolue des quantités qu'ils affectent ; ainsi, si $a=m+n\sqrt{-1}$, m et n étant réels, on devra entendre que $a_{\prime}$ ou $a'=\sqrt{m^2+n^2}$.

Soit donc le polynôme proposé

$$y_x=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots\ldots+fx+g\ .$$

n est un nombre entier ; a, b,...f, g peuvent être de la forme $m+n\sqrt{-1}$. Il s'agit de prouver qu'on peut toujours trouver une quantité de cette même forme qui, prise pour x, rende $y_x=0$.

Pour une valeur quelconque de x, le polynôme peut être construit, par les règles précédentes. En prenant K pour point initial et nommant P le point final, ce polynôme sera exprimé par $\overline{\text{KP}}$, et il faut montrer qu'on peut déterniner x de manière que le point P coïncide avec k.

Or si, dans l'infinité de valeurs dont x est susceptible, il n'y en avait aucune qui donnât lieu à cette coïncidence, la ligne $\overline{\text{KP}}$ ne ne pourrait jamais devenir nulle ; et, de toutes les valeurs de KP, il y en aurait nécessairement une qui serait plus petite que toutes les autres. Nommons donc z la valeur de x qui donnerait ce *minimum* ; on ne pourrait pas avoir

$$y'_{(z+i)} < y'_z \,,$$

quelle que fût la quantité i.

Or, par le développement, on a

$$(A) \quad y_{(z+i)} = y_z + \{nz^{n-1} + (n-1)z^{n-2} + \ldots + f\}i + \left\{\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}z^2 + \ldots\right\}i^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots + (nz+a)i^{n-1} + i^n.$$

Comme les coefficiens des différentes puissances de i peuvent être nuls, et que ce cas demanderait des considérations particulières, il conviendra de traiter la question d'une manière générale, en représentant l'équation précédente par

$$(B) \qquad y_{(z+i)} = y_z + Ri^r + Si^s + \ldots + Vi^v + i^n \,;$$

de manière qu'aucun des coefficiens R, S, ... V ne soit nul, et que les exposans r, s, ... v, n aillent en augmentant. Il faut remarquer que, si tous les coefficiens de (A) étaient nuls, l'équation (B) se réduirait à $y_{(z+i)} = y_z + i^n$. Faisant donc $i \sqrt[n]{-y_z}$, on aurait $y_{(z+i)} = 0$, et le théorème serait démontré pour ce cas dont on peut, par conséquent, faire abstraction dans ce qui va suivre. Ainsi nous supposerons que le second membre de l'équation (B) a au moins trois termes.

Cela posé, que l'on construise $y_{(z+i)}$, en prenant

$$\overline{\mathrm{KP}} = y_z \,,\ \overline{\mathrm{PA}} = Ri^r \,,\ \overline{\mathrm{AB}} = Si^s \,, \ldots \overline{\mathrm{FG}} = Vi^v \,,\ \overline{\mathrm{GH}} = i^n$$

on aura

$$y'_z = \mathrm{KP}\ ;\ R'i'^r = \mathrm{PA}\ ,\ S'i'^s = \mathrm{AB}\ ,\ldots\ V'i'^v = \mathrm{FG}\ ,\ i'^n = \mathrm{GH}\ ;$$

car il est visible qu'en général $p'q' = (pq)'$.

$y_{(z+i)}$ sera représenté par la ligne brisée ou droite $\overline{\mathrm{KPAB}\ldots\mathrm{FGH}}$ ou par $\overline{\mathrm{KH}}$; et il faut prouver qu'on peut avoir $\mathrm{KH} < \mathrm{KP}$.

Or, la quantité i peut varier de deux manières ;

1.° En *direction* ; et il est évident que, si elle varie d'un angle α, sa puissance i^r variera d'un angle $r\alpha$. Soit donc α l'angle dont $\overline{\mathrm{PA}} = Ri^r$ surpasse $\overline{\mathrm{KP}} = y_z$. Si on fait varier i de l'angle $\frac{\varpi - \alpha}{r}$, $\overline{\mathrm{PA}}$ variera de l'angle $\varpi - \gamma$, c'est-à-dire, que la direction de $\overline{\mathrm{PA}}$ deviendra opposée à celle de $\overline{\mathrm{KP}}$; en sorte que le point A se trouvera sur la ligne PK, prolongée, s'il le faut, par son extrémité K.

La direction de i étant supposée ainsi fixée, on peut, en second lieu, la faire varier de *grandeur* ; et d'abord, si $\mathrm{PA} < \mathrm{KP}$, on pourra diminuer i, jusqu'à ce que $\mathrm{PA} < \mathrm{KP}$, de manière que le point A tombe entre K et P.

Ensuite, si la grandeur de i, ainsi réduite, n'est pas telle que l'on ait

$$R'i'^r > S'i'^s + \ldots + V'i'^v + i'^n\ ,$$

on peut, en la diminuant encore, obtenir que cette inégalité ait lieu ; car les exposans $s, \ldots v, n$ sont tous plus grands que r.

Or, cette inégalité revient à

$$\mathrm{PA} > \mathrm{AB} + \ldots + \mathrm{FG} + \mathrm{GH}\ ;$$

la distance AH sera donc plus petite que PA, et, par conséquent, si l'on trace un cercle du centre A et du rayon AP, le point H sera au dedans de ce cercle, et il suit des premiers élémens de géométrie que, K étant sur le prolongement du rayon PA, du côté du centre A, on a $\mathrm{KH} < \mathrm{KP}$.

J'inviterai le lecteur à tracer une figure, pour suivre cette démonstration. En y appliquant les principes fondamentaux très-simples, rappelés ci-dessus, on verra qu'à l'exception du développement (A), qui suppose un calcul algébrique, tous les autres raisonnemens se font, pour ainsi dire, à vue, sans avoir besoin d'aucun effort d'attention.

Il est presque supperflu de s'arrêter à une objection qu'on pourrait faire à ce qui précède, en disant que, si l'on entreprenait de déterminer la valeur de x, en suivant la marche qui est prescrite pour diminuer progressivement y'_x, il serait possible qu'on n'y parvînt jamais, parce que la valeur de $i_{\prime}$ pourrait, dans les substitutions successives, ne diminuer que par des degrés de plus en plus petits. Le contraire ne se trouve point prouvé en effet; mais il n'en résulte autre chose sinon que les considérations qui précèdent ne sauraient fournir, du moins sans de nouveaux developpemens, une méthode d'approximation; et cela n'infirme aucunement la démonstration du théorème.

L'objection de M. Servois se résout facilement. « Ce n'est point » assez, ce me semble, dit ce Géomètre, de trouver des valeurs » de x qui donnent au polynôme des valeurs sans cesse décrois- » santes, il faut de plus que la loi du décroissement amène né- » cessairement le polynôme à *zéro*, ou qu'elle soit telle que zéro » ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'*asymptote* du poly- » nôme. » Il a été démontré qu'on pouvait trouver pour y'_x, non seulement des valeurs sans cesse décroissantes, mais encore une valeur moindre que celle qu'on prétendrait être la plus petite de toutes. Si le polynôme ne peut être amené à zéro, sa plus petite valeur sera donc autre que zéro, et, dans cette supposition la démonstration conserve toute sa force. La dernière phrase de M. Servois semblerait indiquer qu'il fait une distinction entre une limite infiniment petite et une limite absolument nulle; si telle était son idée, on pourrait y opposer des considérations tout à fait semblables à celles que M. Gergonne a fait valoir dans une occasion assez analogue à celle-ci; cette réponse s'appliquant, presque mot à mot, au cas présent, *mutatis mutadis*, il suffit d'y renvoyer le lecteur (*Annales*, tom. III, pag. 355). le scrupule de M. Servois tire sans doute sa source de la considération de l'équation à l'hyperbole $y=\frac{1}{x}$. Il est certain en effet que, bien qu'on puisse, dans cette équation, trouver pour y une valeur inférieure à toute limite donnée, y ne peut néanmoins devenir zéro, qu'autant qu'on supposera x infini. Mais cette circonstance n'a point lieu dans notre démonstration ; car, ce n'est certainement pas par une valeur infinie de x qu'on rendra nul le polynôme y'_x.

Revenons au sujet qui a donné lieu aux développemens ci-dessus; on pourra demander s'il serait possible de les traduire dans le langage ordinaire de l'analise ? Cela me parait très-probable ; mais peut-être serait-il difficile d'obtenir, par cette voie, un résultat aussi simple. Il semble que, pour y parvenir, il faudrait rapprocher l'expression des imaginaires de la notation des lignes dirigées, en écrivant, par exemple

$$\sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right\} \text{ pour } a+b\sqrt{-1}\,.$$

$\sqrt{a^2+b^2}$ pourrait être appelé le *module* de $a+b\sqrt{-1}$, et représenterait la *grandeur absolue* de la ligne $a+b\sqrt{-1}$, tandis que l'autre facteur, dont le module est l'unité, en représenterait la direction. On prouverait seulement 1.° que *le module de la somme de plusieurs quantités n'est pas plus grand que la somme des modules de ces quantités* ; ce qui revient à dire que la ligne AF n'est pas plus grande que la somme des lignes AB, BC, ... EF ; 2.° que *le module du produit de plusieurs quantités est égal au produit des modules de ces quantités.* Je dois laisser le soin de suivre ce rapprochement à des calculateurs plus habiles. Si l'on y réussit de manière à obtenir une démonstration purement analitique, aussi simple que celle qui découle des nouveaux principes, on aura gagné quelque chose dans l'analise, en parvenant ainsi, par une route facile, à un résultat dont les difficultés n'ont pas été au-dessous des forces de Lagrange lui-même. Si, au contraire, l'on n'y réussit pas, la notation des lignes dirigées conservera, dans ce cas-ci, un avantage évident sur la méthode ordinaire ; et, de toutes manières, la nouvelle théorie aura rendu un petit service à la science.

Qu'il me soit permis, en terminant ces réflexions, de placer ici une remarque au sujet de la note de M. Lacroix, insérée aux *Annales* (tom. IV, pag. 367). Ce savant professeur dit que les *Transactions philosophiques* de 1806, contiennent un mémoire de M. Buée dont le sujet est le même que celui sur lequel M. Français et moi avons écrit. Or, c'est dans cette même année 1806 que j'ai fait paraître l'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques :* opuscule où j'ai exposé les principes de la nouvelle théorie, et dont le mémoire inséré dans le 4.me volume des *Annales* (pag. 133) n'est qu'un extrait ; et l'on sait, d'autre part, que les volumes des collections académiques ne peuvent paraître que postérieurement à l'année dont ils portent la date. En voilà donc assez pour établir que, si, comme cela est fort possible, M. Buée n'a dû qu'à ses propres méditations les idées qu'il a développées dans son mémoire, il demeure toujours certain que je n'avais pu avoir connaissance de ce mémoire lorsque mon opuscule a paru.

CORRESPONDANCE.

Extraits de diverses lettres adressées au Rédacteur des Annales, *relativement au problème de la tractoire.* (*)

Extrait d'une lettre de M. Servois, professeur aux écoles d'artillerie.

Fontaine se trompait certainement, quand il prenait pour une *tractoire* la courbe décrite par un point circulant librement autour d'un centre mobile ; mais ferons-nous le procès à Huygens qui est, je crois, l'inventeur de la *tractoire* proprement dite, parce qu'il a pris cette courbe pour celle des tangentes égales ? Qu'entend-on par *traîner*, *trahere*, d'où *traction* et *tractio* ? il me semble que celui qui traine un fardeau, s'arrêtant, le fardeau doit s'arrêter ; en conséquence, dans le mouvement de *traction*, proprement dit, la vitesse imprimée ne se continue pas, mais est, à chaque instant, détruite par le frottement. Alors la courbe décrite ne doit-elle pas être la courbe aux tangentes égales ?

La Fère, le 13 juillet 1814.

(*) Voyez les pages 305, 311 et 332 du 4.me volume de ce recueil.

Extrait d'une lettre de M. Argand.

A la lecture de l'énoncé du problème de la *tractoire*, il m'a paru que ce problème pouvait se résoudre par le simple principe que, si tous les points d'un système reçoivent une impulsion commune, il n'y aura rien de changé dans leur mouvement relatif. Si, en effet, on conçoit que tout le système soit emporté d'un mouvement égal et contraire à celui du point P, ce point demeurera immobile dans l'espace; donc le mouvement absolu du point M ne pourra être qu'un mouvement circulaire uniforme autour de ce point P; or, en combinant ce mouvement circulaire uniforme avec le mouvement uniforme et rectiligne du point P, on obtient en effet une cycloïde ordinaire.

Mais, si l'on suppose que le frottement détruise à chaque instant la vitesse qu'acquerrait le mobile s'il n'y avait point de résistances (ce qui est le cas le plus fréquent dans la nature); le mouvement du mobile M à un instant quelconque i, sera le même que si i était l'instant initial, où l'on suppose que le point P commence à se mouvoir, le corps M étant immobile. Or, dans l'instant initial, la verge qui joint les points P et M est tangente à la courbe; donc dans ce cas la courbe est celle des tangentes égales; résultat contraire à celui que vous avez obtenu. Il m'a paru, Monsieur, que le raisonnement de la page 316, par lequel vous avez cherché à établir que la tractoire ne pouvait pas être la courbe aux tangentes égales (raisonnement qu'au surplus vous n'avez pas présenté comme une démonstration rigoureuse), il m'a paru, dis-je, que ce raisonnement n'était point exact dans l'endroit où vous dites que la suppression des résistances, revenant à l'introduction d'une force dirigée dans le *sens du mouvement*, n'aurait d'autre effet que de faire varier la tension ou compression de la verge; car ceci semble supposer tacitement que le sens du mouvement est celui de la verge, ce qui, en général, n'est pas et ne peut être en particulier qu'autant que la tractoire est la courbe aux tangentes égales. (*)

Paris, le 20 octobre 1814.

Extrait d'une lettre de M. Français, professeur à l'école royale de l'artillerie et du génie.

Quant aux objections faites contre nos solutions du problème de la *tractoire*, je ne pense pas qu'on doive les regarder comme très-sérieuses. Ce ne sont pas, en effet, des objections indirectes qui peuvent détruire les conséquences d'une solution fondée sur des principes exacts. Il faut attaquer directement ou les équations fondamentales ou la manière dont les conséquences en ont été déduites ; et, d'après la discussion de M. Dubuat, il me paraît que nos solutions ne souffrent plus le moindre nuage.

Metz, le 11 d'octobre 1814.

(*) C'est précisément ce que j'ai supposé et dû supposer, non tacitement, mais d'une manière très-expresse. J'ai dit, ou du moins voulu dire : admettons que, suivant le système qu'on nous oppose, la tractoire puisse quelquefois, soit par le frottement, soit par la résistance du milieu, soit enfin par tout autre obstacle de nature à agir dans la direction du mouvement, devenir la courbe aux tangentes égales ; la suppression de ces obstacles, revenant à l'introduction d'une nouvelle force, également dirigée dans le sens du mouvement, n'aurait d'autre effet que de comprimer la verge MP, sans changer la route décrite par le mobile, laquelle conséquemment devrait encore être la courbe aux tangentes égales ; or, nous venons de voir qu'alors elle ne l'est pas ; donc elle ne saurait l'être non plus dans le premier cas.

J. D. G.

Extrait

Extrait d'une lettre de M. Dubuat, professeur à l'école royale de l'artillerie et du génie.

J'ai conféré avec M. Français sur le problème de la tractoire. Nous voudrions connaître, d'une manière plus précise, les objections de MM. Servois et Argand. Il paraît que ces Messieurs ne nient pas que la tractoire ne soit en général une cycloïde ; mais ils pensent que, dans quelques cas, cette tractoire peut être une courbe à tangentes égales. Si, en généralisant le problème de la tractoire, on suppose que le point entraîné soit animé de forces accélératrices quelconques, nul doute qu'alors la tractoire ne puisse devenir une courbe à tangentes égales, ou même telle courbe que l'on voudra. Vous l'avez prouvé, Monsieur, dans le IV^e volume des *Annales*. (pag. 317 et suiv.). Je me permettrai cependant, à cet égard, une observation sur la solution du problème énoncé. Vous posez, pour cette solution, les quatre équations

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X, \qquad (1) \qquad (x-x')^2+y^2=a^2,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \qquad (2) \qquad y\,dx=(x-x')dy\,;$$

desquelles vous concluez les forces indéterminées X et Y.

Il me semble que les deux premières équations devraient être écrites comme il suit :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X}+\frac{p(x-x')}{a}\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y}+\frac{py}{a}\,;$$

car, outre les forces qu'on suppose agir sur le point entraîné, il faut tenir compte de l'équation de condition (3), c'est-à-dire, des forces dues à cette équation; forces dont vous avez vous-même donné l'expression (pag. 313). La quatrième équation n'est pas, à proprement parler, une équation de condition ; car le point entraîné n'est pas assujetti à se mouvoir sur la courbe à tangentes égales: ainsi il n'y a pas de forces dans cette équation qui n'est donnée qu'*à posteriori*, et qui doit résulter de la valeur des forces X et Y.

Au reste, cette observation ne change rien à la question principale qui est de savoir si la tractoire simple est une cycloïde ou une courbe à tangentes égales.

Cette incertitude ou ce doute sur la légitimité des solutions des problèmes de mécanique pouvait avoir lieu au temps de Clairaut, ou même au temps de Dalembert : il n'y avait point alors de méthode vraiment générale pour résoudre les problèmes; mais aujourd'hui, et depuis la publication de la *Mécanique analitique* de Lagrange, la solution d'un problème de mécanique ne doit plus être considérée que comme une application des formules générales du mouvement et de l'équilibre d'un système quelconque. Ces formules contiennent des termes ou des forces qui sont donnés quand on a les équations de condition ou de définition du système. Le reste de la solution n'est plus qu'une affaire de calcul ; c'est ainsi que, dans la géométrie analitique, une courbe étant définie par son équation, la recherche des tangentes normales ou rayons de courbure de la courbe, ne consiste qu'à substituer, dans des formules connues, des valeurs données par l'équation de cette courbe. Il ne devrait donc plus y avoir ni différence d'opinions ni différence de méthodes pour mettre un problème de mécanique en équation : cette mise en équation est une chose facile pour tous les problèmes; et, en suivant à cet égard la marche tracée par Lagrange, non seulement on est dispensé de la recherche du principe qui peut servir à la solution d'un problème donné ; mais on est encore à l'abri des erreurs auxquelles conduit quelquefois l'application du principe. Voici un exemple singulier de ces erreurs.

S'il est un principe général et adopté par tous les auteurs de mécanique, c'est bien certainement celui-ci : *Une force peut être supposée agir en un point quelconque de sa direction.* Ce principe est énoncé dès les premières pages de tous les traités élémentaires : on le trouve également dans la *Mécanique céleste*, dans la *Mécanique analitique*; et, à la page 34 de sa *Mécanique*, M. Poisson s'exprime ainsi : « Si une force donnée P agit au point m suivant » la direction mA, on peut lui substituer une force égale et de » même direction, appliquée au point m', que je prends *au hasard* sur la ligne mA, et que je suppose lié au point m, par » la droite inflexible mm' ». La démonstration ou la preuve vient ensuite, et elle n'admet aucune restriction. Cependant, d'après la définition du *moment d'une force*, par rapport à un plan, donnée page 49, l'auteur dit, page 67 : « ce moment dépend du point » d'application de la force ». Il semblerait donc que, dans ce cas au moins, c'est-à-dire, lorsqu'il s'agit des momens des forces par rapport à un plan, le principe que *le point d'application d'une force peut être pris au hasard sur sa direction*, n'a plus lieu; car, en l'admettant, le moment d'une force par rapport à un plan est une expression vague qui peut devenir tout ce qu'on voudra. Mais non, le principe est général, et l'auteur s'en sert pour trouver les conditions de la stabilité de l'équilibre des corps flottans (pag. 411 du 2.me vol.). Il substitue aux pressions verticales de l'eau, qui s'exercent sur tous les points de la surface du corps qui y flotte, des forces motrices, agissant sur tous les élémens matériels de ce corps, dirigées en sens contraire de la gravité et égales, pour chaque molécule, au poids d'une molécule d'eau du même volume. L'auteur parvient de cette manière aux conditions déjà connues de la stabilité de l'équilibre des corps flottans; mais supposons ces conditions inconnues et qu'il s'agisse de les trouver, on pourra, en faisant usage du principe en question, s'y prendre d'une infinité de manières qui conduiront à autant de résultats différens. Car, 1.° en ne déplaçant pas les points d'application des pressions verticales de l'eau, et en les laissant à la surface du corps, on aura, pour la somme des ces momens de forces, par rapport au plan horizontal du niveau de l'eau, une somme double de l'expression trouvée par M. Poisson; 2.° en déplaçant les points d'application, ce qu'il y a de plus simple, c'est de les porter tous sur le plan horizontal du niveau de l'eau; la somme des momens sera alors nulle; 3.° enfin, en déplaçant encore les points d'application, pour les porter *au hasard* sur les verticales correspondantes, la somme des momens sera aussi prise *au hasard*; et dès lors les conditions de la stabilité seront tout ce qu'on voudra.

Metz, le 11 décembre 1814.

Extraits de deux lettres adressées au Rédacteur des Annales, *relativement au pendule à point de suspension mobile* (*).

Extrait d'une lettre de M Argand.

Les mêmes considérations qui m'ont conduit, Monsieur, à trouver qu'abstraction faite des résistances et de toutes forces étrangères, la tractoire doit être une cycloïde, me semblent pouvoir être également appliquées à la question du pendule dont le point de suspension C est entraîné horizontalement d'un mouvement rectiligne et uniforme. Si l'on suppose, en effet, que tout le système soit entraîné d'un mouvement égal et contraire à celui du point C, ce point se trouvant alors immobile dans l'espace, le pendule deviendra un pendule simple ordinaire, dont il ne sera plus question ensuite que de combiner le mouvement connu, avec un mouvement du système égal et contraire à celui qu'on aura supposé commun à toutes ses parties.

La solution de M. Dubuat ne paraît pas s'accorder complètement

(*) Voyez le page 55 de ce volume.

avec ce résultat. Il trouve pour y un *maximum* $+1$, indépendamment de la vitesse b du point de suspension ; tandis qu'il est évident, même sans calcul, que la gravité étant donnée, on peut prendre la vitesse b assez petite pour que le pendule ne s'écarte de la verticale qu'aussi peu qu'on voudra, et qu'alors le *maximum* de y sera très-près de -1.

J'observe que, dans le pendule simple, on peut imprimer au poids une vitesse telle qu'elle ne lui fasse pas parcourir une demi-circonférence d'un même côté de la verticale, auquel cas le *maximum* y sera compris entre -1 et $+1$. J'observe, en second lieu, qu'on peut lui faire dépasser la demi-circonférence ; alors, le poids tournant constamment autour du point de suspension, il y aura nécessairement pour y une infinité de positions qui répondront au *maximum* $+1$.

Entre ces deux degrés de vitesse, il en existe un qui fait parcourir au poids une demi-circonférence précise d'un côté de la verticale ; mais alors il doit employer un temps infiniment grand à parvenir à cette verticale.

D'une autre part, on peut imaginer que le point de suspension et le poids reçoivent tous deux une impulsion *absolue* telle que l'impulsion *relative* soit celle qui convient au dernier cas dont je viens de parler. Je conjecturerais que c'est à ce cas que se rapporte la solution de M. Dubuat ; du moins les figures qu'il a données, son résultat d'un *maximum* constant pour tous les cas, et l'existence d'une asymptote, s'accordent fort bien avec les diverses suppositions qu'on peut faire sur les différentes impulsions absolues ; mais je n'en puis dire davantage dans une matière sur laquelle je n'ai peut-être pas des notions suffisamment approfondies.

Si vous trouvez, Monsieur, que ces observations soient fondées, je pense que l'estimable géomètre qu'elles concernent ne sera pas fâché de les connaître ; et je vous prierai de lui en communiquer la substance, si vous en avez l'occasion.

Paris, le 20 octobre 1814.

Extrait d'une lettre de M. Dubuat, professeur à l'école royale de l'artillerie et du génie.

Je vous suis très-obligé, Monsieur, de la communication que vous avez bien voulu me faire des observations de M. Argand sur la solution que j'ai donnée du problème de dynamique proposé à la page 320 du 4.me volume des *Annales*. Je conviens que cette solution n'est qu'un cas particulier, et que j'ai choisi la constante d'intégration telle que le problème soit susceptible d'une solution complète et finie. Voici la solution générale, qui suppose que la position d'un pendule simple à centre fixe est donnée en fonctions du temps.

Les coordonnées du point mobile de suspension étant x', y', et celles du point entraîné x, y, les équations différentielles de condition sont, en nommant b la vitesse constante du point de suspension

$$(x'-x)(\mathrm{d}x'-\mathrm{d}x)+(y'-y)(\mathrm{d}y'-\mathrm{d}y)=0\ ,\quad \mathrm{d}y'=0\ ,\quad \mathrm{d}x'=b\mathrm{d}t\ ;$$

Il est facile d'en conclure les équations

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\mu(x'-x)\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\mu(y'-y)-g\ ;$$

qui sont celles du mouvement du pendule, sa longueur et sa masse étant prises pour unités, la gravité étant représentée par g, et l'indéterminée μ étant la tension de sa verge. L'elimination de μ donne

$$(y'-y)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=(x'-x)\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-g\right)\ .$$

Soit $x'-x=\mathrm{Sin}.\varphi$, $y'-y=\mathrm{Cos}.\varphi$; si l'on substitue ces valeurs dans $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$, l'équation précédente deviendra à cause de $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}=0$ et $\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}=0$,

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-g\mathrm{Sin}.\varphi\ ;$$

dont l'intégrale est

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=2g(C+\text{Cos.}\varphi) .$$

La constante C se détermine par la condition qu'à l'origine du mouvement le pendule est dans la situation verticale, ce qui donne $x'-x=0$, $\text{Sin.}\varphi=0$, $\text{Cos.}\varphi=1$, et par conséquent $\frac{dx'-dx}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}=b-\frac{dx}{dt}$. La vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ est donc, à l'origine du mouvement, égale à la vitesse donnée b, moins la vitesse $\frac{dx}{dt}$ du pendule suivant l'axe des x; mais celle-ci étant nulle, ce qu'il est facile de prouver, par les équations de condition et par des raisonnemens analogues à ceux des pages 333 et 334 du IV.^me^ volume des *Annales*, il en résulte que la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$, à l'origine du mouvement, se réduit à b.

Substituant cette valeur dans l'intégrale ci-dessus, et faisant $\text{Cos.}\varphi=1$, on trouve $C=\frac{b^2}{2g}-1$, ce qui donne, pour l'équation différentielle entre φ et t,

$$d\varphi=dt\sqrt{2g}\left\{\frac{b^2}{2g}-1+\text{Cos.}\varphi\right\}^{\frac{1}{2}} ;$$

équation qui est aussi celle du mouvement d'un pendule simple à centre fixe, dont la longueur est 1, et dont la vitesse au point le plus bas est $\frac{b^2}{2g}$.

Cela posé, soit $\varphi=\text{F}(t)$ l'expression de la vitesse angulaire en fonction du temps; on aura, à cause de $x'=bt$ et de $y'=1$

$$x=bt-\text{Sin.}[\text{F}(t)] , \quad y=1-\text{Cos.}[\text{F}(t)] .$$

Telle est la solution générale; voici présentement quelques cas particuliers. 1.° Si $b=0$ le radical $\sqrt{\frac{b^2}{2g}-1+\text{Cos.}\varphi}$ est imaginaire; il n'y a donc pas de vitesse angulaire, et le pendule reste en repos. Mais si b, sans être nul, est très-petite par rapport à g, le cosinus variable $\text{Cos.}\varphi$ est toujours très-près de l'unité, afin que la quantité sous le radical soit positive ; $\text{Sin.}\varphi$ est donc toujours très-petit, en sorte que l'abscisse x diffère très-peu de l'abscisse x' et que l'ordonnée y diffère très-peu de l'unité. Le pendule entraîné par son point de suspension, reste donc toujours, comme M. Argand le remarque, très-voisin de la verticale.

2.° Si la vitesse b est telle que $\frac{b^2}{2g}=2$, ou si l'amplitude verticale de l'oscillation du pendule simple est égale au diamètre ; l'équation différentielle entre $\mathrm{d}\varphi$ et $\mathrm{d}t$ est intégrable, et on peut avoir les expressions de x et y en fonction du temps sous une forme finie quoique transcendante : c'est le cas que j'ai développé à la page 55 de ce volume ; les calculs doivent y être corrigés d'après la solution générale précédente.

3.° Enfin, si l'amplitude verticale de l'oscillation est égale au rayon, ou si $b^2=2g$, l'équation entre $\mathrm{d}\varphi$ et $\mathrm{d}t$ prend cette forme très-simple $\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}t\sqrt{2g\text{Cos.}\varphi}$; mais elle n'est pas intégrable.

Metz, le 11 décembre 1814.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Dynamique.

AB est une horizontale donnée sur le milieu de laquelle on a élevé verticalement une perpendiculaire indéfinie ; on demande en quel point C de cette verticale doit être placé le centre d'un pendule d'une longueur égale à CA ou CB, pour que ses oscillations commençant au point A et se terminant au point B s'exécutent dans le moindre temps possible ?

Problème d'Arithmétique.

Quel est le nombre dont les puissances successives ont pour leurs n derniers chiffres à droite les n derniers chiffres de ce nombre, disposés entre eux de la même manière que dans le nombre dont il s'agit ?

ASTRONOMIE.

Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ;

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

(*Quatrième Mémoire*). (*)

115. La position du plan de l'orbite d'un astre étant supposée connue, soit par des calculs antérieurs, soit par des observations faites près des nœuds, le problème de déterminer les autres élémens a été ramené dans le second mémoire (*Annales*, tom. IV, pag. 248) aux quatre équations qui suivent :

$$1.^\circ \quad na = \text{Sin.}\mu\text{Sin.}\varkappa\text{Sin.}\psi\,,$$

$$2.^\circ \quad n^2b = \text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(\text{Cos.}\psi + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varkappa)\,,$$

$$3.^\circ \quad nc = \text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi\,,$$

$$4.^\circ \quad nd\sqrt{n} = \psi + \text{Sin.}\mu\text{Cos.}\chi\text{Sin.}\psi\,.$$

(*) Voyez les pages 161 et 237 du IV.me volume et la page 1.re de celui-ci. L'auteur prie ses lecteurs de vouloir bien excuser la distraction qui lui a fait employer, aux pages 18, 19, 20, 21 du 3.me mémoire, pour désigner la demi-somme des anomalies excentriques, au lieu de la lettre χ qu'il avait destinée à cet usage, dans les mémoires précédens, la lettre φ qu'il a constamment consacrée à désigner l'anomalie vraie.

Les lettres a, b, c, d désignent ici des quantités qu'on peut immédiatement déduire des deux observations qui suffisent à la solution du problème, dont les inconnues sont représentées par les lettres μ, χ, ψ, n. La première μ est l'angle qui détermine l'excentricité de l'orbite. Les angles χ et ψ sont, l'un la demi-somme et l'autre la demi-différence des anomalies excentriques de l'orbite, qui répondent aux époques des deux observations. Enfin n est une fraction ayant pour numérateur le demi-grand axe de l'orbite de la terre, et pour dénominateur celui de l'orbite de l'astre. Cette fraction n est *positive* dans le cas de l'*ellipse*, *négative* dans le cas de l'*hyperbole*, et *nulle* dans le cas de la *parabole*. Dans les deux derniers cas, nos quatre équations générales doivent subir quelques modifications dont nous parlerons plus loin.

116. La troisième de ces équations ne renferme que trois des quatre inconnues du problème, mais les trois autres les comprennent toutes les quatre. Il se présente toutefois un artifice assez simple, pour remplacer les quatre équations par deux autres qui, sans être plus conpliquées, ne renferment que deux des quatre inconnues, savoir : l'angle ψ et le facteur n. Nous poserons d'abord pour cela

$$a^2+c^2=f^2 \quad , \quad b^2+a^2c^2+c^4=b^2+c^2f^2=h^2 \ .$$

117. Ajoutant alors ensemble les quarrés des deux membres des première et troisième équations, on aura

$$n^2(a^2+c^2) \quad \text{ou} \quad n^2f^2=\text{Sin.}^2\psi(1-\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2\chi) \ ;$$

donc

$$\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2\chi\text{Sin.}^2\psi=\text{Sin.}^2\psi-n^2f^2 \ ;$$

mais, la quatrième équation donne, en transposant et quarrant,

$$\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2\chi\text{Sin.}^2\psi=(nd\sqrt{n}-\psi)^2 \ ;$$

donc

$$nd\sqrt{n}=\psi+\sqrt{\text{Sin.}^2\chi+n^2f^2} \ .$$

118. Si ensuite nous multiplions l'équation

$$n^2f^2=\text{Sin.}^2\psi(1-\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2x)$$

par le quarré de la troisième

$$n^2c^2=\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi\ ,$$

nous aurons

$$n^4c^2f^2=\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi(\text{Sin.}^2\psi-\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2x\text{Sin.}^2\psi)\ ;$$

mais, en élevant au quarré les deux membres de la seconde, on a

$$n^4b^2=\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi(\text{Cos.}^2\psi+2\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x\text{Cos.}\psi+\text{Sin.}^2\mu\text{Cos.}^2x)\ ;$$

en les ajoutant donc, membre à membre, il viendra

$$n^4h^2=\text{Cos.}^2\mu\text{Sin.}^2\psi(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x\text{Cos.}\psi)^2\ ,$$

d'où

$$n^2h=\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x\text{Cos.}\psi)\ ;$$

mais la seconde, étant multipliée par Cos.ψ, devient

$$n^2b\text{Cos.}\psi=\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\psi(\text{Cos.}^2\psi+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}x\text{Cos.}\psi)\ ;$$

ce qui donne, par soustraction,

$$n^2(h-b\text{Cos.}\psi)=\text{Cos.}\mu\text{Sin.}^3\psi=nc\text{Sin.}^2\psi\ ;$$

c'est-à-dire,

$$n(h-b\text{Cos.}\psi)=c\text{Sin.}^2\psi\ ;$$

d'où

$$n=\frac{c\text{Sin.}^2\psi}{h-b\text{Cos.}\psi}\ .$$

Le problème se trouve donc ainsi réduit aux deux équations assez simples

$$nd\sqrt{n}=\psi+\sqrt{\text{Sin.}^2\psi-n^2f^2}\ ;$$

$$n(h-b\text{Cos.}\psi)=c\text{Sin.}^2\psi\ .$$

119. Cette dernière équation nous apprend à trouver l'une des deux inconnues n et ψ lorsqu'on connaît l'autre, ou lorsqu'on lui suppose une valeur quelconque. Supposons d'abord n connue, et posons, pour abréger,

$$4c^2-4nch+n^2b^2=R^2\ ;$$

nous en déduirons

$$\text{Cos.}\psi=\frac{nb-R}{2c}\ ,\qquad \text{Sin.}^2\psi=\frac{2nch-n^2b^2+nbR}{2c^2}\ ,$$

$$\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\chi=\frac{nb+R}{2c}\ ,\quad \text{Cos.}^2\mu=\frac{2nch-n^2b^2-nbR}{2f^2}\ :$$

On aura ensuite, en supposant le rayon de l'orbite terrestre égal à l'unité.

$$\textit{Distance périhélie}=\frac{1-\text{Sin.}\mu}{n}\ :$$

$$\textit{Distance aphélie}=\frac{1+\text{Sin.}\mu}{n}\ .$$

120. Le cas de la parabole est celui de $n=0$, ce qui donne la distance périhélie égale à $\frac{c(h-b)}{2f^2}$. Dans celui de l'hyperbole, n devient négatif, ce qui donne à Cos.μ une valeur imaginaire ; Sin.μ est alors une quantité très-réelle, mais plus grande que l'unité ; la distance périhélie gardera donc la valeur positive que nous lui supposons dans l'ellipse ; mais la distance aphélie deviendra *négative*.

121. Si les observations sont assez rapprochées pour que l'angle ψ, demi-différence des anomalies excentriques, puisse être confondu avec son sinus, sans erreur sensible, la quatrième de nos équations (115) deviendra

$$nd\sqrt{n}=\text{Sin.}\psi(1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\chi)\ ;$$

ce qui donne, en substituant à Sin.μCos.φ la valeur équivalente (119) $\frac{nb+R}{2c}$, l'équation

$$2ncd\sqrt{n}=(2c+nb+R)\text{Sin.}\psi\ ;$$

et ensuite, en quarrant et mettant (119) pour $\text{Sin.}^2\psi$ sa valeur,

$$8n^2c^4d^2=(2ch-nb^2+bR)(2c+nb+R)^2\ .$$

Le quarré de $2c+nb+R$ devient, en développant

$$8c^2+4nc(b-h)+2n^2b^2+2(2c+nb)R\ ;$$

multipliant cette expression par $2ch=nb^2+bR$, il viendra

$$2(8c^3-4nc^2h+4c^2R)(b+h)\ ;$$

on aura donc l'équation

$$2(8c^3-4nc^2h+4c^2R)(b+h)=8n^2c^4d^2$$

ou

$$(2c-nh+R)(b+h)=n^2c^2d^2$$

d'où

$$R=\frac{n^2c^2d^2}{b+h}-2c+nh\ :$$

élevant au quarré de part et d'autre, il viendra

$$4c^2-4nch+n^2b^2=\frac{n^4c^4d^4}{(b+h)^2}-\frac{2(2c-nh)n^2c^2d^2}{b+h}+(2c-nh)^2$$

ou, en réduisant,

$$b^2=\frac{c^4d^4n^2}{(b+h)^2}-\frac{2c^2d^2(2c-nh)}{b+h}+h^2\ ,$$

d'où

$$\frac{nc^2d^2}{b+h}=-h+\sqrt{b^2+\frac{4c^3d^2}{b+h}}\ ,$$

n est donc déterminée, et conséquemment le problême est résolu.

122. Si le second terme $\frac{4c^3d^2}{b+h}$ est assez petit pour que son quarré puisse être négligé devant le premier terme b^2, le radical deviendra

$b+\frac{2c^3d^2}{b(b+h)}$; on aura donc, pour trouver n, l'expression entièrement rationnelle

$$\frac{nc^2d^2}{b+h}=b-h+\frac{2c^3d^2}{b(b+h)};$$

d'où

$$n=\frac{2cd^2-bf^2}{bd^2}.$$

C'est la formule à laquelle nous avons été conduits, dans le mémoire précédent, en supposant $\text{Sin.}\psi=\psi$, et de plus $\text{Cos.}\psi=1$. La différence entre l'unité et $\text{Cos.}\psi$ n'a pas été négligée dans l'analise actuelle; aussi la formule

$$\frac{nc^2d^2}{b+h}=-h+\sqrt{b^2+\frac{4c^3d^2}{b+h}}$$

doit-elle être regardée comme plus exacte que l'autre. Ainsi donc la solution rigoureuse du problème où il s'agit de determiner le demi-grand axe de l'orbite d'un astre, moyennant deux observations assez rapprochées pour que la demi-différence des deux anomalies excentriques puisse être sensiblement confondue avec son sinus, conduit finalement à une équation très-simple du second degré.

123. Pour voir jusqu'où peut aller la différence entre les deux formules, revenons encore à la seconde comète de Méchain, découverte en 1781, qui nous a déjà fourni l'exemple du mémoire précédent. En faisant usage de l'ancienne formule, nous avons trouvé

$$n=-\tfrac{70871}{20750}=-3,41547;$$

voyons ce que donnera la nouvelle. En faisant usage des observations des 14 et 19 de novembre, nous aurons

$$a=-0,0065710,$$

$$b=+0,1066774,$$

$$c=+0{,}1014968\ ,$$
$$d=+0{,}0441035\ ;$$
$$h=+0{,}1071757\ ;$$
$$b+h=+0{,}2138531\ .$$

On en tire

$$b^2=0{,}011380068\ ,$$
$$\frac{4c^3d^2}{b+h}=0{,}000038040\ .$$

La petitesse de ce second nombre, par rapport au premier, nous fait prévoir que la différence entre les deux résultats sera peu sensible; effectivement, la nouvelle formule donne

$$n=-3{,}41626\ ;$$

la différence est au-dessous d'un *trois millième*; elle sera toujours d'autant moins sensible qu'on aura employé des observations moins éloignées entre elles.

124. Revenons aux deux équations (118) desquelles dépend la solution rigoureuse et générale du problème; savoir:

$$nd\sqrt{n}=\psi+\sqrt{\text{Sin.}^2\psi-n^2f^2}\ ;$$
$$n(h-b\text{Cos.}\psi)=c\text{Sin.}^2\psi\ .$$

Il ne coûtera rien d'éliminer l'inconnue n; il en résultera pour l'autre inconnue ψ une équation transcendante et de plus très-compliquée. Pour éliminer ψ, il faudra employer des moyens approximatifs. En faisant $\psi=\text{Sin.}\psi$, la première équation deviendra $2d\text{Sin.}\psi=(nd^2+f^2)\sqrt{n}$; en combinant cette équation avec l'autre $n(h-b\text{Cos.}\psi)=c\text{Sin.}^2\psi$, on aura, en éliminant les sinus et cosinus de l'angle ψ, une équation en n très-composée du *quatrième* degré, laquelle toutefois pourra être réduite à une équation du second, et ce sera celle que nous avons déjà obtenue (122). En faisant

$$\psi = \frac{14 + \text{Cos.}\psi}{9 + 6\text{Cos.}\psi}\,\text{Sin.}\psi\ ;$$

on aura pour n une équation encore bien plus compliquée du sixième degré.

125. Il est beaucoup plus convenable de s'en tirer par le simple emploi de la règle de fausse position. On supposera à l'angle ψ une valeur quelconque, plus ou moins grande, d'après l'intervalle de temps qui sépare les deux observations. On aura

$$n = \frac{c\,\text{Sin.}^2\psi}{h - b\,\text{Cos.}\psi}\ ;$$

et substituant cette valeur de n dans l'autre

$$nd\sqrt{n} = \psi + \sqrt{\text{Sin.}^2\psi - n^2 f^2}\ ,$$

on aura, par un calcul très-facile, l'erreur que cette fausse position aura produite. Un second emploi de la règle donnera ordinairement l'inconnue n qu'on cherche, avec une précision suffisante.

126. Effectivement, le problème presente peu de difficultés dans le cas de l'ellipse ; mais ce n'est pas le cas ordinaire. En appliquant la méthode exposée dans le précédent mémoire à dix ou douze comètes dont les orbites ont été supposées paraboliques, et calculées dans cette supposition, j'ai presque toujours eu une valeur négative pour n, indice infaillible de l'hyperbole. Il convient donc d'apporter à nos formules les modifications que cette courbe exige.

127. Soient ainsi C le centre ; A le sommet ; F le foyer ; et soit B le point où l'asymptote est rencontrée par la tangente AB au sommet A, ce qui donnera AB=CF. Nous conserverons au demi-axe transverse CA de l'hyperbole la notation qu'il avait dans l'ellipse ; c'est-à-dire, que nous ferons AC$=b$. Et, comme l'autre des deux axes, de même que l'angle désigné jusqu'ici par μ deviennent imaginaires dans l'hyperbole, nous choisirons, parmi les angles réels, celui qui se rapproche le plus de cet angle μ, afin de conserver l'emploi

ploi de cette lettre, et d'établir une analogie convenable entre les formules elliptiques et hyperboliques. Ainsi, nous désignerons l'angle ABC par μ; ce qui donnera

$$AC=b\ ,$$

$$AB=b\,\text{Cot.}\mu\ ;$$

$$BC=CF=b\,\text{Cosec.}\mu\ .$$

L'ordonnée FN, qui répond au foyer de l'hyperbole, dont le double est ce qu'on nomme le paramètre de la courbe, et dont nous aurons besoin par la suite, deviendra donc $b\,\text{Cot.}^2\mu$. L'expression générale du rayon vecteur FM sera

$$FM=\frac{b\,\text{Cos.}\mu\,\text{Cot.}\varphi}{\text{Sin.}\mu+\text{Cos.}\varphi}\ ,$$

en continuant de désigner par φ l'anomalie vraie, ou l'angle AFM.

128. En employant ces notations, on trouvera, pour la surface du secteur curviligne AFM, proportionnelle au temps, l'expression qui suit :

$$2AFM=\frac{b^2\text{Cot.}^2\mu\,\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi+\text{Sin.}\mu}-b^2\text{Cot.}\mu\,\text{Log.}\frac{1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}\varphi+\text{Cos.}\mu\,\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi+\text{Sin.}\mu}\ .$$

Si, dans cette expression, on fait

$$x=\text{Log.}\frac{1+\text{Sin.}\mu\,\text{Cos.}\varphi+\text{Cos.}\mu\,\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi+\text{Sin.}\mu}\ ,$$

elle deviendra

$$2AFM=AB\,.\,BC\,.\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}-AC\,.\,AB\,.\,x\ ;$$

et si, dans cette dernière, on fait $AC=a$, $BC=c$, et que de plus on remplace AB et x par ib et ix, i étant $\sqrt{-1}$, on retrouvera la formule elliptique connue

$$2AFM=abx-bc\,\text{Sin.}x\ ;$$

l'anomalie excentrique de l'ellipse sera donc remplacée ici par le logarithme naturel de la fraction

$$\frac{1+\text{Sin.}\mu\text{Cos.}\varphi+\text{Cos.}\mu\text{Sin.}\varphi}{\text{Cos.}\varphi+\text{Sin.}\mu} .$$

On sent, au surplus, que, dans l'hyperbole de même que dans la parabole, l'anomalie vraie φ, de même que l'excentrique $\varkappa$, est toujours comptée depuis le périhélie.

129. Il conviendra de choisir quelque signe représentatif des deux fractions $\frac{e^{\varkappa}+e^{-\varkappa}}{2}$ et $\frac{e^{\varkappa}-e^{-\varkappa}}{2}$, analogues à *Cos.*$\varkappa$ et *Sin.*$\varkappa$. Nous conserverons ces deux notations, mais en les écrivant, comme nous venons de le faire, en caractères *italiques*. Ainsi, au lieu de $\text{Cos.}^2\varkappa+\text{Sin.}^2\varkappa=1$, nous aurons dorénavant

$$Cos.^2\varkappa-Sin.^2\varkappa=1 .$$

Nous aurons de même

$$Cos.^2\varkappa+Sin.^2\varkappa=Cos.2\varkappa ,$$

$$2Cos.^2\varkappa=Cos.2\varkappa+1 ,$$

$$2Sin.^2\varkappa=Cos.2\varkappa-1 ,$$

$$2Cos.\varkappa Sin.\varkappa=Sin.2\varkappa .$$

Indépendamment des caractères italiques, les notations *Cos.*$\varkappa$ et *Sin.*$\varkappa$ seront toujours reconnaissables en ce que, dans toute cette analise des orbites hyperboliques, elles seront invariablement liées avec les angles $\varkappa$ et $\varkappa'$, de même qu'avec leur demi-somme et leur demi-différence, et jamais avec l'excentricité μ, ni avec les anomalies vraies φ et φ'.

130. Le développement en séries donne

$$Cos.\varkappa=1+\frac{\varkappa^2}{1.2}+\frac{\varkappa^4}{1.2.3.4}+\frac{\varkappa^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\ldots$$

$$Sin.\varkappa=\frac{\varkappa}{1}+\frac{\varkappa^3}{1.2.3}+\frac{\varkappa^5}{1.2.3.4.5}+\frac{\varkappa^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots$$

Ces deux séries connues sont décomposables en facteurs infinis. On voit que $Cos.\varkappa$ et $\frac{Sin.\varkappa}{\varkappa}$ sont toujours plus grands que l'unité, tandis que $\mathrm{Cos.}\varkappa$ et $\frac{\mathrm{Sin.}\varkappa}{\varkappa}$ étaient constamment moindres que l'unité. Heureusement, de nos trois sections coniques, l'hyperbole est la moins fréquente dans ses applications, sans quoi il faudrait construire des tables de $Cos.\varkappa$ et $Sin.\varkappa$, comme nous en avons pour $\mathrm{Cos.}\varkappa$ $\mathrm{Sin.}\varkappa$.

131. En introduisant deux angles quelconques $\varkappa$ et $\varkappa'$, indépendans entre eux, on aura les expressions qui suivent

$$Sin.(\varkappa'+\varkappa)=Sin.\varkappa'Cos.\varkappa+Cos.\varkappa'Sin.\varkappa\ ,$$

$$Sin.(\varkappa'-\varkappa)=Sin.\varkappa'Cos.\varkappa-Cos.\varkappa'Sin.\varkappa\ ,$$

$$Cos.(\varkappa'+\varkappa)=Cos.\varkappa'Cos.\varkappa+Sin.\varkappa'Sin.\varkappa\ ,$$

$$Cos.(\varkappa'-\varkappa)=Cos.\varkappa'Cos.\varkappa-Sin.\varkappa'Sin.\varkappa\ ;$$

d'où il résulte

$$2Sin.\varkappa'Cos.\varkappa=Sin.(\varkappa'+\varkappa)+Sin.(\varkappa'-\varkappa)\ ,$$

$$2Cos.\varkappa'Sin.\varkappa=Sin.(\varkappa'+\varkappa)-Sin.(\varkappa'-\varkappa)\ ,$$

$$2Cos.\varkappa'Cos.\varkappa=Cos.(\varkappa'+\varkappa)+Cos.(\varkappa'-\varkappa)\ ,$$

$$2Sin.\varkappa'Sin.\varkappa=Cos.(\varkappa'+\varkappa)-\mathrm{Cos.}(\varkappa'-\varkappa)\ .$$

132. De l'anomalie excentrique $\varkappa$, on repassera facilement à l'anomalie vraie que lui répond; on aura

$$\mathrm{Sin.}\varphi=\frac{\mathrm{Cos.}\mu\, Sin.\varkappa}{Cos.\varkappa-\mathrm{Sin.}\mu}\ ,\qquad \mathrm{Cos.}\varphi=\frac{1-\mathrm{Sin.}\mu\, Cos.\varkappa}{Cos.\varkappa-\mathrm{Sin}\,\mu}\ .$$

On aura de même le rayon vecteur FM par la formule

$$\frac{r}{b}=\frac{Cos.\varkappa-\mathrm{Sin.}\mu}{\mathrm{Sin.}\mu}=\frac{Cos.\varkappa}{\mathrm{Sin.}\mu}-1\ ;$$

enfin, la surface du secteur AFM se trouvera, par la formule très-simple

$$2AFM - b^2\mathrm{Cos.}\mu(\mathrm{Cosec.}\mu\mathit{Sin.}\varkappa - \varkappa).$$

133. Les deux expressions littérales de P, Q, de même que de P', Q', subiront les modifications suivantes : on aura

$$P = \frac{r}{b}\mathrm{Cos.}(\iota+\varphi) = \frac{\mathit{Cos.}\varkappa - \mathrm{Sin.}\mu}{\mathrm{Sin.}\mu}\mathrm{Cos.}(\iota+\varphi),$$

$$Q = \frac{r}{b}\mathrm{Sin.}(\iota+\varphi) = \frac{\mathit{Cos.}\varkappa - \mathrm{Sin.}\mu}{\mathrm{Sin.}\mu}\mathrm{Sin.}(\iota+\varphi);$$

ce qui se réduit à

$$P = \mathrm{Cosec.}\mu\mathrm{Cos.}\iota - \mathit{Cos.}\varkappa\,\mathrm{Cos.}\iota - \mathrm{Cos.}\mu\mathit{Sin.}\varkappa\mathrm{Sin.}\iota,$$

$$Q = \mathrm{Cosec.}\mu\mathrm{Sin.}\iota - \mathit{Cos.}\varkappa\,\mathrm{Cos.}\iota + \mathrm{Cos.}\mu\mathit{Sin.}\varkappa\mathrm{Cos.}\iota,$$

$$P' = \mathrm{Cosec.}\mu\mathrm{Cos.}\iota - \mathit{Cos.}\varkappa'\mathrm{Cos.}\iota - \mathrm{Cos.}\mu\mathit{Sin.}\varkappa'\mathrm{Sin.}\iota,$$

$$Q' = \mathrm{Cosec.}\mu\mathrm{Sin.}\iota - \mathit{Cos.}\varkappa'\mathrm{Cos.}\iota + \mathrm{Cos.}\mu\mathit{Sin.}\varkappa'\mathrm{Cos.}\iota,$$

$$R = \mathrm{Cosec.}\mu.\mathit{Cos.}\varkappa - 1,$$

$$R' = \mathrm{Cosec.}\mu.\mathit{Cos.}\varkappa' - 1;$$

134. Les expressions $R - R'$, $PQ' - P'Q$, $RR' - PP' - QQ'$ subissent de même quelques modifications, exposées dans le tableau qui suit :

$$R - R' = \mathrm{Cosec.}\mu(\mathit{Cos.}\varkappa - \mathit{Cos.}\varkappa').$$

$$(PQ' - P'Q)\mathrm{Sin.}^2\mu = \mathrm{Cos.}\mu(\mathit{Sin.}\varkappa' - \mathit{Sin.}\varkappa) - \mathrm{Sin.}\mu\mathrm{Cos.}\mu\mathit{Sin.}(\varkappa' - \varkappa);$$

$$RR' - PP' - QQ' = \mathrm{Cos.}^2\mu\mathit{Cos.}(\varkappa' - \varkappa) - \mathrm{Cos.}^2\mu.$$

A l'exemple de l'ellipse, nous désignerons par χ et ψ la demi-somme et la demi-différence des deux anomalies excentriques fictives $\varkappa'$ et $\varkappa$. On aura ainsi

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa' + \varkappa = 2\chi, \\ \varkappa' - \varkappa = 2\psi; \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} \varkappa' = \chi + \psi, \\ \varkappa = \chi - \psi. \end{array}\right.$$

Comme les angles χ et ψ se rapportent aux anomalies excentriques

$\varkappa$ et $\varkappa'$, les notations $Sin.x$, $Cos.\,x$, $Sin.\psi$, $Cos.\psi$ continueront d'être prises dans le sens du n.° 129. On aura

$$R'-R=2\text{Cosec.}\mu Sin.x Sin.\psi\ ,$$

$$(PQ'-P'Q)\text{Sin.}^2\mu=2\text{Cos.}\mu Sin.\psi(Cos.x-\text{Sin.}\mu Cos.\psi)\ ,$$

$$RR'-PP'-QQ'=2\text{Cos.}^2\mu Sin.^2\psi\ .$$

En comparant ces équations à celles de l'analise précédente (*Annales*, tome IV, pag. 247, et tom. V, pag. 18) on voit qu'en divisant généralement par $\text{Sin.}^2\mu$ les expressions elliptiques, on parvient à celles de l'hyperbole.

135. A ces trois équations, il convient d'ajouter la quatrième, qui tient à la surface du secteur hyperbolique, proportionnelle au temps. On a eu (132)

$$2\text{AFM}=b^2\text{Cos.}\mu(\text{Cosec.}\mu Sin\varkappa-\varkappa)\ ;$$

on aura de même, pour une seconde observation

$$2\text{AFM}'=b^2\text{Cos.}\mu(\text{Cosec.}\mu Sin.\varkappa'-\varkappa')\ .$$

Otant la première de la seconde, il résultera

$$2\text{MFM}'=2b^2\text{Cos.}\mu(\text{Cosec.}\mu Cos.x Sin.\psi-\psi)\ .$$

La surface de ce secteur est proportionnelle au temps qui sépare les deux observations, c'est-à-dire, à l'angle $\theta'-\theta$; reste donc à déterminer le facteur par lequel il faut multiplier l'une de ces deux quantités, pour que le produit soit rigoureusement égal à l'autre.

136. Concevons généralement deux astres, tournant autour du même centre de forces dans deux sections coniques, dont les paramètres soient $2p$, $2p'$; les lettres p, p' désigneront ainsi les ordonnées des deux sections, à leurs foyers respectifs. Supposons de plus que l'un de ces deux astres décrive le secteur A dans le temps T, et l'autre le secteur A' dans le temps T'. On sait qu'alors les deux fractions $\frac{A}{T\sqrt{p}}$ et $\frac{A'}{T'\sqrt{p'}}$ seront égales entre elles.

Ainsi, dans le cas $T=T'$, les aires A, A' étant supposées décrites dans des temps égaux, on aura la proportion, très-générale, $A:A'=\sqrt{p}:\sqrt{p'}$; c'est-à-dire, les aires des secteurs sont entre elles comme les racines quarrées des paramètres des deux orbites.

137. Appliquons cette proportion à l'analise qui nous occupe. L'un des deux astres est la terre, décrivant, sur un cercle du rayon a, l'angle au centre $\theta'-\theta$. Le demi-paramètre est ici a; et la surface du secteur est $\frac{1}{2}a^2(\theta'-\theta)$. L'autre est une hyperbole dont le demi-axe transverse est b, la distance du foyer au centre $b\text{Cosec.}\mu$, et le demi-paramètre $b\text{Cos.}^2\mu$. Cette comète aura donc décrit, dans le temps même qui sépare les deux observations, l'aire MFM', dont nous venons de donner l'expression littérale. Cela donne la proportion

$$\tfrac{1}{2}a^2(\theta'-\theta):\text{MFM}'=\sqrt{a}:\sqrt{b}\,.\,\text{Cos.}\mu\ ,$$

d'où résulte l'égalité

$$a\sqrt{ab}(\theta'-\theta)\text{Cos.}\mu=2\text{MFM}'\ ;$$

ou bien

$$(\theta'-\theta)a\sqrt{a}=(\text{Cosec.}\mu\,Cos.\chi\,Sin.\psi-\psi)2b\sqrt{b}\ .$$

138. De même que, dans les problèmes précédens, nous devons nous rappeler que la fraction $\frac{b}{a}$, qui multiplie P, P', Q, Q', dans les formules du n.° 55 (*Annales*, tom. IV, pag. 245), est elle-même une de nos inconnues. En faisant, comme ci-dessus, $\frac{a}{b}=n$, et en conservant les notations

$$P=nM\ ,\quad Q=nN\ ,\quad R=nO\ ;$$
$$P'=nM'\ ,\quad Q'=nN'\ ,\quad R'=nO'\ ;$$

les quantités M, N, O, M', N', O', seront celles qu'on aura déduites immédiatement des formules du n.° 55, lesquelles, au signe près, sont identiquement les mêmes dans l'ellipse et dans l'hyperbole. Ces quantités pourront être regardées comme connues; tandis qu'il faudra regarder comme inconnues la fraction $\frac{a}{b}=n$, aussi bien que $\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}=n\sqrt{n}$.

139. Nos quatre équations deviendront ainsi

$$n(O'-O)=2\text{Cosec.}\mu Sin.\chi Sin.\psi \ ;$$

$$n^2(MN'-M'N)\text{Sin.}^2\mu=2\text{Cos.}\mu Sin.\psi(Cos.\chi-\text{Sin.}\mu Cos.\psi) \ ,$$

$$n^2(OO'-MM'-NN')=2\text{Cos.}^2\mu Sin.^2\psi \ ,$$

$$n\sqrt{n}(\theta'-\theta)=2\text{Cosec.}\mu Cos.\chi Sin.\psi-2\psi \ .$$

140. En conséquence, en revenant aux notations déjà employées dans les mémoires précédens (*Annales*, tom. V, pag. 18), savoir:

$$2a=O'-O \ ,$$

$$2b=MN'-M'N \ ,$$

$$2c^2=OO'-MM'-NN' \ ,$$

$$2d=\theta'-\theta \ ;$$

le problème sera facilement réduit aux quatre équations qui suivent:

$$n\,a=\text{Cosec.}\mu Sin.\chi Sin.\psi \ ,$$

$$n^2b=\text{Cosec.}^2\mu\text{Cos.}\mu Sin.\psi(Cos.\chi-\text{Sin.}\mu Cos.\psi) \ ;$$

$$n\,c=\text{Cot.}\mu Sin.\psi \ ,$$

$$nd\sqrt{n}=\text{Cosec.}\mu Cos.\chi Sin.\psi-\psi \ :$$

141. En suivant une marche analogue à celle qui a été enseignée au commencement de ce *quatrième* mémoire, et en se rappelant, pour les réductions, que $Cos.^2\psi-Sin.^2\psi=1$, on parviendra de même à réduire ces quatre équations à deux, ne renfermant plus que les deux inconnues n et ψ, savoir :

$$nd\sqrt{n}=\sqrt{Sin.^2\psi+n^2f^2}-\psi \ ;$$

$$n=\frac{cSin.^2\psi}{h-bCos.\psi} \ .$$

142. Cette dernière est identiquement la même que dans l'ellipse

(118), même en ayant égard aux signes. La première diffère de celle qui a été obtenue pour l'ellipse dans le signe de l'angle ψ, et de plus dans celui de n^2f^2, compris sous le radical. On les résoudra de la même manière ; et deux emplois de la règle de fausse position y suffiront. Une valeur quelconque de ψ qu'on aura supposée, conduira immédiatement à n ; et substituant cette valeur dans la première, on s'assurera de l'erreur que cette supposition aura occasionée. Mais il ne faut pas oublier qu'il est question ici de *sinus* et de *cosinus* hyperboliques, pour lesquels on a

$$2Cos.\psi=e^{\psi}+e^{-\psi}\;,\quad 2Sin.\psi=e^{\psi}-e^{-\psi}\;.$$

En employant les sinus et les cosinus des tables qui nous ont conduit (118) aux deux équations finales

$$nd\sqrt{n}=\psi+\sqrt{\text{Sin.}^2\psi-n^2f^2}\;,$$
$$n(h-b\text{Cos.}\psi)=c\text{Sin.}\psi\;,$$

on aurait beau faire pour ψ toutes les suppositions imaginables, aucune valeur réelle ne pourrait y satisfaire, attendu que, dans l'hyperbole, la valeur de cet angle est réellement imaginaire.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Recherches sur le développement numérique des fonctions que M. Kramp a dénotées par Λ et Γ, dans son Arithmétique universelle *;*

Par M. Argand.

1. L'emploi fréquent dont les fonctions désignées par M. Kramp par Λ et Γ sont susceptibles, est sans doute un motif pour chercher à en étendre la théorie. L'objet particulier de cet écrit est de recueillir quelques résultats tendant à faciliter la détermination numérique de la valeur de ces fonctions, lorsque la variable est donnée.

2.

2. La fonction désignée par Λ (*Arith. univ.* n.° 560) est

$$\Lambda n = B_1 n + B_2 n^2 + B_4 n^4 + B_6 n^6 + \ldots\ldots \qquad (A)$$

B_1, B_2, B_4, ... étant les nombres de Bernouilli ; et on a le théorème suivant (*ibid.* n.° 573)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+r}+\frac{1}{a+2r}+\ldots\ldots+\frac{1}{a+(p-1)r}=\frac{1}{r}\left\{\text{Log.}\frac{a+pr}{a}+\Lambda\frac{r}{a}-\Lambda\frac{r}{a+pr}\right\} ;$$

faisant $\frac{r}{a}=n$, on obtient

$$1+\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1+2n}+\ldots+\frac{1}{1+(p-1)n}=\frac{1}{n}\left\{\text{Log.}(1+pn)+\Lambda n-\Lambda\frac{n}{1+pn}\right\}. \quad (B)$$

On tire de cette dernière équation, en faisant $n=1$,

$$\text{Log.}(1+p)=\Lambda\frac{1}{1+p}-\Lambda 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{p}\right) ; \qquad (C)$$

Mettons $1+n$ pour n dans l'équation (B), et nous aurons, en isolant $\Lambda(1+n)$,

$$\Lambda(1+n)=(1+n)\left\{1+\frac{1}{2+n}+\frac{1}{3+2n}+\ldots+\frac{1}{p+(p-1)n}\right\}$$
$$-\text{Log.}(1+p+pn)+\Lambda\frac{1+n}{1+p+pn} ; \qquad (D)$$

or ;

$$1+p+pn=(1+p)(1+n)-n=(1+p)(1+n)\left\{1-\frac{n}{(1+p)(1+n)}\right\} ;$$

donc, en employant la valeur de Log.$(1+p)$, (C),

$$\text{Log.}(1+p+pn)=\Lambda\frac{1}{1+p}-\Lambda 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{p}\right)$$
$$+\text{Log.}(1+n)+\text{Log.}\left[1-\frac{n}{(1+p)(1+n)}\right].$$

Réduisant les fractions de (D) en séries, procédant suivant les puissances positives de n, et substituant la valeur que nous venons de trouver pour Log. $(1+p+pn)$, nous aurons

$$\begin{array}{l}
\Lambda(1+n)=\Lambda 1-\text{Log.}\left[1-\frac{n}{(1+p)(1+n)}\right]-\Lambda\frac{1}{1+p} \\
\quad +1+n\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ -1 \\
\quad +\frac{1}{2}-\frac{n}{4}+\frac{n^2}{8}-\frac{n^3}{16}+\ldots\ldots-\frac{1}{2} \\
\qquad +\frac{n}{2}-\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{8}-\ldots\ldots \\
\quad +\frac{1}{3}-\frac{2n}{9}+\frac{4n^2}{27}-\frac{8n^3}{81}+\ldots\ldots-\frac{1}{3} \\
\qquad +\frac{n}{3}-\frac{2n^2}{9}+\frac{4n^3}{27}-\ldots\ldots \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{1}{p}-\frac{(p-1)n}{p^2}+\frac{(p-1)^2n^2}{p^2}-\frac{(p-1)^3n^3}{p^4}+\ldots\ldots-\frac{1}{p} \\
\quad +\frac{n}{p}-\frac{(p-1)n^2}{p^2}+\frac{(p-1)^2n^3}{p^3}-\ldots\ldots \\
\quad -n+\frac{n^2}{2}-\frac{n^3}{3}+\ldots\ldots
\end{array}$$

p étant arbitraire, faisons-le infini ; $\text{Log.}\left[1-\frac{n}{(1+p)(1+n)}\right]$ et $\Lambda\frac{1}{1+p}$ disparaîtront, et il restera

$$\Lambda(1+n)=\Lambda 1+n(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\ldots)+n^2(+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}-\tfrac{2}{27}-\tfrac{3}{64}-\ldots)$$
$$+n^3(-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{4}{81}+\ldots)+n^4(+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{32}-\ldots)+\ldots\ ;$$

équation que nous écrirons ainsi :

$$\Lambda(1+n)=\Lambda 1+\lambda_1 n+\lambda_2 n^2+\lambda_3 n^3+\ldots\ldots \qquad \text{(E)}$$

3. Or, si l'on fait

$$S_\varepsilon=1+\frac{1}{2^\varepsilon}+\frac{1}{3^\varepsilon}+\frac{1}{4^\varepsilon}+\ldots\ldots\ ;$$

ε étant employé comme indice général, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1=-1+S_2\ ;\\ \lambda_2=+\frac{1}{2}-S_2+S_3\ ,\\ \lambda_3=-\frac{1}{3}+S_2-2S_3+S_4\ ;\\ \lambda_4=+\frac{1}{4}-S_2+3S_3-3S_4+S_5\ ,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\end{array}\right\}\quad(F)$$

or, les séries S_2, S_3, ... sont sommables (*Introd.* d'Euler. *Arith. univ.* n.° 599) ; on peut donc déterminer les valeurs numériques des coefficiens λ_1, λ_2, ...

On tire des équations précédentes

$$\lambda_2=-\frac{1}{2}+S_3-\lambda_1\ ;$$
$$\lambda_3=-\frac{1}{3}+S_4-(\lambda_1+2\lambda_2)\ ,$$
$$\lambda_4=-\frac{1}{4}+S_5-(\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3)\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

formules qu'on peut employer à vérifier le calcul fait par les équations (F).

Observons que, si l'on fait, en général, $T_s=S_s-1$, on pourra substituer T à S dans les équations (F), excepté dans la première.

4. Quant à $\Lambda 1$ on peut le calculer par la formule (C), en prenant pour p un nombre assez grand pour qu'en développant $\Lambda\frac{1}{1+p}$ par la formule primitive (A), on n'ait pas à craindre l'effet de l'augmentation progressive des nombres de Bernouilli.

On peut aussi faire $n=-1$ dans (E), ce qui donne

$$\Lambda 1=\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4+\ldots\ldots\ ;\qquad (G)$$

enfin, on peut encore employer la formule

$$\Lambda 1=1-\text{Log}.2+\frac{T_2}{2}-\frac{T_3}{3}+\frac{T_4}{4}-\ldots\ldots\ ;\qquad (H)$$

pour vérifier les résultats précédens. Leur conformité servira d'ailleurs à garantir la justesse des valeurs employées pour T_2, T_3, ...

Cette dernière équation se tire de la formule (B)) qui donne, en faisant $p=1$,

$$1=\frac{1}{n}\left\{\text{Log.}(1+n)+\Lambda n-\Lambda\frac{n}{n+1}\right\} \qquad \text{(I)}$$

d'où l'on tire, en mettant $\frac{1}{n}$ pour n

$$\Lambda\frac{1}{n}=\Lambda\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\text{Log.}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Faisons successivement $n=1, 2, 3, \ldots$; il viendra

$$\Lambda 1=\Lambda\tfrac{1}{2}+1-\text{Log.}2,$$
$$\Lambda\tfrac{1}{2}=\Lambda\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}-\text{Log.}(1+\tfrac{1}{2}),$$
$$\Lambda\tfrac{1}{3}=\Lambda\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\text{Log.}(1+\tfrac{1}{3}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où résultera, en prenant la somme de ces équations;

$$\Lambda 1=1-\text{Log.}2+\tfrac{1}{2}-\text{Log.}(1+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{3}-\text{Log.}(1+\tfrac{1}{3})+\ldots;$$

et en développant les logarithmes, excepté celui de 2,

$$\begin{aligned}\Lambda 1=1-\text{Log.}2&+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2^2}-\frac{1}{3.2^3}+\ldots\\&+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2.3^2}-\frac{1}{3.3^3}+\ldots\\&+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2.4^2}-\frac{1}{3.4^3}+\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

en sommant les séries verticales. on obtient l'équation (H).

5. Or, les valeurs de $\Lambda 1$, λ_1, λ_2, λ_3 ..... présentent la série suivante, singulière par son irrégularité, tant dans la succession des valeurs absolues, que dans celles des signes:

$$\begin{array}{ll}
\Lambda_1 = +0{,}5772156649 0\ , & \lambda_8 \;= -0{,}0000576677.\ , \\
\lambda_1 = +0{,}6449340668 5\ , & \lambda_9 \;= +0{,}0000121980.\ , \\
\lambda_2 = +0{,}0571228363 1\ , & \lambda_{10} = +0{,}000003454..\ , \\
\lambda_3 = -0{,}0101898390 9\ , & \lambda_{11} = -0{,}000006295..\ , \\
\lambda_4 = +0{,}0011946966 4\ , & \lambda_{12} = +0{,}000004948..\ , \\
\lambda_5 = +0{,}0002778979.\ , & \lambda_{13} = -0{,}000002950..\ , \\
\lambda_6 = -0{,}0003037026.\ , & \lambda_{14} = +0{,}00000141...\ , \\
\lambda_7 = +0{,}0001565295.\ , & \lambda_{15} = -0{,}00000047...\ ,
\end{array}$$

Faisons $\lambda_\varepsilon = (-1)^\varepsilon \mu_\varepsilon$, ce qui revient à changer les signes des λ à indices impairs ; nous aurons, par les formules (F),

$$\mu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - \left\{ S_2 - \frac{\varepsilon-1}{1} S_3 + \frac{\varepsilon-1}{1} \cdot \frac{\varepsilon-2}{2} S_4 - \frac{\varepsilon-1}{1} \cdot \frac{\varepsilon-2}{2} \cdot \frac{\varepsilon-3}{3} S_5 + \ldots \right\}.$$

Or, la série entre les accolades est toujours positive ; car, en la désignant par U_ε, et en développant les S pour lesquels on peut prendre les T (n.°3), on aura

$$\begin{array}{llll}
U_{\varepsilon+1} = \dfrac{1}{4} & + \dfrac{1}{9} & + \dfrac{1}{16} & + \ldots \\[2ex]
\quad - \dfrac{\varepsilon}{8} & - \dfrac{\varepsilon}{27} & - \dfrac{\varepsilon}{64} & - \ldots \\[2ex]
\quad + \dfrac{\varepsilon}{1} \cdot \dfrac{\varepsilon-1}{2} \cdot \dfrac{1}{16} & + \dfrac{\varepsilon}{1} \cdot \dfrac{\varepsilon-1}{2} \cdot \dfrac{1}{81} & + \dfrac{\varepsilon}{1} \cdot \dfrac{\varepsilon-1}{2} \cdot \dfrac{1}{243} & + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots ;
\end{array}$$

et, en sommant verticalement

$$U_{\varepsilon+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^\varepsilon + \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^\varepsilon + \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^\varepsilon + \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

On voit que les valeurs de U_ε vont toujours en diminuant, et on peut même déterminer un indice $\varepsilon+1$ tel que $U_{\varepsilon+1}$ soit plus petit qu'une limite donnée L. Pour cela, soit partagée cette limite en deux parties arbitraires $L' + L'' = L$. Un terme quelconque de (I) est plus petit que le terme correspondant de la série $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$; mais la somme de celle-ci est finie, donc on peut prendre dans (I) un terme $\frac{1}{(z+1)^2} \cdot \left(\frac{z}{z+1}\right)^\varepsilon$, tel que la somme de tous les termes suivans soit plus petite que L' quel que soit ε. Le quantième z étant ainsi déterminé, on pourra prendre ε de manière que la somme des premiers termes

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^\varepsilon + \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^\varepsilon + \ldots\ldots + \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \left(\frac{z}{z+1}\right)^\varepsilon$$

soit plus petite que L''; car il est visible que, ε augmentant, cette somme décroît plus rapidement que celle des termes d'une progression géométrique qui aurait $\frac{z}{z+1}$ pour raison.

On peut conclure de là que la série des μ ou des λ est convergente, mais la convergence est bien plus rapide qu'elle ne paraîtrait devoir l'être en raison des considérations sur lesquelles la démonstration précédente est appuyée.

Les signes de $\mu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - U_\varepsilon$ présentent cette succession :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	....
$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	....
					*				*						

Or, les valeurs absolues de μ_ε décroissant beaucoup plus rapidement que celles de $\frac{1}{\varepsilon}$, il paraît que la valeur de U_ε oscille, pour ainsi dire, autour de celle de $\frac{1}{\varepsilon}$, en la serrant toujours de plus près, et qu'il y a quelque chose de circulaire dans le caractère des coefficiens μ, considérés comme fonctions de leurs indices. Observons qu'il y a augmentation dans la valeur de deux μ consécutifs, aux endroits marqués * ; savoir, à l'exception de μ_2 et μ_3, aux deux premiers termes qui suivent chaque changement de signe. Nous retrouverons cette même circonstance dans le développement de la fonction Γ ; et ce qui confirmerait le soupçon que nous élevons ici sur la nature des coefficiens μ, c'est la possibilité de trouver des fonctions circulaires qui présentent le même genre d'irrégularité dans la succession des valeurs et des signes. Soit, par exemple,

$$y_x = \frac{10^5 . \mathrm{Sin.}\left\{\frac{3x-2}{12}\varpi\right\}}{2^x . (3x+1)}.$$

En faisant successivement $x=0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$; on trouvera pour y les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{cccccccccccc} 50000, & 3235, & 3093, & 1207, & 240, & 51, & 71, & 34, & 8, & 2, & 3, & 1. \\ - & + & + & + & + & - & - & - & - & + & + & + \\ & & & & & * & & & & * & & \end{array}$$

série qui offre des particularités analogues à celle de la série des μ.

6. La formule primitive (A) donne, en vertu de $B_1=\frac{1}{2}$,

$$\Lambda(-n)=\Lambda n-n\,; \qquad \text{ou} \qquad \Lambda n=n+\Lambda(-n).$$

Faisant cette substitution dans (I), il vient

$$0=\mathrm{Log.}(1+n)+\Lambda(-n)-\Lambda\frac{n}{1+n}.$$

Mettant $n-1$ pour n et transposant, on obtient

$$\Lambda(1-n)=-\mathrm{Log.}n+\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right); \qquad \text{(K)}$$

et, en développant $\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)$ par la formule (E)

$$\Lambda(1-n)=\Lambda 1-\mathrm{Log.}n-\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n^2}-\frac{\lambda_3}{n^3}+\ldots\ldots$$

au moyen de quoi on peut avoir promptement la fonction Λ d'un nombre négatif très-grand.

Si l'on met $n-1$ pour n dans (I) on obtiendra

$$\Lambda(n-1)=n-1-\text{Log}.n+\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right);$$

et, par le développement de $\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)$,

$$\Lambda(n-1)=n-\text{Log}.n-1+\Lambda 1-\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n^2}-\frac{\lambda_3}{n^3}+\ldots\ldots$$

formule propre à calculer la fonction Λ d'un très-grand nombre positif.

7. Si l'on développe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, dans la formule (E), on aura

$$\begin{aligned}\Lambda(1+n)=\Lambda 1-n &+nS_2\\ &+\frac{n^2}{2}-n^2S_2+n^2S_3\\ &-\frac{n^3}{3}+n^3S_2-2n^3S_3+n^3S_4\\ &+\frac{n^4}{4}-n^4S_2+3n^4S_3-3n^4S_4+n^4S_5\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ =\Lambda_1-\text{Log}.(1+n)&+\frac{n}{1+n}S_2+\left(\frac{n}{1+n}\right)^2S_3+\left(\frac{n}{1+n}\right)^3S_4+\ldots;\end{aligned}$$

En mettant $\frac{1}{n-1}$ pour n, on tirera de cette équation

$$\Lambda\frac{n}{n-1}-\Lambda 1+\text{Log}.\frac{n}{n-1}=\frac{S_2}{n}+\frac{S_3}{n^2}+\frac{S_4}{n^3}+\ldots\ldots;$$

et, en faisant n négatif,

$$\Lambda\frac{n}{n+1}-\Lambda 1+\text{Log}.\frac{n}{n+1}=-\frac{S_2}{n}+\frac{S_3}{n^2}-\frac{S_4}{n^3}+\ldots\ldots;$$

La

La différence de ces deux équations donne

$$\Lambda\frac{n}{n-1}+\text{Log.}\frac{n}{n-1}-\Lambda\frac{n}{n+1}-\text{Log.}\frac{n}{n+1}=2\left(\frac{S_2}{n}+\frac{S_4}{n^3}+\frac{S_6}{n^5}+\ldots\right)$$

Mais on sait d'ailleurs (*Introd.* d'Euler, n.° 179) que le second membre de cette dernière équation est la valeur de $n-\varpi\text{Cot.}\frac{\varpi}{n}$; donc

$$\Lambda\frac{n}{n-1}+\text{Log.}\frac{n}{n-1}-\Lambda\frac{n}{n+1}-\text{Log.}\frac{n}{n+1}=n-\varpi\text{Cot.}\frac{\varpi}{n}\ .$$

On peut réunir Λ et Log. dans une seule fonction M en posant généralement

$$\text{M}x=\Lambda x+\text{Log.}x\ ;$$

l'équation précédente prend alors la forme plus simple

$$\text{M}\frac{n}{n-1}-\text{M}\frac{n}{n+1}=n-\varpi\text{Cot.}\frac{\varpi}{n}\ .$$

On aura d'ailleurs, en reprenant l'expression de U_1 (n.° 5),

$$\text{M}(1+n)=\Lambda 1+U_1n-U_2n^2+U_3n^3-\ldots\ldots$$

8. La fonction Γ est (*Arith. univ.* n.° 601)

$$\Gamma n=B_2n+\frac{B_4n^3}{3}+\frac{B_6n^5}{5}+\frac{B_8n^7}{7}+\ldots\ldots\ ;$$

et on a (*Ibid.* n.° 603) le théorème général

$$\left.\begin{array}{l}\text{Log.}\{1(1+n)(1+2n)\ldots.[1+(p-1)n]\}=\\ -p+\left(\frac{1}{n}+p-\frac{1}{2}\right)\text{Log.}(1+pn)+\Gamma\frac{n}{1+pn}-\Gamma n\ :\end{array}\right\}\quad(\text{L}).$$

En faisant

$$\Gamma(1+n)=\Gamma 1+\gamma_1n+\gamma_2n^2+\gamma_3n^3+\gamma_4n^4+\ldots.\ ,\qquad(\text{M})$$

on pourrait, au moyen du théorème précédent, déterminer les coefficiens γ_1, γ_2, γ_3, ... par une méthode analogue à celle du n.° 2 ; mais le calcul est prolixe, et il est plus simple de les faire dépendre des coefficiens λ_1, λ_2, λ_3, ..., en employant la relation

$$n^2 \mathrm{d}(\Gamma n) = (\Lambda n - B_1 n)\mathrm{d}n$$

qui existe entre ces fonctions. On trouve alors

$$\left.\begin{array}{l}
\gamma_1 = \Lambda 1 - \frac{1}{2} \qquad\qquad = + \Lambda 1 - \frac{1}{2} \,, \\
2\gamma_2 = \lambda_1 - \frac{1}{2} - 2\gamma_1 = -2\Lambda 1 + \frac{1}{2} + \lambda_1 \,, \\
3\gamma_3 = \lambda_2 - \gamma_1 - 4\gamma_2 = +3\Lambda 1 - \frac{1}{2} - 2\lambda_1 + \lambda_2 \,, \\
4\gamma_4 = \lambda_3 - 2\gamma_2 - 6\gamma_3 = -4\Lambda 1 + \frac{1}{2} + 3\lambda_1 - 2\mu_2 + \lambda_3 \,, \\
5\gamma_5 = \lambda_4 - 3\gamma_3 - 8\gamma_4 = +5\Lambda 1 - \frac{1}{2} - 4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 \,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} (N)$$

La méthode directe du n.° 2 donnerait

$$\begin{array}{l}
\gamma_1 = + \Lambda 1 - \frac{1}{2} \,, \\
2\gamma_2 = -2\Lambda 1 + T_2 + \frac{3}{2} - 2.\frac{1}{2} \,, \\
3\gamma_3 = +3\Lambda 1 - 3T_2 + T_3 - \frac{5}{2} + 3(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \,, \\
4\gamma_4 = -4\Lambda 1 + 6T_2 - 4T_3 + T_4 + \frac{7}{2} - 4(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \,, \\
5\gamma_5 = +5\Lambda 1 - 10T_2 + 10T_3 - 5T_4 + T_5 - \frac{9}{2} + 5(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) \,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{array}$$

formules moins simples, mais qui dépendent immédiatement des T; on pourrait d'ailleurs les tirer des précédentes, par le développement des λ.

On aurait encore

$$\begin{array}{l}
\gamma_1 = \lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 - 4\lambda_5 + \ldots\ldots \,, \\
2\gamma_2 = \lambda_3 - 2\lambda_4 + 3\lambda_5 - 4\lambda_6 + \ldots\ldots \,, \\
3\gamma_3 = \lambda_4 - 2\lambda_5 + 3\lambda_6 - 4\lambda_7 + \ldots\ldots \,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Ces formules se tirent des équations (N), en partant de la troisième, par des substitutions successives. On peut aussi les en faire deriver comme il suit.

L'équation (K) donne

$$\text{Log}.n=\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)-\Lambda(1-n)\ ; \qquad \text{(O)}$$

d'où

$$\text{Log}.n=\lambda_1\left(n-\frac{1}{n}\right)-\lambda_2\left(n^2-\frac{1}{n^2}\right)+\lambda_3\left(n^3-\frac{1}{n^3}\right)-\ldots$$

Nous remarquerons, en passant, que le développement de Log.n se fait ici suivant les puissances entières de n, sous une forme très-simple quoique peu usitée ; et c'est un fait d'analise assez singulier que les coefficiens d'un tel développement, pour une fonction qui doit également être regardée comme fort simple, soit soumis à une marche aussi irrégulière que celle des λ.

Soit fait, dans l'équation précédente, $n=1+i$ d'où $\frac{1}{n}=1-i+i^2-i^3+\ldots$; on aura

$$i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\frac{i^4}{4}+\ldots$$

$$=\lambda_1(2i-i^2+\ldots)-\lambda_2(4i-2i^2+\ldots)+\lambda_3(6i-3i^2+\ldots)-\ldots$$

La comparaison des termes qui multiplient les différentes puissances de i fournira des équations dont les deux premières donneront également

$$\tfrac{1}{2}=\lambda_1-2\lambda_2+3\lambda_3-4\lambda_4+\ldots \qquad \text{(P)}$$

Or, on a, par exemple

Par (N) $5\gamma_5=5\Lambda 1-\frac{1}{2}-4\lambda_1+3\lambda_2-2\lambda_3+\lambda_4$

Par (G) $5\Lambda_1= \quad +5\lambda_1-5\lambda_2+5\lambda_3-5\lambda_4+5\lambda_5-5\lambda_6+\ldots$

Par (P) $-\frac{1}{2}= \quad -\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3+4\lambda_4-5\lambda_5+6\lambda_6-\ldots$

donc

$$5\gamma_5=\lambda_6-2\lambda_7+3\lambda_8-4\lambda_9+\ldots\ldots$$

et, en général,

$$m\gamma_m=\lambda_{m+1}-2\lambda_{m+2}+3\lambda_{m+3}-4\lambda_{m+4}+\ldots\ldots$$

Nous pouvons remarquer que l'équation (O) donne, en vertu de $\Lambda(n-1)=n-2+\Lambda(1-n)$, (n.° 6)

$$\text{Log}.n=\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)-\Lambda(n-1)+(n-1)\ ;$$

mais

$$\text{Log}.n=-\text{Log}.\left(1-\frac{1}{n}\right)+\text{Log}.(n-1)\ ;$$

donc

$$0=\Lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)+\text{Log}.\left(1-\frac{1}{n}\right)-\Lambda(n-1)-\text{Log}.(n-1)+(n-1)\ ;$$

ou, en reprenant l'expression de M,

$$M\frac{n}{n+1}=Mn-n\ .$$

9. M. Kramp a fait voir que $\Gamma 1=1-\frac{1}{2}\text{Log}.(2\varpi)$, (*Annales*, tom. 3, pag. 11). On pourra encore calculer ce même nombre en faisant $n=-1$, dans l'équation (M), ce qui donnera

$$\Gamma 1=\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4+\ldots\ldots$$

10. La suite γ_1, γ_2, γ_3, ... présente les mêmes irrégularités que celle des coefficiens λ, comme les valeurs suivantes le font voir

$$\Gamma 1=+0{,}0810614667 9\ ,\quad \gamma_9\ =+0{,}000005266\ldots,$$
$$\gamma_1=+0{,}0772156649 0\ ,\quad \gamma_{10}=-0{,}000002837\ldots,$$
$$\gamma_2=-0{,}0047486314 8\ ,\quad \gamma_{11}=+0{,}000001163\ldots,$$
$$\gamma_3=-0{,}0003661008 9\ ,\quad \gamma_{12}=-0{,}000000293\ldots,$$
$$\gamma_4=+0{,}0003760073.\ ,\quad \gamma_{13}=-0{,}000000062\ldots,$$
$$\gamma_5=-0{,}0001430118.\ ,\quad \lambda_{14}=+0{,}00000016.\ldots,$$
$$\gamma_6=+0{,}0000339978.\ ,\quad \gamma_{15}=-0{,}00000014.\ldots,$$
$$\gamma_7=+0{,}0000004832.\ ,\quad \gamma_{16}=+0{,}00000010\ldots,$$
$$\gamma_8=-0{,}0000067778.\ ,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Si on change le signe des γ a indices impairs, on aura cette succession

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. & 9. & 10. & 11. & 12. & 13. & 14. & 15. & 16\ldots \\ - & - & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + & +\ldots \\ & & * & & & & * & & & & & & * & & & \end{array}$$

Le signe * indique qu'il y a augmentation dans la valeur absolue de deux γ consécutifs. Cette circonstance a lieu, comme pour les λ, aux deux premiers termes qui suivent chaque changement de signe.

11. En faisant $p=1$, dans l'équation (L), on en tirera

$$\Gamma n=-1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)\text{Log.}(1+n)+\Gamma\frac{n}{n+1}\,;$$

et, en mettant $n-1$ pour n

$$\Gamma(n-1)=-1+\left(\frac{n}{n-1}+\frac{1}{2}\right)\text{Log.}n+\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right);$$

puis, développant $\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)$ par la formule (M),

$$\Gamma(n-1)=-1+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2}\right)\text{Log.}n+\Gamma 1-\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n^2}-\frac{\gamma_3}{n^3}+\ldots$$

expression au moyen de laquelle on pourra calculer facilement la fonction Γ d'un très-grand nombre.

12. Une observation qui se présente naturellement est que les équations précédentes, qui contiennent des logarithmes, donnent des résultats absurdes, lorsque les nombres de ces logarithmes sont négatifs ; ce qui tient sans doute aux mêmes causes qui ont conduit M. Kramp à des conclusions paradoxales (*Annales*, tom. 3, pag. 3 et 343). Il a donné à ses lecteurs (*Ibid.* pag. 344) l'espoir d'une solution satisfaisante de ces difficultés. Les géomètres ne peuvent que désirer avec un vif intérêt les éclaircissemens promis par ce célèbre professeur. Ils seront d'ailleurs une sorte de mémoire jus-

tificatif en faveur de l'algèbre qui, à cet égard, se trouve en quelque sorte *in reatu.*

13. Nous rapporterons ici, par occasion, des formules analogues à celles de la page 118 (*Annales*, tom. 3)

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}-2\mathrm{Cos}\,a+e^{-y}}=\frac{y}{y^2+a^2}+B_2y+B_4\frac{y^3-3a^2y}{1.2.3}+B_6\frac{y^5-10a^2y^3+5a^4y}{1.2.3.4.5}+\ldots \qquad \text{(Q)}$$

$$\frac{\mathrm{Sin}.a}{e^{y}-2\mathrm{Cos}.a+e^{-y}}=\frac{a}{y^2+a^2}-B_2a+B_4\frac{a^3-3ay^2}{1.2.3}-B_6\frac{a^5-10a^3y^2+5ay^4}{1.2.3.4.5.}+\ldots \qquad \text{(R)}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Sin}.y}{\mathrm{Cos}.y-\mathrm{Cos}.a}=\frac{y}{a^2-y^2}+B_2y-B_4\frac{y^3+3a^2y}{1.2.3}+B_6\frac{y^5+10a^2y^3+5a^4y}{1.2.3.4.5}-\ldots \qquad \text{(S)}$$

En faisant $a=0$, dans (Q), on a la seconde des séries de la page 118, dont les autres sont tirées. Nous démontrerons ces formules comme il suit.

En faisant $\Delta x=1$, on a

$$\Delta(e^{nx}\mathrm{Sin}.ax)=e^{nx}\{(e^{n}\mathrm{Cos}.a-1)\mathrm{Sin}.ax+e^{n}\mathrm{Sin}.a\mathrm{Cos}.ax\}\,,$$

$$\Delta(e^{nx}\mathrm{Cos}.ax)=e^{nx}\{(e^{n}\mathrm{Cos}.a-1)\mathrm{Cos}.ax-e^{n}\mathrm{Sin}\,a\mathrm{Sin}.ax\}\,,$$

d'où on conclut qu'on peut supposer

$$\Sigma(e^{nx}\,\mathrm{Sin}.ax)=e^{nx}(A\mathrm{Sin}.ax+B\mathrm{Cos}.ax)\,,$$

$$\Sigma(e^{nx}\mathrm{Cos}.ax)=e^{nx}(C\mathrm{Cos}.ax+D\mathrm{Sin}.ax)\,;$$

A, B, C, D étant des constantes.

En effet, différenciant et comparant aux valeurs précédentes; on trouve

$$A=C=\frac{e^{n}\mathrm{Cos}.a-1}{e^{2n}-2e^{n}\mathrm{Cos}.a+1}\,,\quad B=D=\frac{e^{n}\mathrm{Sin}.a}{e^{2n}-2e^{n}\mathrm{Cos}.a+1}\,. \qquad \text{(T)}$$

D'un autre côté, si l'on applique à $e^{nx}\mathrm{Sin}.ax$ et $e^{nx}\mathrm{Cos}.ax$, (ou seulement à la première de ces deux fonctions, car elles conduisent toutes deux au même résultat) la formule d'intégration

$$\Sigma z=\frac{1}{x}z-\frac{x^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{x^3}{1.2.3}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}-\frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}+\ldots$$

$$-\frac{z}{x}+\frac{B_2}{1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{B_4}{1.2.3}\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}+\frac{B_6}{1.2.3.4.5}\frac{\mathrm{d}^5z}{\mathrm{d}x^5}+\ldots;$$

on obtient un résultat de la forme

$$\Sigma(e^{nx}\text{Sin}.ax)=e^{nx}(A\text{Sin}.ax+B\text{Cos}.ax)\;;$$

A et B étant les séries $(Q-\frac{1}{2})$ et (R). Ainsi, ces valeurs peuvent être égalées aux valeurs (T).

Dans les valeurs (Q) nous avons fait passer la fraction $\frac{1}{2}$ dans le premier membre, pour plus de symétrie, ce qui a donné, pour ce premier membre,

$$\frac{e^n\text{Cos}.a-1}{e^{2n}-2e^n\text{Cos}.a+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\frac{e^{2n}-1}{e^{2n}-2e^n\text{Cos}.a+1}=\frac{1}{2}\frac{e^n-e^{-n}}{e^n-2\text{Cos}.a+e^{-n}}\;.$$

La formule (S) dérive de l'une des deux premières, en y mettant $y\sqrt{-1}$ pour y.

Observons que les coefficiens de $x=e^y$, dans les expressions de la somme des séries de la page 118, peuvent se déterminer d'une manière indépendante par les formules

$$A_n=1^{n-1}\;,$$

$$B_n=2^{n-1}-\frac{n}{1}1^{n-1}\;;$$

$$C_n=3^{n-1}-\frac{n}{1}2^{n-1}+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}1^{n-1}\;;$$

$$D_n=4^{n-1}-\frac{n}{1}3^{n-1}+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}2^{n-1}-\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}1^{n-1}\;;$$

. . . .

Ainsi, dans l'exemple de la page 119, on aurait

$$A_7=1\;=1\;,$$

$$B_7=2^6-7.1\;=57\;;$$

$$C_7=3^6-7.2^6+21.1\;=302\;,$$

$$D_7=4^6-7.3^6+21.2^6-35.1=302\;;$$

. . . .

Au reste, la suite des coefficiens A_n, B_n, ... étant symétrique, il suffit de calculer la moitié des termes.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Considérations philosophiques sur l'interpolation ;

Par M. Gergonne.

M. Wronski, dans son *Introduction à la philosophie des mathématiques* (pag. 247), a avancé que certaiues fonctions n'étaient point susceptibles d'*interpolation*. Quelque confiance que puissent inspirer d'ailleurs les profondes connaissances de cet habile géomètre, cette assertion m'a semblé paradoxale ; j'ai donc cru devoir la soumettre à un examen sévère ; et c'est cet examen qui a donné lieu aux réflexions que l'on va lire. Elles ne présentent au surplus rien que de très-élémentaire, et je ne me détermine à les rendre publiques, que dans l'espoir qu'en dirigeant sur ce sujet les pensées de mes lecteurs, elles pourront donner naissance à des recherches plus importantes et d'un plus haut intérêt.

I. Quelque voisine de l'invention de l'*algèbre* que paraisse être l'invention des *coefficiens*, on peut cependant concevoir un intervalle de temps, si court d'ailleurs qu'on voudra, durant lequel, pour exprimer qu'une quantité quelconque a doit être prise une ou plusieurs fois, on écrivait simplement

$$a\ ,\ a+a\ ,\ a+a+a\ ,\ a+a+a+a\ ,\ldots\ldots$$

Dans cet état naissant des notations algébriques, on ne se serait sans doute guère avisé de se demander comment on pourrait écrire que a devait être prise $\frac{2}{3}$ de fois ou $\frac{11}{7}$ de fois, ni ce qui pouvait résulter d'une opération aussi peu intelligible pour l'esprit.

Bientôt, dans la vue d'abréger la notation d'expressions qui se reproduisaient très-fréquemment, on songea à substituer aux expressions ci-dessus les expressions suivantes :

$$a\ ,\ 2a\ ,\ 3a\ ,\ 4a\ ,\ \ldots\ldots$$

que l'on vit être des produits dans lesquels le multiplicande commun a était seul indéterminé.

Le penchant qui nous porte naturellement à généraliser nos idées, et par suite les signes que nous destinons à les représenter, dut bientôt conduire à donner au multiplicateur la même indétermination, la même généralité qu'avait le multiplicande ; et c'est ainsi que ma devint le symbole de a répétée un nombre de fois quelconque exprimé par m.

Ce fut seulement alors que les analistes purent songer à se demander ce que pourrait signifier le symbole ma, lorsque m serait supposée une fraction quelconque, $\frac{p}{q}$ par exemple ; ou, en d'autres termes, quel sens on devait attacher à l'expression

$$\left(\frac{p}{q}\right)a.$$

Il s'agissait ici de transformer ce symbole d'opération immédiatement inexécutable et même inintelligible, en un symbole d'autres opérations possibles, quelques valeurs entières que l'on attribuât à p et q, et telles néanmoins que le résultat rentrât dans l'expression ma, toutes les fois que p serait exactement divisible par q.

On avait sans doute remarqué que, dans ce cas particulier, on avait

$$\left(\frac{p}{q}\right)a=\frac{pa}{q}\ ;$$

on crut donc que ce qu'on pouvait faire de plus simple et de plus naturel était d'adopter cette équation, comme équation de définition pour tous les cas.

Mais cette définition était-elle la seule qu'on pût admettre sous les conditions données ? non sans doute ; et, pour ne prendre ici qu'un exemple très-simple, on aurait également atteint le but en adoptant cette autre définition

$$\left(\frac{p}{q}\right)a = \frac{pa}{q} + A\text{Sin.}\frac{p\varpi}{q};$$

A étant un nombre entier quelconque, et ϖ la moitié de la circonférence dont le rayon est l'unité (*).

Si, changeant m et x, on écrit

$$y_x = xa;$$

on aura

$$y_{x+1} = (x+1)a = xa + a,$$

c'est-à-dire,

$$y_{x+1} = y_x + a,$$

autre équation de définition, d'où on tire

$$y_{x+1} - y_x \quad \text{ou} \quad \Delta y = a.$$

Si l'on veut appliquer à ceci des considérations géométriques; on verra que l'on peut envisager a, $2a$, $3a$;.... ma,.... comme les ordonnées d'une suite de points isolés, dont les abscisses correspondantes sont 1, 2, 3,..... m,....; et que le problème de l'évaluation de xa se réduit à faire passer par tous ces points une ligne continue quelconque, et à chercher ensuite l'ordonnée de cette ligne qui répond à l'abscisse x; or, ce problème est susceptible d'une infinité de solutions, comme le prouve l'équation $y_x = xa + A\text{Sin.}x\varpi$; et l'emploi de la ligne droite, qui conduit à l'équation de définition

(*) Dans le vrai, l'équation de définition $\left(\frac{p}{q}\right)a = \frac{pa}{q}$ a été empruntée de l'arithmétique; mais il convient ici à mon but de supposer que l'invention de l'arithmétique n'a point précédé celle de l'algèbre.

On aurait pu admettre, comme équivalente à la précédente, l'équation de définition

$$ma + na = (m+n)a \quad \text{ou} \quad \varphi m + \varphi n = \varphi(m+n),$$

de laquelle on aurait ensuite déduit l'autre, à peu près comme Euler démontre la formule du binôme, pour l'exposant fractionnaire, à l'aide de l'équation $\varphi m \times \varphi n = \varphi(m+n)$.

généralement admise, n'a d'autre prérogative que de conduire au but de la manière la plus simple.

II. Jusques vers le temps de Descartes, lorsqu'on voulait exprimer les produits consécutifs de la multiplication d'un même nombre a par lui-même, on n'avait d'autre moyen d'éviter les notations incommodes de Viète que d'écrire

$$a\ ,\quad aa\ ,\quad aaa\ ,\quad aaaa\ ,\ldots\ldots$$

Le désir d'abréger fit bientôt remplacer ces expressions par leurs équivalentes

$$a\ ,\quad a^2\ ,\quad a^3\ ,\quad a^4\ ,\ldots\ldots;$$

et on convint ensuite d'employer le symbole a^m pour désigner une puissance quelconque d'un nombre quelconque. Wallis se demanda alors ce que pourrait signifier l'expression a^m, lorsque m serait une fraction, $\frac{p}{q}$ par exemple; et, comme il avait sans doute remarqué que, lorsque p est exactement divisible pas q, on a

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}\ ,$$

il convint librement, et tous les analistes convinrent avec lui, d'adopter cette équation comme équation générale de définition des puissances, quels que pussent être d'ailleurs les nombres p et q; et de lier ainsi les puissances entières et les puissances fractionnaires par une loi commune.

Mais cette loi, à la vérité la plus simple, n'était point la seule qu'on pût adopter; on pouvait prendre, par exemple,

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}+A\,\mathrm{Sin.}\frac{p\varpi}{q}\ ,$$

A et ϖ ayant la même signification que ci-dessus (*).

Si, changeant m en x, on écrit

(*) On pourrait admettre, comme définition équivalente à celle-là, l'équation

$$y_x = a^x ,$$

on aura

$$y_{x+1} = a^{x+1} = a^x . a ,$$

c'est-à-dire,

$$y_{x+1} = a y_x ;$$

autre définition d'où on tire

$$y_{x+1} - y_x \quad \text{ou} \quad \Delta y = (a-1)y :$$

Si l'on considère a, a^2, a^3,.....a^m,..... comme les ordonnées d'une suite de points isolés, ayant respectivement pour abscisses 1, 2, 3,.....m,....., la question de l'évaluation de a^x reviendra à faire passer par ces points une courbe continue, quelle qu'elle soit, et à chercher ensuite celle de ses ordonnées qui répond à l'abscisse x. La définition généralement admise revient à choisir une logarithmique; mais cette courbe n'a au plus que l'avantage d'être la plus simple et pourrait, en toute rigueur, être remplacée par une infinité d'autres.

III. Considérons encore la suite des fonctions

$$\frac{1}{a}; \quad \frac{1}{a+\frac{1}{a}}, \quad \frac{1}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{a}}}, \quad \frac{1}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{a}}}}, \ldots\ldots$$

désignons-les respectivement par $\varphi 1$, $\varphi 2$, $\varphi 3$, $\varphi 4$,....; il est clair qu'en général φx ne sera immédiatement évaluable, ni même exprimable et concevable, qu'autant que x sera un nombre entier positif. Cependant, comme il est connu que, dans ce cas, on a

$$\varphi x = 2 . \frac{(a+\sqrt{a^2+4})^x - (a-\sqrt{a^2+4})^x}{(a+\sqrt{a^2+4})^{x+1} - (a-\sqrt{a^2+4})^{x+1}} \quad (*);$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n} , \quad \text{ou} \quad \varphi m \times \varphi n = \varphi(m+n) ,$$

et en déduire ensuite l'autre, comme il a été indiqué dans la note précédente.

(*) Voyez les *Recueils de l'Académie du Gard* pour 1811, tom. I, pag. 263, mémoire de M. Tédenat sur l'*Analise indéterminée*.

et comme d'ailleurs il existe déjà une convention antérieurement établie sur l'évaluation des puissances fractionnaires ; rien n'empêche d'admettre cette équation comme équation générale de définition de ces sortes de fonctions, quel que soit x ; mais, rien ne s'oppose non plus à ce qu'on en adopte toute autre, car il en existe une infinité qui peuvent remplir le même but.

Si l'on pose, dans ce cas,

$$\varphi x = y_x ;$$

il viendra

$$y_{x+1} = \frac{1}{a + y_x},$$

et par conséquent

$$y_{x+1} - y_x \qquad \text{ou} \qquad \Delta y = \frac{1 - ay - y^2}{a + y}.$$

IV. On pourrait parcourir successivement tant d'autres sortes de fonctions qu'on voudrait, que l'on parviendrait toujours également aux conclusions suivantes : 1.° le problème de l'interpolation ne peut offrir de difficulté que lorsqu'il est relatif à une fonction qui, sous sa forme primitive, n'est évaluable, intelligible et même exprimable que pour certaines valeurs déterminées (quoiqu'en nombre infini) du *sujet* de cette fonction ; 2.° l'art de le résoudre consiste, en général, à mettre la fonction proposée sous quelque autre forme qui, équivalente à la première, pour les cas où celle-ci est immédiatement évaluable, puisse être, contrairement à elle, également évaluée, du moins par approximation, dès qu'on attribuera au sujet une valeur quelconque, autre que celles-là seules pour lesquels la première pouvait être évaluée ; 3.° ce problème est, généralement parlant, susceptible d'une infinité de solutions, sans que l'on puisse assigner à aucune d'entre elles d'autre motif de préférence sur les autres que de pures raisons de convenance ou de simplicité.

Le problème de l'interpolation, envisagé géométriquement, revient évidemment à trouver l'expression générale de l'ordonnée d'une courbe assujettie à passer par une infinité de points donnés, se succédant les uns aux autres suivant une loi uniforme quelconque ; mais non immédiatement susceptible de donner des points intermédiaires à ceux-là ; et cette manière d'envisager la chose montre de nouveau, d'une manière sensible, que le problème doit avoir une infinité de solutions.

Donnons encore un exemple de l'application de ces principes. Avant Vandermonde, personne, je crois, ne s'était avisé de chercher à évaluer le produit $1.2.3 \ldots x$ pour d'autres valeurs de x que des valeurs entières et positives, et cela parce qu'aucune notation particulière n'ayant été inventée pour exprimer ce produit, il n'y avait pas même moyen de l'écrire, lorsqu'on faisait d'autres suppositions pour x. Mais du moment que l'on eut imaginé les symboles $\overset{x}{[x]}$, $1^{x|1}$, $x\,!$ comme équivalens entre eux et à ce produit, on dut aussitôt se demander ce que pourrait signifier $x\,!$, lorsque x serait fractionnaire ou négatif, ou même irrationnel ou imaginaire. Tout se réduisait évidemment à trouver une fonction de x qui devînt $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$ lorsqu'on y supposerait successivement $x=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ et qui fût de plus évaluable, du moins par approximation, dans le cas de toute autre suposition pour x. Or, ces conditions pouvaient être remplies d'une infinité de manières différentes ; on pouvait, par exemple, adopter l'équation de définition

$$x\,!=1+Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}(x-1)^{\alpha'}+Cx^{\gamma}(x-1)^{\beta'}(x-2)^{\alpha''}+\ldots\ldots,$$

dans laquelle les exposans $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots \beta, \beta', \beta'' \ldots \gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$, en nombre infini, peuvent être des nombres positifs quelconques, et où $A, B, C, \ldots$ se déterminent facilement par une suite de suppositions particulières. Si, par exemple, pour plus de simplicité, on pose tous les exposans égaux à l'unité, on trouve alors

$$x!=1+0\frac{x}{1}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}+2\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}+9\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{2}+\ldots$$

série dans laquelle les coefficiens consécutifs $0, 1, 2, 9, 44, 265, \ldots$

sont tels que chacun est le produit de la somme des deux précédens par le nombre total de tous ceux qui le précèdent.

On pouvait tout aussi bien admettre l'expression

$$x!=1+Ax\mathrm{Sin.}\frac{\varpi}{x}+Bx^2\mathrm{Sin.}\frac{\varpi}{x}\,\mathrm{Sin.}\frac{2\varpi}{x}+Cx^3\mathrm{Sin.}\frac{\varpi}{x}\,\mathrm{Sin.}\frac{2\varpi}{x}\,\mathrm{Sin.}\frac{3\varpi}{x}+\ldots,$$

dans laquelle les coefficiens A, B, C,.... auraient également été déduits de la considération des cas particuliers, et qui pouvait, comme les précédentes, être évaluée quel que fût le nombre x. Mais ce n'est aucune de ces définitions qui a été admise par le petit nombre des analistes qui se sont occupés de la fonction $x!$; ils ont admis, du moins tacitement, pour équation de définition

$$\mathrm{Log.}(x!)=\mathrm{Log.}\{x^x\sqrt{2\varpi x}\}-\left\{x-\frac{B_2}{x}-\frac{B_4}{3x^3}-\frac{B_6}{5x^5}-\ldots..\right\},$$

B_2, B_4, B_6,.... étant les nombres de Bernoulli; et le choix de cette définition les a conduit à plusieurs belles applications de ces fonctions, que sans doute l'adoption d'une définition différente ne leur aurait pas également fournies; mais cela prouve seulement, ce me semble, que, eu égard aux applications pratiques, il peut y avoir de l'avantage à préférer une équation de définition à toute autre; mais nullement qu'en théorie le choix n'en soit pas tout-à-fait indifférent. Le seul point important en ceci est de ne point admettre implicitement d'une même fonction plusieurs définitions qui ne soient point concordantes et de subordonner rigoureusement tous ses calculs à celle qu'on se sera déterminé à préférer. Le défaut de cette attention ne pourrait évidemment manquer de conduire à des paradoxes.

D'après ce qui précède, l'équation connue $(\frac{1}{2})!=\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}$, ne peut être regardé comme vrai *en elle-même*, mais seulement comme conséquence nécessaire de la définition de la fonction $x!$ qu'il a plû aux analistes d'adopter; cette équation $(\frac{1}{2})!=\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}$ pourrait donc, en toute rigueur, être vraie à Paris et fausse à Londres, sans qu'il en résultât aucune contradiction réelle; il s'ensuivrait seulement qu'à Londres le symbole $x!$ ne représente la même chose qu'à Paris que pour les valeurs entières et positives de x.

En posant $x!=y_x$, il viendra

$$y_{x+1}=y_x.(x+1) ,$$

d'où

$$y_{x+1}-y_x \quad \text{ou} \quad \Delta y=xy ,$$

équation qui peut être admise comme équation *générale* de définition ; je dis générale ; car, à raison du complément variable et périodique que comporte son intégrale, elle comprend implicitement une infinité de définitions différentes.

V. Supposons présentement qu'on ait une certaine fonction de x, dont la forme primitive soit telle qu'on ne puisse en assigner immédiatement la valeur que par rapport à certaines suppositions faites pour la variable, la supposition de x entier et positif par exemple ; et supposons de plus qu'on n'ait pu encore parvenir à la mettre sous une forme qui en permette l'évaluation quel que soit x, faudra-t-il en conclure que cette fonction n'est point interpolable ? qu'elle est *essentiellement discontinue* ? je ne saurai le penser. Il est d'abord très-probable qu'au temps de Viète on aurait été fort tenté de porter le même jugement de la fonction a^x; et qu'on en aurait dit autant de la fonction désignée par $x!$ par M. Kramp, avant que Vandermonde s'en fût occupé. D'ailleurs, dire qu'une fonction évaluable dans une infinité de circonstances ne l'est point néanmoins dans toutes, ne reviendrait-il pas à dire que, par une infinité de points donnés sur un plan, et s'y succédant suivant une loi uniforme, il est impossible de concevoir une seule courbe continue ? et, loin que cette assertion paraisse soutenable, ne semble-t-il pas, au contraire, que des points donnés, même en nombre infini, peuvent toujours être conçus liés par une infinité de courbes différentes ? et n'en résulte-t-il pas inévitablement que, soit qu'on sache ou qu'on ne sache pas interpoler une fonction,

le

le problème de son interpolation n'en doit pas moins être réputé non seulement possible, mais même tout à fait indéterminé. On ne m'opposera pas ici, je pense, l'exemple des systèmes de lignes remarquées pour la première fois par M. Monge, et qui ne sauraient faire partie d'aucune surface; car ces lignes se succèdent sans interruption, tandis qu'il s'agit ici de points isolés.

Cette doctrine sur l'interpolation, quelque saine et raisonnable qu'elle paraisse, n'est pourtant point celle que professe M. Wronski. (*Introd. à la Philos. des Math.* pag. 147) « Lorsque les déterminations particulières d'une fonction inconnue, auxquelles s'appliquent les méthodes d'interpolation, sont de nature que la fonction correspondante n'ait point, *par elle-même*, une continuité indéfinie, les méthodes d'interpolation ne peuvent, dit-il, donner des fonctions qui aient une telle continuité. Par exemple, les fonctions que nous avons remarquées ci-dessus, en parlant des rapports algarithmiques, et que nous avons nommées *Lameds*, ne sauraient, par l'application des méthodes d'interpolation, recevoir une continuité indéfinie; parce que, comme nous l'avons déjà observé, ces fonctions n'en sont point susceptibles dans leur *génération primitive* ».

Les fonctions *Lameds*, dont parle ici M. Wronski, sont de la nature que voici : on pose

$$y_1=a\ ,\quad y_2=a^a\ ,\quad y_3=a^{a^a}\ ,\quad y_4=a^{a^{a^a}}\ ,\ldots.;$$

et on demande ce que peut signifier y_x, lorsque x est quelconque.

La manière la plus directe de répondre à l'assertion de M. Wronski, serait sans doute de lui donner une expression de y_x, rentrant au fond dans les cas particuliers que je viens de considérer, et se prêtant à toutes les suppositions qu'on voudrait faire pour x; et, dans ce cas, je pourrais, en attendant mieux, lui offrir la formule d'interpolation si connue

$$
\begin{aligned}
y_x = 1 &- (1-a)\frac{x}{1} \\
&+ (1-2a+a^a)\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2} \\
&- (1-3a+3a^a-a^{a^a})\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3} \\
&+ (1-4a+6a^a-4a^{a^a}+a^{a^{a^a}})\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{4} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

que je n'oserais peut-être pas présenter à tous les analistes ; mais que M. Wronski doit d'autant moins récuser que, suivant lui, *les séries ont, par elles-mêmes, dans le nombre indéfini de leurs termes, une signification déterminée.* Mais, laissant cette série de côté, je me bornerai à demander à M. Wronski quelle est la *génération primitive* des fonctions

$$
\begin{array}{lllll}
a\,, & a+a\,, & a+a+a\,, & a+a+a+a & ,\ldots\ldots\,; \\[4pt]
a\,, & aa\,, & aaa\,; & aaaa & ;\ldots\ldots\,; \\[4pt]
\frac{1}{a}\,, & \frac{1}{a}+\frac{1}{a}\,, & \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\,, & \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a} & ,\ldots\ldots\,; \\[4pt]
1\,, & 1.2\,, & 1.2.3\,; & 1.2.3.4 & ,\ldots\ldots\,; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

et si, dans cette génération primitive, elles sont, plus que ses *Lameds*, susceptibles d'une continuité indéfinie ? (*)

(*) En représentant les *Lameds* par y, on a évidemment $y+\Delta y=a^y$, c'est-à-dire, Je suis, certes, loin de supposer à M. Wronski, à qui je soumets de bon cœur ces réflexions, une assez forte dose d'amour-propre pour penser qu'il confonde les bornes de ce qu'il est parvenu à faire jusqu'ici avec celles du possible. Je ne fais même aucun doute que la philosophie qu'il professe, et qu'à mon très-grand regret je connais fort peu, enseigne, comme toutes les autres, qu'on ne saurait trop se défier de ses lumières; mais je serais bien tenté de croire qu'en cet endroit, comme en plusieurs autres, c'est encore cette même philosophie qui l'aura égaré, en le faisant sans doute raisonner comme il suit: « Le *Criticisme* fait trouver tout ce qui » est trouvable, et tout ce qu'il fait trouver est parfait; or, ce » *Criticisme* m'a fait découvrir une nouvelle loi de développement » des fonctions en séries; donc cette loi est parfaite; donc elle » est la LOI ABSOLUE; or, cette même loi n'a aucun empire sur » les fonctions *Lameds*; donc ces fonctions ne sont point susceptibles » de développement; donc elles sont essentiellement discontinues; » *quod erat demonstrandum.* » C'est à peu près dans ces termes que Hobbes parle de la *synthèse*, et Condillac de l'*analise* !

$$a^y = y + \frac{1}{1}\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2}\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}\,\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots\ldots$$

équation qui ne saurait être absurde, puisqu'elle ne contient que deux variables seulement; et qui doit être d'ailleurs assujettie à la loi de continuité.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes d'optique.

I. QUEL point du plan d'un triangle donné quelconque faut-il concevoir lumineux, pour que le point le moins éclairé de son périmètre le soit le plus possible, ou que le point le plus éclairé de son périmètre le soit le moins possible ?

II. Quel point de l'intérieur d'un tétraèdre vide donné et quelconque faut-il concevoir lumineux, pour que le point le moins éclairé de sa surface le soit le plus possible, ou pour que le point le plus éclairé de sa surface le soit le moins possible ?

Problème d'alliage.

Deux vases contenant des volumes V, V' de mélanges de plusieurs liquides, dont le nombre et les proportions sont inconnus pour chaque vase ; ne serait-il pas possible de construire deux vases plus petits et d'une même capacité, tels qu'en les emplissant dans les deux vases donnés, et versant ensuite dans chacun le liquide extrait de l'autre, les mélanges contenus dans les deux vases, après cette opération, soient exactement de même nature ? et quelle devrait être, pour cela, la capacité commune des deux vases égaux ?

Il est d'ailleurs supposé que les liquides dont il s'agit ne sont point susceptibles de se combiner chimiquement, et que conséquemment ils se mêlent sans rien perdre de leur volume total.

ASTRONOMIE.

Essai d'une nouvelle solution des principaux problèmes d'astronomie ;

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

(*Cinquième Mémoire*). (*)

143. PROBLÈME IX. *On demande de représenter les époques des conjonctions et des oppositions d'une planète quelconque avec son satellite, par une série ordonnée selon les puissances ascendantes de l'excentricité de la planète principale, en regardant le mouvement du satellite comme circulaire et uniforme ?*

144. *Solution.* Soient AIA′ (fig. 1) la demi-orbite de la planète principale, AA′ son grand axe, A son aphélie, A′ son périhélie, F le foyer de l'ellipse, occupé par le soleil; le satellite étant porté sur un épicycle dont le centre parcourt la circonférence de l'ellipse, conformément aux lois connues du mouvement planetaire. Supposons qu'au moment où la planète principale était à l'aphélie A de son orbite, le satellite ait été au point C de l'épicycle. Supposons de plus qu'au bout du temps t la planète ait parcouru l'arc AI de son orbite, et, ayant mené les lignes IE, IG, respectivement parallèles à AB, AC, supposons que, dans le même temps t, le satellite ait parcouru l'arc GH de la sienne.

(*) Voyez les pages 161 et 237 du IV.e volume de ce recueil, et les pages 1 et 221 de celui-ci.

145. Désignons par p le temps d'une révolution de la planète, et par q le temps d'une révolution du satellite. Soient de plus

a, le demi-grand axe de l'orbite de la planète ;

$a\text{Cos.}\lambda$, son demi-petit axe ;

b, le rayon de l'orbite du satellite $=AB=AC=AI$;

φ, l'anomalie vraie AFI;

x, l'anomalie excentrique correspondante ;

α, l'angle BAC, qui fixe le lieu du satellite, au moment du passage de la planète par son aphélie.

On aura conséquemment

$a\text{Sin.}\lambda$, pour l'excentricité de l'orbite,

$a(1+\text{Cos.}\lambda)$ pour son aphélie FA ;

$a(1-\text{Cos.}\lambda)$ pour son périhélie FA'.

146. En conséquence, on aura les équations suivantes:

$$\text{Sin.}x=\frac{\text{Cos.}\lambda\text{Sin.}\varphi}{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi}, \qquad \text{Cos.}x=\frac{\text{Cos.}\varphi-\text{Sin.}\lambda}{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi},$$

$$\frac{2\varpi t}{p}=x+\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}x .$$

On tire des deux premières

$$dx=\frac{d\lambda\text{Sin.}\varphi+d\varphi\text{Cos.}\lambda}{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi},$$

et de la troisième

$$dx=-d\lambda\text{Sin.}\varphi+\frac{1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos}\,\varphi}{\text{Cos.}^2\lambda}\cdot\frac{2\varpi dt}{p}.$$

Ces valeurs, égalées entre elles, donneront

$$d\varphi=\frac{2\varpi(1-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)^2}{p\text{Cos.}^3\lambda}dt-\frac{\text{Sin.}\varphi(2-\text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)}{\text{Cos.}\lambda}d\lambda .$$

D'un autre côté, on a, pour l'expression littérale de l'angle IFH

$$\text{Tang.IFH , ou Ang.IFH}=-\frac{b\text{Sin.}\left(\alpha+\frac{2\varpi t}{q}-\varphi\right)}{a+b\text{Cos.}\left(\alpha+\frac{2\varpi t}{q}-\varphi\right)} .$$

Cet angle devant s'évanouir en cas de syzygie, on aura

$$u + \frac{2\varpi t}{q} - \varphi = n\varpi ,$$

ou

$$\varphi = u - n\varpi + \frac{2\varpi t}{q} , \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{2\varpi dt}{q} ;$$

donc

$$\frac{2\varpi dt}{q} = \frac{2\varpi(1 - \text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)^2}{p\text{Cos.}^3\lambda} dt - \frac{\text{Sin.}\varphi(2 - \text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)}{\text{Cos.}\lambda} d\lambda ;$$

en conséquence

$$-\frac{2\varpi dt}{pq d\lambda} = \frac{\text{Cos.}^2\lambda\text{Sin.}\varphi(2 - \text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)}{p\text{Cos.}^3\lambda - q(1 - \text{Sin.}\lambda\text{Cos.}\varphi)^2} .$$

Tel est le rapport différentiel $dt : d\lambda$, dont il faudra déduire les coefficiens de la série que nous cherchons.

147. Pour donner à nos formules la simplicité que nos développemens exigent, soient

$$\text{Sin.}\lambda = x , \quad \text{Cos.}\varphi = y ,$$

$$\text{Cos.}\lambda = u , \quad \text{Sin.}\varphi = v ;$$

donc

$$\frac{dx}{d\lambda} = u , \quad \frac{dy}{d\lambda} = -\frac{v d\varphi}{d\lambda} = -\frac{2\varpi v}{q} \cdot \frac{dt}{d\lambda} ,$$

$$\frac{du}{d\lambda} = -x , \quad \frac{dv}{d\lambda} = +\frac{y d\varphi}{d\lambda} = +\frac{2\varpi y}{q} \cdot \frac{dt}{d\lambda} .$$

On aura ainsi

$$-\frac{2\varpi dt}{q d\lambda} = \frac{pu^2 v(2 - xy)}{pu^3 - q(1 - xy)^2} ;$$

et si, pour abréger, on désigne cette fraction par h, on aura

$$\frac{dx}{d\lambda} = +u , \quad \frac{dy}{d\lambda} = +hv ,$$

$$\frac{du}{d\lambda} = -x , \quad \frac{dv}{d\lambda} = -hy .$$

Il paraît convenable de faire encore, pour abréger, $r=1-xy$, il en résulte

$$\frac{dr}{d\lambda}=-\frac{xdy+ydx}{d\lambda}=-uy-hvx\ ;$$

on a alors

$$h=\frac{pu^2v(1+r)}{pu^3-qr^2}\ ;$$

ce qui donne

$$-\frac{dr}{d\lambda}=\frac{pr(2x+y-xy)-quvr^2}{pu^3-qr^2}\ .$$

148. Si, d'après le but du problème, on désigne par t le temps au bout duquel il arrive une syzygie, on aura

$$t=A+B\lambda+C\lambda^2+\ldots\ldots\ ;$$

et les coefficiens A, B, C,..... formeront les inconnues du problème. Le premier terme A est ce que devient t dans le cas de $\lambda=0$, lequel fournit

$$\frac{2\varpi t}{p}=\varkappa=\varphi=\alpha-n\varpi+\frac{2\varpi t}{q}\ ;$$

d'où l'on tire

$$t=\frac{pq(n\varpi-\alpha)}{2\varpi(p-q)}\ ;$$

et telle est la valeur du premier terme de la série. On aura donc

$$A=\frac{pq(n\varpi-\alpha)}{2\varpi(p-q)}\ .$$

149. Le coefficient B est ce que devient le rapport différentiel $\frac{dt}{d\lambda}$, dans le même cas de $\lambda=0$, qui est celui de $x=0$, $u=1$, $\varphi=\frac{q(n\varpi-\alpha)}{p-q}=\frac{2\varpi A}{p}$; d'où $y=\text{Cos.}\frac{2\pi A}{p}$, $v=\text{Sin.}\frac{2\pi A}{p}$. Il en résultera

$$B = -\frac{2pq}{2\pi(p-q)} \text{ Sin. } \frac{2\pi A}{p},$$

en sorte que le second terme de la série est

$$-\frac{pq\lambda}{\pi(p-q)} \text{ Sin. } \frac{2\pi A}{p}.$$

150. Il faudra passer de là aux rapports différentiels $\frac{d^2t}{d\lambda^2}$, $\frac{d^3t}{d\lambda^3}$, $\frac{d^4t}{d\lambda^4}$,... On peut remarquer que tous les termes dont ces rapports sont composés sont compris sous la forme

$$\frac{u^m . r^\varepsilon . v . s}{(pu^3 - qr^2)^n};$$

la lettre s désignant une fonction rationnelle et entière de x et y; tellement que $ds = Mdx + Ndy$, tandis que $dr = -ydx - xdy$. Le problème est donc réduit à trouver la différentielle de la fonction fractionnaire

$$z = \frac{u^m r^\varepsilon v s}{(pu^3 - qr^2)^n}.$$

151. On en tire

$$\text{Log.} z = m\text{Log.} u + \varepsilon\text{Log.} r + \text{Log.} v + \text{Log.} s - n\text{Log.}(pu^3 - qr^2);$$

donc

$$\frac{dz}{z} = \frac{mdu}{u} + \frac{\varepsilon dr}{r} + \frac{dv}{v} + \frac{Mdx + Ndy}{s} - \frac{n(3pu^2du - 2qrdr)}{pu^3 - qr^2};$$

ou, en divisant par $d\lambda$

$$\frac{dz}{zd\lambda} = -\frac{mx}{u} - \frac{\varepsilon y}{r} - \frac{hy}{v} + \frac{Mu + Nhv}{s} + \frac{3npu^2x}{pu^3 - qr^2} - \frac{2nqr(uy + hvx)}{pu^3 - qr^2},$$

multipliant enfin de part et d'autre par $urvs(pu^3 - qr^2)$

$$urv(pu^3 - qr^2)\frac{dz}{zd\lambda} = -mrvxs(pu^3 - qr^2) - pu^3vry(1 + r)s$$
$$- \varepsilon vu^3ys(pu^3 - qr^2) - \varepsilon pu^3v^3x(1 + r)s$$

$$+Mru^2\varrho(pu^3-qr^2)+pNu^3\varrho^3r(1+r)$$
$$+3npr\,u^3\varrho xs$$
$$-2nqr^2u^2\varrho ys \qquad -2nhqr^2u\varrho^2xs\ .$$

152. Donc, si l'on fait, pour abréger,

$$F=-mrxs-\varepsilon u^2ys+3nrxs-r(1+r)ys-\varepsilon(1+r)\varrho^2xs$$
$$+Mru^2+Nr(1+r)\varrho^2\ ,$$
$$G=F+H+2n(1+r)\varrho^2xs\ ,$$
$$H=-mrxs-\varepsilon u^2ys+2nu^2ys+Mru^2\ ;$$

on aura finalement

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{u^{m-1}r^{\varepsilon-1}\varrho}{(pu^3-qr^2)^{n+2}}(p^2u^6F-pqr^2u^3G+q^2r^4H)$$
$$=\frac{p^2u^{m+5}r^{\varepsilon-1}\varrho F-pqu^{m+2}r^{\varepsilon-1}\varrho G+q^2u^{m-1}r^{\varepsilon+3}\varrho H}{(pu^3-qr^2)^{n+2}}\ .$$

153. Les trois coefficiens F, G, H, sont des fonctions rationnelles et entières de x et y. On trouve, en les développant,

$$F=(3n-m-2\varepsilon)xs-(\varepsilon+2)ys+(m-3n+2\varepsilon)x^2ys+(2\varepsilon+3)xy^2s$$
$$-(\varepsilon+1)x^2y^3s+ru^2M+r(1+r)\varrho^2N\ ,$$
$$G=(2n-2m-2s)xs+(2n-2\varepsilon-2)ys+(2m-7n+3\varepsilon)x^2ys$$
$$+(2\varepsilon-4n+3)xy^2s+(2n-\varepsilon-1)x^2y^3s+2Mru^2+Nr(1+r)\varrho^2\ ,$$
$$H=-mxs+(2n-\varepsilon)ys+(m-2n+\varepsilon)x^2ys+Mru^2\ .$$

On peut remarquer que la première de ces trois fonctions, savoir F, est divisible par $r=1-xy$; on trouve

$$\frac{F}{r}=(3n-m-2\varepsilon)xs-(\varepsilon+2)ys+1(\varepsilon+1)xy^2s+u^2M+(1+r)\varrho^2N\ .$$

Exemple I. Ayant trouvé

$$-\frac{2\pi dt}{q d\lambda}=\frac{pu^2\varphi(2-xy)}{pu^3-qr^2},$$

on demande $\frac{d^2t}{d\lambda^2}$?

Faisant

$$z=\frac{u^2\varphi(2-xy)}{pu^3-qr^2},$$

on aura

$$-\frac{2\pi dt}{q d\lambda}=pz;$$

donc

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2}=-\frac{pq}{2\pi}\cdot\frac{dz}{d\lambda};$$

reste donc à trouver $\frac{dz}{d\lambda}$.

Comparant à la formule générale

$$\frac{u^m\varphi r^\varepsilon s}{(pu^3-qr^2)^n},$$

on trouve

$$m=2,\quad s=2-xy;$$
$$\varepsilon=0,\quad M=-y,$$
$$n=1,\quad N=-x;$$

on en tire

$$F=r(-5y+x^2y+6xy^2-2x^2y^3),$$
$$G=2r(2x-y),$$
$$H=r(-2x+y+x^2y),$$

donc

$$\frac{dz}{d\lambda}=\frac{1}{(pu^3-qr^2)^3}\left\{\begin{array}{l} p^2u^7\varphi(-5y+x^2y+6xy^2-2x^2y^3) \\ -2pqu^4r^2\varphi(2x-y) \\ +q^2ur^4\varphi(-4x+3y+3x^2y-xy^2-x^3y^2) \end{array}\right\};$$

donc

$$\frac{2\pi}{pq}\cdot\frac{d^2t}{d\lambda^2}=\frac{1}{(pu^3-qr^2)^3}\left\{\begin{array}{l} p^2u^7v(5y-x^2y-6xy^2+2x^2y^3) \\ +2pqu^4r^2v(2x-y) \\ +q^2ur^4v(4x-3y-3x^2y+xy^2+x^3y^2) \end{array}\right\}$$

154. Le troisième coefficient C de la série est ce que devient la fraction $\frac{d^2t}{2d\lambda}$, dans le cas de $\lambda=0$, qui est celui de $x=0$, $u=0$, $\varphi=\frac{2\pi A}{p}$, $y=\text{Cos.}\frac{2\pi A}{p}$, $v=\text{Sin.}\frac{2\pi A}{p}$, et $r=1$. On aura donc

$$C=\frac{pq(5p+3q)}{4\varpi(p-q)^2}\,\text{Sin.}\frac{2\varpi A}{p}\,\text{Cos.}\frac{2\varpi A}{p}\ ,$$

ou

$$C=\frac{pq(5p+3q)}{8\varpi(p-q)^2}\,\text{Sin.}\frac{4\varpi A}{p}\ ;$$

le troisième terme sera donc

$$\frac{pq(5p+3q)}{8\varpi(p-q)^2}\,\lambda^2\text{Sin.}\frac{4\varpi A}{p}\ .$$

155. On vient de trouver la valeur littérale de $\frac{2\varpi}{pq}\cdot\frac{d^2t}{d\lambda^2}$, composée de trois fractions telles que

$$\frac{p^2u^7vS'+2pqu^4vS''+q^2ur^4vS'''}{(pu^3-qr^2)^3}\ ,$$

dans lesquelles

$$S'=5y-x^2y-6xy^2+2x^2y^3\ ,$$

$$S''=2x-y\ ,$$

$$S'''=4x-3y-3x^2y+xy^2+x^3y^2\ .$$

Pour passer à $\frac{d^3t}{d\lambda^3}$, il faut appliquer la formule générale à chacune des trois fonctions S', S'', S''' en particulier. En conséquence, nous aurons les différentielles qui suivent.

Exemple II. On demande la différentielle de

z'

$$z' = \frac{u^7 \varphi S'}{(pu^3 - qr^2)^3}\ ?$$

On a ici $m = 7$, $S' = 5y - x^2y - 6xy^2 + 2x^2y^3$,

$\varepsilon = 0$, $M' = -2xy - 6y^2 + 4xy^3$,

$n = 3$, $N' = 5 - x^2 - 12xy + 6x^2y^2$,

d'où il résulte

$$\begin{aligned}\frac{F'}{r} = 10 - 2x^2 - 21xy - 26y^2 \\ + x^3y + 22x^2y^2 + 50xy^3 \\ - 8x^3y^3 - 34x^2y^4 + 8x^3y^5\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{G'}{r} = 10 - 2x^2 + 2xy - 2y^2 \\ - 2x^3y - 8x^2y^2 - 12xy^3 \\ + 4x^3y^3 + 14x^2y^4 - 4x^3y^5\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H' = \quad - 37xy + 24y^2 \\ - 19x^3y + 49x^2y^2 - 26xy^3 \\ - 3x^4y^2 - 30x^3y^3 + 8x^2y^4 \\ + 6x^4y^4\ ;\end{aligned}$$

En suite de quoi on aura finalement

$$\frac{dz'}{d\lambda} = \frac{u^6 \varphi}{(pu^3 - qr^2)^5} \left(p^2u^6 \frac{F'}{r} - pu^3r^2 \frac{G'}{r} + q^2r^3H' \right).$$

156. *Exemple III.* On demande la différentielle de

$$z'' = \frac{u^4r^2\varphi s''}{(pu^3 - qr^2)^3}\ ?$$

On a ici $m = 4$, $s'' = 4x - 2y$,

$\varepsilon = 2$, $M'' = 4$;

$n = 3$, $N'' = -2$;

donc

$$\frac{F''}{r} = -16xy + 12y^2$$
$$+12x^2y^2 - 8xy^3 \; ;$$
$$G'' = 4 + 28x^2 - 20xy + 4y^2$$
$$-21x^3y - 8x^2y^2 + 4xy^3$$
$$+12x^3y^3 - 4x^2y^4 \; ,$$
$$H'' = -4 - 12x^2 + 28xy - 8y^2$$
$$-4x^3y \; ,$$

d'où il résulte

$$\frac{dz''}{d\lambda} = \frac{u^3r^2v}{(pu^3 - qr^2)^5}\left(p^2u^6\,\frac{F''}{r} - pqru^3G'' + q^2r^3H''\right) .$$

157. *Exemple IV.* On demande la différentielle de

$$z''' = \frac{ur^4vs'''}{(pu^3 - qr^2)^3} \; ?$$

On a, pour ce cas, $m = 1$, $S''' = 4x - 3y - 3x^2y + xy^2 + x^3y^2$,
$s = 4$, $M''' = 4 - 6xy + y^2 + 3x^2y^2$,
$n = 3$, $N''' = -3 - 3x^2 + 2xy + 2x^3y$;

ce qui donne

$$\frac{F'''}{r} = -2 + 10x^2 - 23xy + 25y^2$$
$$+13x^3y + 44x^2y^2 - 28xy^3$$
$$-5x^4y^2 - 28x^3y^3 + 7x^2y^4$$
$$+7x^4y^4$$
$$G''' = +2 + 30x^2 - 56xy + 20y^2$$
$$-28x^3y + 50x^2y^2 - 16xy^3$$
$$+5x^4y^2 - 19x^3y^3 + 5x^2y^4$$
$$+x^5y^3 + 5x^4y^4 - x^3y^5$$
$$-x^5y^5 \; ,$$

$$H'''=+4-8x^2+xy-5y^2$$
$$+9x^3y+4x^2y^2+xy^3$$
$$-7x^4y^2-x^3y^3$$
$$+2x^5y^3\ ;$$

on aura finalement

$$\frac{dz'''}{d\lambda}=\frac{r^4v}{(pu^3-qr^2)^5}\left(p^2u^6\,\frac{F'''}{r}-pqr^2u^3G'''+q^2r^3H'''\right).$$

158. Mettant ensemble les expressions différentielles des trois numéros précédens, on trouve

$$\frac{2\pi}{pq}\cdot\frac{d^3t}{d\lambda^3}=\frac{v}{r(pu^3-qr^2)^5}\left\{\begin{array}{l} p^4u^{12}F' \\ +p^3qu^9r^2(F''-G') \\ +p^2q^2u^6r^4(F'''-G''+H') \\ +pq^3u^3r^6(-G'''+H'') \\ +q^4r^8H'''\ . \end{array}\right\}$$

Or, on trouve, après les réductions

$$F'=+10$$
$$-2x^2-31xy-26y^2$$
$$+3x^3y+43x^2y^2+76xy^3$$
$$-x^4y^2-30x^3y^3-84x^2y^4$$
$$+8x^4y^4+42x^3y^5-8x^4y^6$$

$$F''-G'=-10$$
$$+2x^2-8xy+14y^2$$
$$+38x^2y^2-10xy^3$$
$$-2x^4y^2-24x^3y^3-18x^2y^4$$
$$+4x^4y^4+18x^3y^5-4x^4y^6,$$

$$F'''-G''+H'=-6$$
$$-38x^2-38xy+45y^2$$
$$+52x^3y+124x^2y^2-83xy^3$$
$$-21x^4y^2-114x^3y^3+47x^2y^4$$
$$+5x^5y^3+41x^4y^4-7x^3y^5$$
$$-7x^5y^5\ ;$$

$$-G'''+H''=+2$$
$$+50x^2+76xy-28y^2$$
$$+32x^3y-53x^2y^2+16xy^3$$
$$-5x^4y^2+19x^3y^3-5x^2y^4$$
$$-x^5y^3-5x^4y^4+x^3y^5$$
$$+x^5y^5\ ;$$

$$H'''=+4$$
$$-8x^2+xy-5y^2$$
$$+9x^3y+4x^2y^2+xy^3$$
$$-7x^4y^2-x^3y^3$$
$$+2x^5y^3\ .$$

159. Le quatrième coefficient D est encore ce que devient le rapport différentiel $\frac{d^3t}{6d\lambda^3}$, dans le cas de $\lambda=0$, qui est celui de $x=0$, $u=1$, $r=1$, $\varphi=\frac{2\varpi A}{p}$ ou $\varphi=\frac{q(n\varpi-\alpha)}{p-q}$, et ensuite $y=\text{Cos}.\varphi$ et $v=\text{Sin}.\varphi$; en désignant ici par φ l'angle $\frac{2\varpi A}{p}=\frac{q(n\varpi-\alpha)}{p-q}$. Cette supposition donne

$$F'=+10-26\text{Cos}.^2\varphi\ ,$$
$$F''-G'=-10+14\text{Cos}.^2\varphi\ ,$$
$$F'''-G''+H'=-\ 6+45\text{Cos}.^2\varphi\ ,$$
$$-G'''+H''=+\ 2-28\text{Cos}.^2\varphi\ ,$$
$$H'''=+\ 4\quad 5\text{Cos}.^2\varphi\ ;$$

on aura donc

$$\frac{2\varpi}{pq}D=\frac{\text{Sin.}\varphi}{6(p-q)^5}\left\{\begin{array}{l}(10p^4-10p^3q-6p^2q^2+2pq^3+4q^4)\\-(26p^4-14p^3q-45p^2q^2+28pq^3+5q^4)\text{Cos.}^2\varphi\end{array}\right.$$

Les deux termes de cette fraction sont divisibles par le quarré $(p-q)^2$, ce qui donne

$$\frac{2\varpi}{pq}D=\frac{\{(10p^2+10pq+4q^2)-(26p^2+38pq+5q^2)\text{Cos.}^2\varphi\}\text{Sin.}\varphi}{6(p-q)^3};$$

en conséquence

$$D=\frac{pq\{(10p^2+10pq+4q^2)-(26p^2+38pq+5q^2)\text{Cos.}^2\varphi\}\text{Sin.}\varphi}{12\varpi(p-q)^3}.$$

160. En appliquant les mêmes formules à la recherche du coefficient suivant E, j'ai trouvé

$$E=\frac{pq\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi}{48\varpi(p-q)^4}\left\{\begin{array}{l}-(145p^3+291p^2q+101pq^2+9q^3)\\+(206p^3+514p^2q+173pq^2+9q^3)\text{Cos.}^2\varphi\end{array}\right\}.$$

En conséquence, voici le tableau des cinq premiers coefficiens A, B, C, D, E, de la série $A+B\gamma+C\lambda^2+D\lambda^3+E\lambda^4+\ldots\ldots$, qui fait connaître les époques de toutes les conjonctions et oppositions du satellite avec la planète principale, qui peuvent avoir lieu dans un temps quelconque. On se rappellera que n désigne un nombre entier quelconque, *pair* dans les conjonctions, *impair* dans les oppositions du satellite vu de la planète. Nous continuerons d'employer la lettre φ, pour désigner l'angle $\frac{2\varpi A}{p}=\frac{q(n\varpi-\alpha)}{p-q}$. On aura

$$\begin{aligned}
2(p-q)\varpi A&=+pq(n\varpi-\alpha),\\
2(p-q)\varpi B&=-2pq\text{Sin.}\varphi,\\
4(p-q)^2\varpi C&=+pq(5p-3q)\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi,\\
12(p-q)^3\varpi D&=+pq(10p^2+10pq+4q^2)\text{Sin.}\varphi\\
&\quad-pq(26p^2+38pq+5q^2)\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}^2\varphi;\\
48(p-q)^4\varpi E&=-pq(145p^3+291p^2q+101pq^2+9q^3)\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi\\
&\quad+pq(206p^3+514p^2q+173pq^2+9q^3)\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}^3\varphi;
\end{aligned}$$

et ainsi des autres.

161. La révolution sydérale de Jupiter, exprimée en jours, est 4332,596308; telle est donc la valeur numérique de p. Quant à celles de ses satellites, on trouve

Pour le premier 1,7691378,

Pour le second 3,5511810,

Pour le troisième . . . 7,1545528,

Pour le quatrième . . . 16,6887697.

Le rapport $p:q$ est donc, pour les quatre satellites, ainsi qu'il suit :

Ponr le premier . . . . $p:q=2449:1$,

Pour le second . . . . $p:q=1220:1$,

Pour le troisième . . . $p:q=\ 606:1$,

Pour le quatrième . . . $p:q=\ 260:1$.

La fraction $\frac{q}{p}$ est donc très-petite pour tous les quatre satellites, et sur-tout pour les deux premiers dont les mouvemens se rapprochent le plus du mouvement uniforme et circulaire, dont les inégalités sont les moins sensibles, et dont les syzygies, très-fréquentes, ont le plus d'intérêt pour nous. En se bornant à la première puissance de cette fraction, on aura $\varphi=\frac{q(n\varpi-\alpha)}{p}$ et ensuite

$$2\varpi A=+\ q(n\varpi-\alpha)\ ,$$

$$2\varpi B=-2q\text{Sin.}\varphi\ ,$$

$$4\varpi C=+5q\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi\ ,$$

$$12\varpi D=+\ q\text{Sin.}\varphi(10-26\text{Cos.}^2\varphi)\ ,$$

$$48\varpi E=-\ q\text{Sin.}\varphi\text{Cos.}\varphi(145-206\text{Cos.}^2\varphi)\ ;$$

et ainsi des autres.

162. La série que l'on vient de trouver comprend donc ce qu'on a appelé la *première inégalité* des éclipses. Pour en faire l'application, commençons par démontrer quelques formules générales qui concernent ces éclipses; en nous occupant de la longitude seule, et en supposant ainsi l'orbite du satellite dans le plan même de celle de la planète principale. De plus, nous continuerons de regarder celle du satellite comme circulaire.

163. Soient donc S (fig. 2) le centre et SA=SB le rayon du soleil, dont la circonférence est ainsi représentée dans la figure. Représentons l'orbite de la terre par le cercle décrit du centre S avec le rayon ST. Soient I le centre et ID=IO le rayon de Jupiter, D et D′ deux points opposés de sa surface. Du centre I avec le rayon IL décrivons une circonférence de cercle, que nous prendrons pour l'orbite de quelqu'un de ses satellites. Menant de part et d'autre les deux tangentes BD, BD′ aux circonférences du soleil et de Jupiter, on aura en C le sommet du cône ténébreux que cette planète laisse derrière elle. Le satellite, en parcourant l'arc GG′ de son orbite, aura son immersion dans l'un de ces deux points et son émersion dans l'autre. Pour que l'une et l'autre puissent être apperçues de la terre, il faut que la tangente GO, menée du point G au bord opposé de la circonférence de Jupiter, traverse, après avoir été prolongée, l'orbite de la terre, dans les deux points H et K. Tant que ces intersections seront possibles, la durée entière de l'éclipse pourra être observée; mais il faudra se borner à observer l'une de ses deux phases, lorsque la tangente GFD prolongée passera entièrement à côté de l'orbite de la terre. Reste donc à trouver l'expression littérale des deux angles ISH et ISK

164. Les quantités données du problème sont au nombre de cinq, savoir:

a=SA=SB, rayon du soleil,

b=ID=ID′, rayon de Jupiter,

c=ST=SH=SK, distance moyenne des centres du soleil et de la terre,

h=IS, distance moyenne de Jupiter au soleil,

d=IL=IG=IG', distance du centre de Jupiter à son satellite.

165. Pour dresser la table des valeurs numériques de ces quantités, j'ai employé les dimensions et distances rapportées sous les n.os 57, 106 et 110 du troisième volume de l'*Astronomie physique* de Biot. Comme le rayon du soleil est égal à 109, 98 fois celui de la terre, j'ai divisé tous les nombres par 109, 98; au moyen de quoi le rayon du soleil devient l'unité commune de tous les nombres de la table. J'ai désigné par d, d', d'', d''' les distances du centre de Jupiter à celui de ses premier, second, troisième et quatrième satellites, respectivement, et j'ai obtenu ce qui suit:

$$\begin{aligned} a&=\quad 1{,}00000\,, & d&=0{,}61136\,,\\ b&=\quad 0{,}10517\,, & d'&=0{,}97270\,,\\ c&=219{,}19403\,, & d''&=1{,}55154\,,\\ h&=1140{,}41663\,; & d'''&=2{,}72907\,. \end{aligned}$$

166. La première chose qui se présente, c'est la longueur du cône ténébreux de Jupiter, ainsi que son angle au sommet. On aura, par les formules connues,

$$\mathrm{CI}=\frac{bh}{a-b}\,,\quad \mathrm{CS}=\frac{ah}{a-b}\,,\quad \mathrm{Sin.DCI}=\frac{a-b}{h}\,;$$

ce qui fait donc la distance moyenne de Jupiter au soleil $\gamma=134{,}039$, et l'angle C, que l'on pourra fort bien obtenir, avec son sinus et sa tangente, sera $=2'.42''$.

167. Pour passer de là à la position du point F, soit FI=y; donc FL=$d-y$ et DF=$\sqrt{y^2-b^2}$. On aura $\mathrm{CL}=\frac{bh}{a-b}-d$ ou $\mathrm{CL}=\frac{bh+bd-ad}{a-b}$; quantité que, pour abréger, nous désignerons par f. De CL=f, nous tirerons GL=fTang.C, en continuant de désigner par C l'angle DCI. On aura ensuite la proportion FD:DI=FL:GL ou, en élevant au quarré $y^2-b^2:b^2=(d-y)^2:f^2\mathrm{Tang.}^2\mathrm{C}$. Développant cette équation, on trouve

FI

$$FI \text{ ou } = y \frac{-b^2d+bf\,\text{Tang.}C\sqrt{d^2-b^2+f^2\text{Tang.}^2C}}{f^2\text{Tang.}^2C-b^2},$$

et par conséquent

$$FL \text{ ou } d-y = \frac{f^2 d\,\text{Tang.}^2C-bf\,\text{Tang.}C\sqrt{d^2-b^2+f^2\text{Tang.}^2C}}{f^2\text{Tang.}^2C-b^2}.$$

On a eu $\text{Sin.}C = \frac{a-b}{h}$, ce qui donne

$$\text{Cos.}C = \frac{\sqrt{h^2-a^2+2ab-b^2}}{h},$$

et par conséquent

$$\text{Tang.}C = \frac{a-b}{\sqrt{h^2-(a-b)^2}};$$

or, comme

$$h = 1140{,}41663,$$

$$a-b = \quad 0{,}89453,$$

on voit que le quarré de $a-b$ disparaît complètement devant celui de h, ce qui donne $\text{Tang.}C = \frac{a-b}{h}$ et $f\ \text{Tang.}C = b - \frac{(a-b)d}{h}$. Par cette même raison, la racine de $d^2-b^2+f^2\text{Tang.}^2C$ se réduira à d. On aura ainsi

$$FL = \frac{df\,\text{Tang.}C}{f\,\text{Tang.}C+b},\quad IF = \frac{bd}{f\,\text{Tang.}C+b}.$$

On trouvera ensuite

$$\text{Sin.}F = \frac{f\,\text{Tang.}C+b}{d} = \frac{2b}{d} - \frac{a-b}{h},$$

$$FS = \frac{2bh^2+2bdh-adh}{2bh-(a-b)d},$$

$$QS = \frac{2bh+2bd-ad}{d},$$

donc

$$\text{Cos.QSH} = \frac{2bh + 2bd - ad}{cd},$$

ou

$$\text{Cos.QSH} = \frac{b}{C} + \frac{h}{C}\,\text{Sin.F}.$$

On aura enfin

$$\text{Ang.TSH} = 90^\circ = (\text{F} + \text{QSH})\,,\ \text{Ang.TSK} = 90^\circ - (\text{F} - \text{QSH})\,;$$

et la position des points H et K de l'orbite terrestre sera rigoureusement déterminée.

168. En appliquant le calcul numérique à ces formules ; en employant de plus les notations F, F′, F″, F‴, pour désigner les points F et les angles SFQ qui répondent aux premier, deuxième, troisième et quatrième satellites, respectivement, on trouve

$$\begin{aligned}
&\text{Log.Sin.F} = 9.5356327\,,\ \text{Ang.F} = 20.^\circ\ 4'\ 34'',\\
&\text{Log.Sin.F}' = 9.3338680\,,\ \text{Ang.F}' = 12.^\circ\ 27'\ 26'',\\
&\text{Log.Sin.F}'' = 9.1296533\,,\ \text{Ang.F}'' = 7.^\circ\ 44'\ 47'',\\
&\text{Log.Sin.F}''' = 8.8824661\,,\ \text{Ang.F}''' = 4.^\circ\ 22'\ 30''.
\end{aligned}$$

On trouve ensuite les distances IF, ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}
&\text{Log IF} = 9.4862672\,,\ \text{Dist.IF} = 0{,}306385,\\
&\text{Log.IF}' = 9.6880319,\ \text{Dist.IF}' = 0{,}487564,\\
&\text{Log.IF}'' = 9.8922466\,,\ \text{Dist.IF}'' = 0{,}780273,\\
&\text{Log.IF}''' = 0.1394338\,,\ \text{Dist.IF}''' = 1{,}378585.
\end{aligned}$$

169. Passant de là au calcul des angles QSH, on trouve,

Pour le 1.er satellite . . . Cos.QSH = 1,786422 ,

2.me . . . . Cos.QSH = 1,122764 ,

3.me . . . . Cos.QSH = 0,7017543 ,

4.me . . . . Cos.QSH = 0,3973979 .

Les valeurs numériques des deux premiers cosinus, plus grandes que l'unité, font voir que la durée des éclipses du premier satellite ne pourra jamais être observée, et qu'on ne pourra pas observer non plus celle des éclipses du second, dans les moyennes distances de la terre et de Jupiter au soleil; mais cette observation sera possible dans les deux autres.

On trouve

$$\text{Pour le troisième}, \quad \text{Ang.QSH}=45°25'56'',$$

$$\text{Pour le quatrième}, \quad \text{Ang.QSH}=66°35'\;4'';$$

d'où il résulte

$$\text{Pour le troisième}, \begin{cases} \text{Ang.TSH}=\;\;36°49'27'', \\ \text{Ang.TSK}=127°41'19'', \end{cases}$$

$$\text{Pour le quatrième}, \begin{cases} \text{Ang.TSH}=\;\;19°\;2'26'', \\ \text{Ang.TSK}=152°12'34''. \end{cases}$$

OPTIQUE.

De la multiplicité des images d'un même objet, considéré à travers une glace posée obliquement, ou réfléchi par un miroir plan, non métallique;

Par M. GERGONNE.

CHACUN peut remarquer que si, de nuit, dans une chambre éclairée par une seule lumière, on interpose, entre l'œil et cette lumière, dans une direction très-oblique, un morceau de glace ou de verre, d'une certaine épaisseur, on aperçoit, à travers cette glace, une multitude d'images de la lumière, dont l'intensité décroît continuellement, jusqu'à ce qu'enfin elles cessent d'être aperçues. La même chose a à peu près lieu si, une lumière étant placée près d'un miroir non métallique, on veut en regarder obliquement l'image, de manière que le miroir se trouve interposé entre l'œil et cette image de la même manière que la glace ou le verre du premier cas. Il arrive seulement ici que, outre les images décroissant continuellement d'intensité, l'image la plus vive est précédée d'une autre dont l'intensité est beaucoup moindre. A la rigueur, les mêmes choses devraient avoir lieu de jour, et pour tout autre objet qu'une lumière; mais alors les images sont trop peu sensibles pour pouvoir être facilement observées.

Ces phénomènes doivent avoir été remarqués depuis long-temps. Lacaille, dans son *Optique* (*II.e partie*, *chap. VII*, *n.°* 327), fait même mention du second; mais la raison qu'il en donne, n'est propre qu'à prouver combien de son temps, malgré l'exemple donné par Newton, la philosophie naturelle était encore imparfaite. Il n'en est pas de même de M. Haüy qui, dans le deuxième volume de son *Traité élémentaire de physique* (*page* 319 *de la première édition*, *et page* 310 *de la seconde*), en a donné la seule explication véritable, la seule conforme aux principes de l'optique. Quant au premier phénomène, si l'on en excepte M. Biot qui en dit un mot en passant, au commencement de son *Mémoire sur les réfractions extraordinaires*, il n'est pas à ma connaissance que quelque auteur en ait fait mention.

Il ne pouvait entrer dans le plan de l'ouvrage de M. Haüy de soumettre son explication au calcul, qui seul peut faire connaître, avec détail et précision, les diverses circonstances que le phénomène est susceptible d'offrir. Ce savant ne disant rien d'ailleurs de l'autre phénomène qui a avec celui-là la liaison la plus étroite, j'ai tenté de compléter la théorie qui les concerne l'un et l'autre. Les résultats auxquels je suis parvenu ne sont probablement pas connus, et me paraissent assez remarquables pour mériter de l'être. Je m'occuperai d'abord uniquement du dernier des deux phénomènes; je ferai voir ensuite comment on peut ramener au premier les calculs qui lui sont relatifs.

Soient $MM_0M_1M_2 \ldots\ldots M_n$ et $NN_1N_2 \ldots\ldots N_n$ (fig. 3) les surfaces antérieure et postérieure d'un miroir plan, non métallique, d'une épaisseur constante. Soit L une lumière ; soit LMN la perpendiculaire abaissée du point L sur le plan de la glace, en sorte que MN en soit l'épaisseur. Soit LM_0 l'un des rayons incidens, rencontrant la surface antérieure du miroir au point M_0 ; une faible portion de ce rayon sera réfléchi en ce point, comme elle le serait par un miroir métallique, en sorte que l'angle de réflexion sera égal à l'angle d'incidence. Le surplus du même rayon sera réfracté suivant M_0N_1, de manière que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction ne dépendra aucunement de la direction du rayon primitif. Parvenu à l'étamage en N_1, et abstraction faite des petites dispersion et absorption qui pourront avoir lieu, ce rayon se réfléchira, suivant N_1M_1, en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Parvenu en M_1, il se partagera de nouveau en deux parties, dont la plus considérable sera réfractée suivant M_1R_1 parallèle à M_0R_0, tandis que l'autre, plus faible, sera réfléchie suivant M_1N_2, parallèle à M_0N_1. Il arrivera en N_2 la même chose qu'en N_1, en M_2 la même chose qu'en M_1, et ainsi de suite indéfiniment, du moins tant que les absorptions, dispersions, réfractions et réflexions successives n'auront pas consommé toute la lumière du rayon primitif LM_0. Ce seul rayon donnera donc naissance à une suite indéfinie d'autres rayons M_0R_0, M_1R_1, M_2R_2, ...M_nR_n, tous parallèles entre eux, décroissant continuellement d'intensité, à partir de M_1R_1, et faisant, avec le plan du miroir, le même angle que fait avec ce plan le rayon incident LM_0, mais en sens inverse.

Si présentement on fait varier la direction du rayon incident

LM_0, chacune des directions qu'il pourra prendre donnera lieu à un système de rayons réfléchis, tels que M_0R_0, M_1R_1, M_2R_2, ... M_nR_n, parallèles entre eux, dans chaque système, mais se croisant d'un système à l'autre ; en sorte qu'en quelque endroit que l'œil soit placé, devant la glace, il recevra, à la fois, le premier rayon d'un système, le deuxième d'un autre système, le troisième d'un suivant, et ainsi du reste ; d'où il résulte que le spectateur recevra, en effet, plusieurs images distinctes de la lumière L.

Le seul moyen propre à nous bien éclairer sur la situation de ces images, par rapport au spectateur, c'est d'assigner la nature des *Caustiques* auxquelles les rayons réfléchis de chaque ordre donnent naissance, par leurs intersections continuelles.

Si, par l'œil du spectateur et par la lumière, on imagine un plan perpendiculaire à la glace, il n'y aura que les seuls rayons incidens qui s'y trouveront compris qui pourront parvenir à ce spectateur ; on pourra donc supposer que tout se passe dans ce plan, et réduire ainsi le problème à un simple problème de géométrie plane.

Supposons que le plan dont il s'agit soit celui de la figure ; soit prolongée LM au de-là de M d'une quantité $MI_0 = ML$; on sait que ce point sera le lieu de l'image produite par la réflexion à la surface antérieure ; c'est-à-dire, de la seule image qu'on apercevrait si cette surface était celle d'un miroir métallique. Soit pris ce point I_0 pour origine des coordonnées rectangulaires ; les x positives étant dirigées suivant le prolongement de MI_0 du côté opposé au miroir, et les y positives du côté où nous supposons les rayons incidens.

Soient faits la distance de la lumière à la surface antérieure du miroir $LM = k$, l'épaisseur de ce miroir $MN = e$, l'angle d'incidence, égal à $MLM_0 = \theta$; et soit enfin $g : h$ le rapport constant du sinus d'incidence, dans l'air, au sinus de réfraction, dans la glace.

Soient posés, pour abréger,

$$\text{Tang.}\theta=A\,,\quad \frac{g}{h}=p\,,\quad \frac{\sqrt{g^2-h^2}}{h}=q\,,\ \text{d'où}\ p^2-1=q^2.$$

Les sinus d'incidence et de réfraction seront respectivement

$$\frac{A}{\sqrt{1+A^2}}\,,\quad \frac{A}{p\sqrt{1+A^2}}\,;$$

d'où il suit que la tangente de réfraction sera

$$\frac{A}{\sqrt{p^2+(p^2-1)A^2}}=\frac{A}{\sqrt{p^2+q^2A^2}}\,.$$

Or, les triangles $M_0N_1M_1$, $M_1N_2M_2$, $M_2N_3M_3$, ...$M_{n-1}N_nM_n$ sont tous isocèles et égaux ; ils ont leur hauteur commune $=MN=e$, et leur angle au sommet doit être double de l'angle de réfraction ; d'où il résulte qu'on doit avoir

$$M_0M_1=M_1M_2=M_2M_3=\ldots\ldots=M_{n-1}M_n=\frac{2eA}{\sqrt{p^2+q^2A^2}}\,;$$

et, par conséquent,

$$MM_n=MM_0+M_0M_n=kA+\frac{2neA}{\sqrt{p^2+q^2A^2}}\,.$$

D'après cela l'équation du rayon réfléchi M_nR_n sera

$$y-kA-\frac{2neA}{\sqrt{p^2+q^2A^2}}=-A(x+k)\,;$$

ou, en réduisant et chassant les dénominateurs,

$$(y+Ax)\sqrt{p^2+q^2A^2}=2neA\,; \qquad \text{(I)}$$

équation indépendante de k ; d'où il résulte que les dimensions des caustiques que nous obtiendrons devront l'être aussi.

Pour obtenir l'équation générale de ces caustiques, il faut, comme l'on sait, éliminer A entre l'équation (I) et sa dérivée, prise par rapport à cette lettre (*). Cette dérivée est, toutes réductions faites,

---

(*) Voyez la page 361 du 3.me volume de ce recueil.

$$x(p^2+q^2A^2)+q^2(y+Ax)A=2ne\sqrt{p^2+q^2A^2}\,. \qquad \text{(II)}$$

Pour éliminer facilement A entre les équations (I) et (II), considérons-y x et y comme deux inconnues ; nous en tirerons ainsi

$$x=2ne\frac{p^2}{(p^2+q^2A^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2ne}{p}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2A^2}}\right)^3,$$

$$y=2ne\frac{q^2A^3}{(p^2+q^2A^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2ne}{q}\left(\frac{qA}{\sqrt{p^2+q^2A^2}}\right)^3;$$

et par conséquent

$$\left(\frac{px}{2ne}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2A^2}},$$

$$\left(\frac{qy}{2ne}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{qA}{\sqrt{p^2+q^2A^2}};$$

équations d'où on tire, en prenant la somme de leurs quarrés

$$\left(\frac{px}{2ne}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{qy}{2ne}\right)^{\frac{2}{3}}=1; \qquad \text{(III)}$$

et telle est l'équation générale des caustiques cherchées.

Mais, en rapportant une ellipse à ses diamètres principaux $2a$, $2b$, l'équation de sa développée est

$$\left(\frac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{by}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1; \qquad (*)$$

(*) On sait, en effet, que l'équation générale de toutes les normales à l'ellipse est

$$b^2x'(y-y')=a^2y'(x-x'); \qquad (1)$$

les constantes arbitraires x', y' étant liées par la relation

$$b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2. \qquad (2)$$

Or, la développée d'une ellipse n'étant autre chose que la courbe à laquelle toutes ces normales sont tangentes, il s'ensuit (tom. III, pag. 361) que, pour

donc

donc nos caustiques sont les developpées d'une suite d'ellipses semblables, dont les axes se confondent avec ceux des x et des y, et dont les demi-axes, donnés par les équations

---

avoir l'équation de cette développée, il faut d'abord différencier les deux équations ci-dessus, par rapport à x' et y', ce qui donnera

$$\{a^2x-(a^2-b^2)x'\}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}-\{b^2y+(a^2-b^2)y'\}=0\,,$$

$$a^2y'\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}+b^2x'=0\,;$$

d'où on conclura, par l'élimination de $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}$,

$$b^2x'\{a^2x-(a^2-b^2)x'\}+a^2y'\{b^2y+(a^2-b^2)y'\}=0\,; \qquad (3)$$

et il ne sera plus question que d'éliminer x', y' entre les trois équations (1), (2), (3).

Or, si l'on considère x et y comme inconnues, dans les équations (1), (3), on en tirera, en ayant égard à l'équation (2),

$$x=+\frac{(a^2-b^2)x'^3}{a^4}\,,\quad y=-\frac{(a^2-b^2)y'^3}{b^4}\,;$$

d'où

$$\left(\frac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{x'^2}{a'^2}\,,\quad \left(\frac{by}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{y'^2}{b^2}\,;$$

en prenant la somme de ces équations, et ayant toujours égard à l'équation (2), on obtiendra l'équation indiquée dans le texte.

Ce résultat conduit à soupçonner que souvent des caustiques dont les équations sont très-compliquées pourraient bien être des développées d'autres courbes dont les équations seraient incomparablement plus simples.

$$\frac{a}{a^2-b^2}=\frac{p}{2ne}\ ,\quad \frac{b}{a^2-b^2}=\frac{q}{2ne}\ ,$$

ont conséquemment pour expression

$$a=2nep\ ,\qquad b=2neq\ ;$$

quantités proportionnelles à n et e, et dont le rapport ne dépend que de p et q ; l'expression générale de l'excentricité de ces ellipses est

$$\sqrt{a^2-b^2}=2ne\ ,$$

quantité qui, au contraire, est indépendante de p et q.

De ces divers résultats dérivent immédiatement plusieurs conséquences, dont les plus remarquables sont les suivantes : 1.° de quelque manière que varie la direction du rayon incident, les rayons réfléchis d'un même ordre sont constamment normaux à une même ellipse, et conséquemment tangens à sa développée; 2.° cette ellipse a son grand axe sur la perpendiculaire menée par la lumière au plan du miroir; 3.° la situation de son centre dépend de celle de la lumière; mais ses dimensions en sont indépendantes; 4.° le rapport entre ses deux axes ne dépend absolument que du pouvoir réfringent de la glace ; son excentricité est uniquement proportionnelle à l'épaisseur de cette glace ; 5.° Enfin, les ellipses auxquelles sont normaux les rayons réfléchis de différens ordres sont semblables et concentriques; et leurs dimensions croissent suivant une progression arithmétique qui a pour raison les dimensions de la plus petite d'entr'elles. (*)

(*) Une fois parvenu, par l'analise, à ces divers résultats, rien ne m'eût été plus facile que de les exposer et démontrer ici par des considérations pu-

Rien n'est plus facile, d'après ce qui précède, que d'assigner, avec une approximation suffisante, le lieu des diverses images, lorsque l'on connait, à la fois, l'épaisseur et le pouvoir refringent du miroir (*), la situation de la lumière et celle de l'œil. Pour abréger le travail, on commencera par déterminer le centre commun I_0 de toutes les ellipses, puis les foyers et le grand axe de la plus grande de celles que l'on aura le dessein de tracer. On en déterminera un grand nombre de points, en se servant de la propriété des foyers. Divisant ensuite par des droites, en deux parties égales, les angles que forment les rayons vecteurs de ces différens points, les intersections consécutives de ces droites formeront sensiblement la développée. Menant alors par le centre, dans toutes les directions, un grand nombre de droites aux points de l'ellipse et de sa développée, et divisant chacune d'elles en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le nombre qui exprime le rang de l'ellipse et de la développée déjà tracées, on obtiendra ainsi les points homologues des ellipses et développées des ordres inférieurs ; on pourra donc tracer à peu près toutes ces courbes, ainsi qu'on le voit dans la figure, où l'on en a supprimé la partie dont on n'avait pas besoin. Si alors O est le lieu de l'œil, il ne sera plus question que de mener par ce point, suivant une direction normale aux ellipses ou tangente à leurs développées, les droites OI_1, OI_2, OI_3, ...; et leurs points de contact I_1, I_2, I_3, ... avec ces développées seront, avec le point I_0, les lieux des diverses images, lesquelles seront conséquemment situées, avec l'œil O et la lumière

---

rement géométriques ; mais, outre qu'il est permis de douter qu'il en fût résulté quelque avantage, sous le rapport de la clarté et de la brièveté, il me semble qu'il y a une sorte de mauvaise foi à suivre, dans l'exposition des vérités auxquelles on est parvenu, des procédés différens de ceux qui nous les ont fait découvrir.

(*) Dans les cas ordinaires, on aura $g:h::3:2$, ce qui donne $p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{7}{5}$ environ.

L, dans un même plan perpendiculaire au tableau. L'image I_0 sera peu sensible; l'image I_1 sera la plus apparente, et les suivantes I_2, I_3, I_4,..... décroîtront progressivement d'intensité, jusqu'à ce qu'enfin elles deviennent tout à fait insensibles.

On peut désirer de connaître la courbe sur laquelle se trouvent toutes ces images, pour une situation donnée de l'œil O du spectateur; voici à quoi se réduit cette recherche. L'équation (3) donne, en différenciant

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{p^2y}{q^2x}},$$

d'où il suit que l'équation de la tangente par un point I_n, dont les coordonnées sont x', y', est

$$y-y'=-(x-x')\sqrt[3]{\frac{p^2y'}{q^2x'}};$$

si l'on veut que cette tangente passe par le point O, en désignant par α, β les deux coordonnées de ce point, l'équation de la tangente deviendra, en supprimant les accents

$$y-\beta=-(x-\alpha)\sqrt[3]{\frac{p^2y}{q^2x}};$$

ou

$$(y-\beta)\sqrt[3]{q^2x}+(x-\alpha)\sqrt[3]{p^2y}=0;$$

ou enfin

$$q^2x(y-\beta)^3+p^2y(x-\alpha)^3=0;$$

x et y étant les coordonnées du point de contact. Il faudrait donc, pour obtenir l'équation de la courbe cherchée, éliminer n de celle-ci, au moyen de l'équation (III); mais, puisque n n'y entre pas, il faut en conclure qu'elle est elle-même l'équation de cette courbe.

Ainsi, la nature et la situation de la courbe sur laquelle les diverses images se trouvent situées est tout à fait indépendante de l'épaisseur de la glace; tellement que, si cette épaisseur pouvait varier, pendant la durée de l'observation, les images ne feraient simplement que se resserrer ou s'écarter les unes des autres, sans quitter la courbe dont il s'agit. C'est ce qui arriverait, par exemple, si l'on mettait en expérience un miroir métallique horizontal, garni d'un rebord, et recouvert d'une couche d'eau qui augmenterait ou diminuerait peu à peu d'épaisseur, soit au moyen d'un conduit qui en apporterait de la nouvelle, soit au moyen d'une ouverture qui la laisserait au contraire échapper.

Il est clair que, toutes choses égales d'ailleurs, plus la glace est épaisse et plus ausssi la distance entre les images doit être grande. On sent aussi que, pour une épaisseur donnée de la glace, et une situation donnée de la lumière, il y a une certaine situation de l'œil, plus favorable que toute autre au parfait développement du phénomène. Enfin, le plus ou moins grand pouvoir refringent de la glace influe aussi sur la distance entre les images; puisque les ellipses seront plus ou moins excentriques, à proportion que ce pouvoir sera moindre ou plus grand.

Dans tout ce qui précède, j'ai constamment supposé que les surfaces antérieure et postérieure du miroir étaient rigoureusement planes et parallèles. Dans un tel état de choses, il est évident que si cette glace glisse ou tourne, sans sortir de son plan, il n'en devra absolument résulter aucun changement dans l'aspect du phénomène. Mais il s'en faut bien que les choses se passent ainsi, dans la réalité, et cela prouve qu'il est bien peu de miroirs qui satisfassent à cette double condition. J'ai même lieu de présumer que la moindre courbure ou le moindre défaut de parallélisme dans les deux surfaces du miroir exerce une influence notable sur l'aspect du phénomène; c'est ce dont au reste on pourrait s'assurer, en traitant la question sous un point de vue un peu plus général que celui sous lequel je l'ai envisagée.

Tout étant d'ailleurs daus la figure 4 comme dans la figure 3; supposons présentement que la glace ne soit point étamée; tout se passera comme dans le premier cas ; avec cette différence qu'une partie de la lumière parvenue en N_1, N_2, N_3, ... N_n, sortira de la glace du côté opposé à la lumière, suivant des directions N_1Q_1, N_2Q_2, N_3Q_3, ... N_nQ_n, parallèles à LM_0. Ainsi, un spectateur placé du même côté de la glace que la lumière pourra observer des effets tout pareils à ceux qui viennent d'être décrits; si ce n'est pourtant qu'à raison des pertes de lumière qui ont lieu en N_1, N_2, N_3, ... N_n, le phénomène sera beaucoup moins sensible ; mais, il le sera davantage pour le spectateur placé du côté opposé, lequel devra être affecté d'un nombre indéfini d'images de la lumière.

Soit pris ici le point L pour origine, en donnant d'ailleurs les mêmes directions aux axes; nous aurons, comme ci-dessus,

$$M_0M_1=M_1M_2=\ldots=M_{n-1}M_n=N_1N_2=N_2N_3=\ldots=N_{n-1}N_n=\frac{2eA}{\sqrt{p^2+q^2A^2}};$$

nous aurons d'ailleurs

$$NN_n=NN_1+N_1N_n=MM_0+\tfrac{1}{2}M_0M_1+N_1N_n=kA+\frac{(2n-1)eA}{\sqrt{p^2+q^2A^2}};$$

l'équation du rayon N_nQ_n sera donc

$$y-kA-\frac{(2n-1)eA}{\sqrt{p^2+q^2A^2}}=A(x-k-e) ;$$

ou, en réduisant et chassant le dénominateur,

$$\{y+A(e-x)\}\sqrt{p^2+q^2A^2}=(2n-1)eA ;$$

équation qui deviendra l'équation (I), en y changeant simplement $e-x$ en x et $2n-1$ en $2n$.

Il est aisé de conclure de là que tout se passera exactement ici comme dans le premier cas, avec cette différence 1.° qu'en prenant sur LM une partie $LL'=MN=e$, le point L′ sera le centre commun de toutes les ellipses et développées; 2.° que ce centre commun L′ ne sera le lieu d'aucune image; 3.° qu'enfin la première ellipse n'aura ses dimensions que moitié de celles de la première ellipse du cas précédent; et que les dimensions de toutes les autres formeront une progression arithmétique croissante, ayant pour raison le double de dimensions de cette première ellipse.

Je terminerai par observer que, dans l'un et dans l'autre cas, si le pouvoir refringent de la glace était moindre que celui de l'air; c'est-à-dire, si h était plus grand que g, q deviendrait imaginaire, et les ellipses se changeraient en hyperbole.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 92 de ce volume;

Par M. J. B. Durrande (*).

Problème. Deux points étant donnés de position par rapport à une droite indefinie; on propose de décrire trois cercles, de manière que deux d'entr'eux se touchent, touchent la droite donnée et touchent respectivement le troisième aux deux points donnés?

(*) M. Durrande est un géomètre de 17 ans, qui a appris les mathématiques sans autre secours que celui des livres. *J. D. G.*

Solution. Les deux points donnés peuvent être situés d'un même côté de la droite donnée, ou bien ils peuvent être situés de différens côtés de cette droite, ce qui fait deux cas que nous allons considérer successivement.

Premier cas. Soient KHG (fig. 5, 6, 7) la droite indéfinie donnée, et A, B les deux points donnés d'un même côté de cette droite. Il s'agit de décrire trois cercles tels que deux d'entre eux se touchent, touchent la doite donnée et touchent le troisième l'un en A et l'autre en B.

Concevons que le problème soit résolu. Soient AFGPM, BFHQN deux cercles se touchant en F, touchant respectivement la droite donnée en G et H, et touchant un troisième cercle le premier en A et le second en B; soient D, E, C les centres respectifs de ces trois cercles.

Soient menées une droite MABN par les deux points donnés et une autre PDFEQ par les centres des deux premiers cercles; il est connu (*) que ces deux droites concourront en un même point K de la droite donnée; et, puisque A et B sont donnés, le point *k* le sera aussi.

Par la propriété des sécantes et par une autre propriété connue, on aura les trois proportions

$$KA : KF :: KP : KM ,$$

$$KN : KQ :: KF : KB ,$$

$$KQ : KN :: KM : KP \quad (^{**}) ;$$

desquelles on conclura, par multiplication et réduction,

(*) Voyez l'*Apollonius Gallus* de Viète.
(**) *Ibidem.*

KA

$$KA : KF :: KF : KB ;$$

KF est donc moyenne proportionnelle entre les longueurs données KA et KB ; cette longueur KF est donc donnée, et par conséquent si l'on imagine du point K comme centre, et avec la longueur KF pour rayon un arc RFS, cet arc sera aussi donné; et, comme il touchera à la fois en F les deux cercles dont les centres sont D et E, le problème sera réduit à décrire deux cercles touchant à la fois la droite donnée et l'arc RFS, et passant de plus le premier par A et le second par B (*). Ces deux cercles étant décrits, le concours des prolongemens des rayons DA et EB déterminera le centre C du troisième.

Cette construction serait en défaut, si la droite qui joint les deux points donnés était parallèle à la droite donnée ; mais alors la perpendiculaire sur le milieu de cette droite serait une tangente commune aux deux premiers cercles ; de manière que le problème serait réduit à celui-ci : décrire un cercle qui, touchant les deux côtés d'un angle droit, passe en outre par un point donné (**).

Si l'on exigeait que les deux cercles qui doivent toucher la droite donnée fussent intérieurs l'un à l'autre, ils ne pourraient toucher cette droite qu'au même point. Alors A et B étant toujours les deux points donnés (*fig.* 8), et F étant le point où les cercles dont les centres sont D et E, touchent la droite donnée. Il est connu que le cercle qui touche le côté CE du triangle des centres et les prolongemens des deux autres DE et DC, passe par les trois points de contact A, B, F ; AB est donc une corde de ce cercle;

(*) Voyez, pour ces problèmes, les pages 350, 353 et 354 du IV volume de ce recueil.

(**) *Ibidem.*

J. D. G.

et, comme il doit avoir son centre sur la droite donnée, tangente commune à deux des cercles, ce centre O sera l'intersection de cette droite avec la perpendiculaire sur le milieu de AB. Décrivant donc de ce point comme centre, et avec $OA=OB$ pour rayon, un arc; cet arc, par son intersection avec la droite donnée, déterminera le point commun de contact F; et alors le problème n'aura plus de difficulté.

Deuxième cas. Les points donnés A et B étant de différens côtés de la droite donnée OF (fig. 9, 10), les deux cercles qui doivent toucher cette droite la toucheront aussi de différens côtés; et, comme ils doivent de plus se toucher, ils ne pourront la toucher qu'au même point F qui sera aussi leur point commun; on se trouvera donc encore dans le dernier cas que nous venons d'examiner; il ne s'agira donc encore ici que d'élever sur le milieu de AB une perpendiculaire coupant la droite donnée en O, et de décrire ensuite du point O comme centre, et avec $OA=OB$ pour rayon, un arc qui déterminera sur la droite donnée le point de contact F.

Lorsque la droite menée par les deux points donnés est perpendiculaire à la droite donnée, toutes ces constructions sont superflues, et le problème devient de la première facilité.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. Construire quatre sphères de manière que trois d'entre elles se touchent deux à deux, touchent un même plan donné et touchent la quatrième en trois points donnés ?

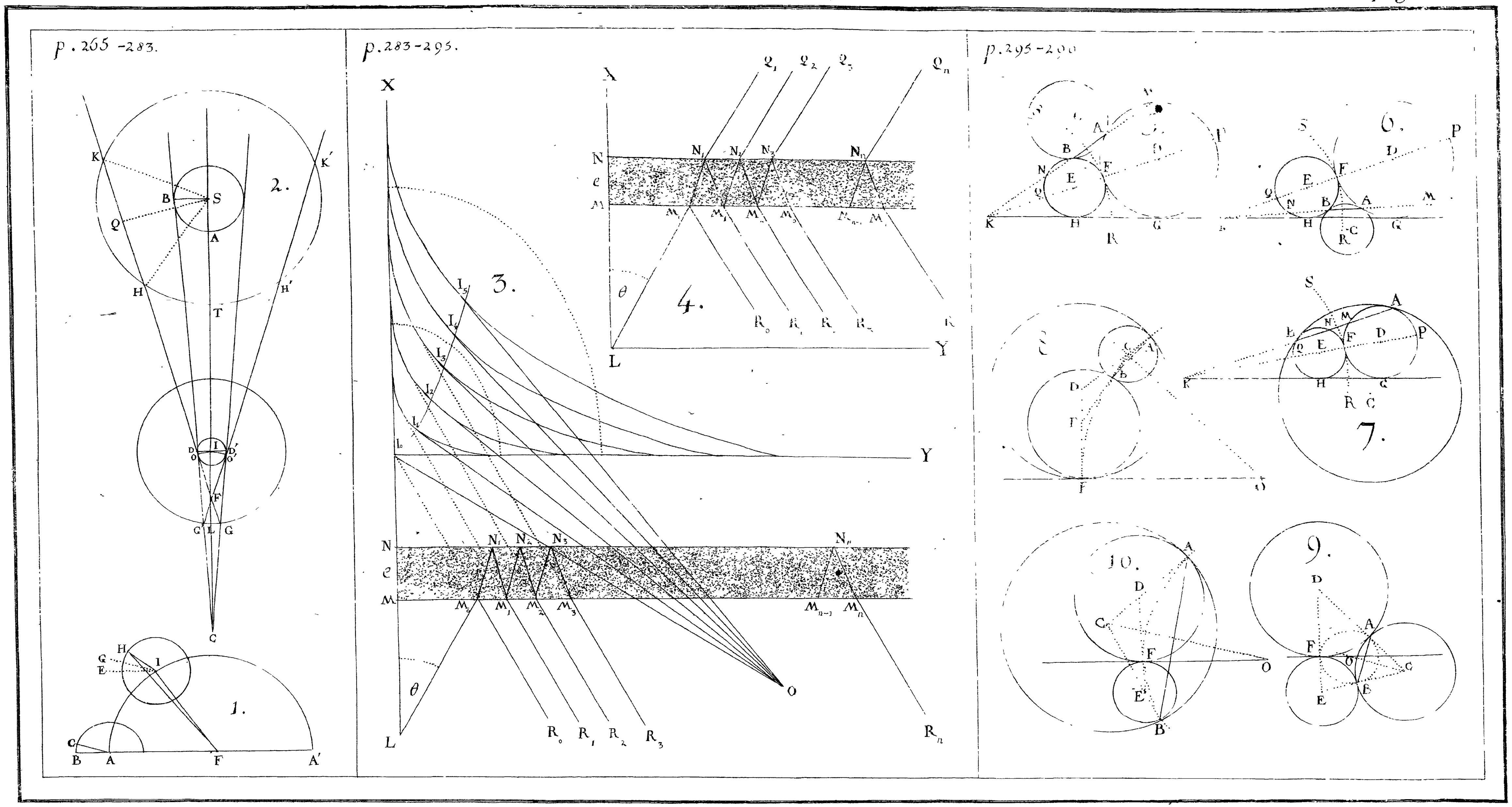
II. Construire quatre sphères de manière que deux d'entre elles se touchent en un point donné, que les deux autres se touchent aussi en un point donné, touchent chacune de celles-là, et touchent à la fois les deux faces d'un angle dièdre donné ?

Problème d'Analise.

Assigner l'intégrale finie et complète de l'équation différentielle

$$\mathrm{d}y+y^2e^{\int X\mathrm{d}x}.\,\mathrm{d}x=e^{-\int X\mathrm{d}x}.\,X'\mathrm{d}x\ ,$$

dans laquelle X est supposé une fonction quelconque de x dont la différentielle est $X'\mathrm{d}x$, et où e est la base des logarithmes naturels ?



J.D.G. fecit.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 32 de ce volume;

Par M. J. B. DURRANDE.

LEMME. Dans un quadrilatère, qui à deux angles droits opposés l'un à l'autre, un angle oblique et les deux côtés adjacens étant donnés, déterminer les deux autres côtés, ainsi que la diagonale qui joint les sommets des deux angles obliques?

Solution. Soient θ l'angle oblique donné, g, h les deux côtés qui le comprennent, y et x les côtés respectivement opposés, et z la diagonale qui joint les sommets des angles obliques.

g est la somme des projections de h et y sur sa direction; et h est pareillement la somme des projections de g et x sur sa direction; d'où il résulte qu'on doit avoir

$$g=h\text{Cos.}\theta+y\text{Sin.}\theta\,,\quad h=g\text{Cos.}\theta+x\text{Sin.}\theta\,;$$

c'est-à-dire,

$$y=\frac{g-h\text{Cos.}\theta}{\text{Sin.}\theta}\,,\quad x=\frac{h-g\text{Cos.}\theta}{\text{Sin.}\theta}\,;$$

mais on a de plus

$$z=\sqrt{g^2+x^2}=\sqrt{h^2+y^2}\,;$$

donc, en substituant,

$$z=\frac{\sqrt{g^2-2gh\text{Cos.}\theta+h^2}}{\text{Sin.}\theta}\,.$$

PROBLÈME I. Trois cercles, tracés sur un même plan; étant tels que chacun d'eux touche les deux autres; trouver, en fonction de leurs rayons, 1.° le rayon du cercle qui passe par leurs points de contact deux à deux; 2.° le rayon du cercle qui passe par leurs centres?

Solution. Soient A, B, C les centres et a, b, c les rayons respectifs des trois cercles dont il s'agit. Le triangle ABC pourra être quelconque, puisqu'il se trouve dépendre de trois élémens arbitraires et indépendans.

Le cercle inscrit à ce triangle a, par la propriété des tangentes partant d'un même point, ses points de contact avec les côtés tellement situés que chaque sommet est également distant des points de contact avec les côtés qui concourent à ce sommet; d'où il suit que ces points sont aussi les points de contact des cercles deux à deux. Ainsi, le cercle qui passe par les points de contact des cercles donnés deux à deux n'est autre chose que le cercle inscrit au triangle ABC. Quant au cercle qui contient leurs centres, c'est évidemment le cercle circonscrit au même triangle.

La question proposée se trouve donc ramenée à déterminer, en fonction de a, b, c, les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC; soient D, E leurs centres respectifs, d, e leurs rayons.

Par les formules connues, on a

$$Cos.\mathrm{C}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}{2\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}};$$

mais, on a d'ailleurs

$$\overline{\mathrm{AB}}=a+b\,,\quad \overline{\mathrm{BC}}=b+c\,,\quad \overline{\mathrm{CA}}=c+a\,;$$

donc, en substituant

$$Cos.\mathrm{C}=\frac{c^2+(a+b)c-ab}{c^2+(a+b)c+ab};$$

et de là

$$Sin.\mathrm{C}=\frac{2\sqrt{abc(a+b+c)}}{(c+a)(c+b)}\ .$$

En remarquant que l'aire t du triangle est la moitié du produit de deux côtés par le sinus de l'angle compris, on aura

$$t=\sqrt{abc(a+b+c)}\ .$$

Les perpendiculaires abaissées du centre D sur les côtés $\overline{\mathrm{CA}}$, $\overline{\mathrm{CB}}$, et dont la longueur commune est d, formeront avec ces côtés un quadrilatère bi-rectangle dont les deux autres côtés ont aussi une longueur commune c et comprennent entre eux l'angle C, connu par ce qui précède; on aura donc (*Lemme*)

$$d=\frac{c(1-Cos.\mathrm{C})}{Sin.\mathrm{C}}\ ;$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$d=\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\ ;$$

tel est donc le rayon du cercle qui contient les points de contact.

Si l'on voulait avoir la distance DC, on trouverait d'abord

$$\mathrm{DC}=\frac{c\sqrt{2(1-Cos.\mathrm{C})}}{Sin.\mathrm{C}}\ ;$$

puis, en substituant

$$\mathrm{DC}=\sqrt{\frac{c(c+a)(c+b)}{a+b+c}}\ .$$

Les perpendiculaires abaissées du centre E sur les côtés $\overline{\mathrm{CA}}$ et $\overline{\mathrm{CB}}$, forment avec ces côtés un autre quadrilatère bi-rectangle, dont un angle oblique est encore C et dont les deux côtés adjacens sont $\frac{1}{2}(c+a)$ et $\frac{1}{2}(c+b)$. La diagonale qui joint les deux angles obliques étant e, on aura (*Lemme*)

$$e=\frac{\sqrt{(c+a)^2-2(c+a)(c+b)Cos.C+(c+b)^2}}{2Sin.C};$$

ou, en substituant,

$$e=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4\sqrt{abc(a+b+c)}}.$$

et tel est le rayon du cercle qui contient les centres.

Si l'on représente de plus par α la perpendiculaire abaissée du même point sur le côté $\overline{BC}$, on aura

$$\alpha=\frac{(a+c)-(b+c)Cos.C}{2Sin.C};$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$\alpha=(b+c).\frac{a^2+(b+c)a-bc}{4\sqrt{abc(a+b+c)}}.$$

PROBLÈME II. Quatre sphères étant tellement situées dans l'espace que chacune d'elles touche les trois autres ; on propose de démontrer que leurs six points de contact, deux à deux, sont sur une même sphère ? On demande, en outre, de déterminer, en fonction des rayons de ces quatre sphères, 1.° *le rayon de la sphère qui contient leurs points de contact deux à deux;* 2.° *le rayon de la sphère qui passe par leurs centres ?*

Solution. Soient A, B, C, D les centres et a, b, c, d, les rayons respectifs des quatre sphères données. Le tétraèdre ABCD ne pourra être quelconque, puisqu'il se trouve uniquement dépendre de quatre élémens arbitraires et indépendans, lesquels sont les rayons des quatre sphères données. On voit, en effet, que, l'une quelconque de ses arêtes étant nécessairement la somme des rayons de deux de ces sphères, l'arête opposée doit être la somme des rayons des deux autres ; de sorte qu'il y a entre les six arêtes de ce tétraèdre ces trois relations, que la somme de deux arêtes opposées quelconques est constante et égale à la somme des rayons des quatre sphères données.

Concevons qu'on ait inscrit des cercles aux quatre faces de ce tétraèdre ; les points de contact de ces cercles avec les arêtes qui terminent respectivement les faces auxquelles ils sont inscrits seront évidemment (*Problème I*) les points de contact des quatre sphères deux à deux ; d'où il résulte que les deux cercles tangens à une même arête la toucheront au même point ; ou, ce qui revient au même, que les quatre cercles se toucheront deux à deux en six points, où ils auront les arêtes pour tangentes communes.

Par les points de contact qui appartiennent aux trois arêtes d'un même angle trièdre quelconque, concevons trois plans respectivement perpendiculaires à ces arêtes ; ces plans passant, deux à deux, par les centres des trois cercles inscrits correspondants se couperont suivant les axes de ces cercles, qui conséquemment concourront en un même point ; et il est aisé d'en conclure que les axes des quatre cercles concourent en ce point.

Le point de concours des quatre axes est évidemment également distant de tous les points de la circonférence de chaque cercle, en particulier ; puis donc que ces cercles ont, deux à deux, un point qui leur est commun, il faut en conclure que le point de concours des quatre axes est également distant de tous les points de toutes les circonférences, et conséquemment des six points de contact de nos cercles deux à deux, lesquels se trouvent tous conséquemment sur une même sphère, dont nos quatre cercles sont les intersections avec les faces du tétraèdre, et à laquelle toutes ses arêtes sont tangentes. Quant à la sphère qui contient les centres des quatre sphères données, c'est évidemment la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

La question proposée se trouve donc ramenée à déterminer, en fonction de a, b, c, d, le rayon de la sphère qui touche à la fois les six arêtes du tétraèdre ABCD, et le rayon de la sphère circonscrite au même tétraèdre : problème qu'au surplus on ne saurait se proposer pour un tétraèdre quelconque. Soient E , F les centres de ces sphères et e , f leurs rayons respectifs.

En désignant simplement les angles dièdres par leurs arêtes ; l'angle trièdre D donnera , par les formules connues ,

$$Cos.\overline{\text{DC}}=\frac{Cos.\text{ADB}-Cos.\text{CDA}Cos.\text{CDB}}{Sin.\text{CDA}Sin.\text{CDB}} .$$

Mais on a (*Probl. I*)

$$Cos.\text{CDA}=\frac{d^2+(a+c)d-ac}{(a+d)(c+d)} ,\qquad Sin.\text{CDA}=\frac{2\sqrt{acd(a+c+d)}}{(a+d)(c+d)} ;$$

$$Cos.\text{CDB}=\frac{d^2+(b+c)d-bc}{(b+d)(c+d)} ,\qquad Sin.\text{CDB}=\frac{2\sqrt{bcd(b+c+d)}}{(b+d)(c+d)} ;$$

$$Cos.\text{ADB}=\frac{d^2+(a+b)d-ab}{(a+d)(b+d)} ,$$

donc

$$Cos.\overline{\text{DC}}=\frac{(c+d)^2\{d^2+(a+b(d-ab\}-\{d^2+(a+c)d-ac\}\{d^2+(b+c)d-bc\}}{4cd\sqrt{ab(a+c+d)(b+c+d)}} ;$$

ou , en développant et réduisant ,

$$Cos.\overline{\text{DC}}=\frac{c^2(ad+bd-ab)+d^2(ac+bc-ab)}{2cd\sqrt{ab(a+c+d)(b+c+d)}} ;$$

de là

$$Sin.\overline{\text{DC}}=\frac{(c+d)\sqrt{abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)}}{2cd\sqrt{ab(a+c+d)(b+c+d)}} .$$

Si l'on se rappelle que le volume T d'un tétraèdre est les deux tiers du produit des aires de deux de ses faces multiplié par le sinus de leur inclinaison et divisé par l'arête qu'elles déterminent ; et si l'on fait attention (*Prob. I*) que

$$\text{CAD}=\sqrt{acd(a+c+d)} ,\quad \text{CBD}=\sqrt{bcd(b+c+d)} ,$$

on trouvera facilement

$$T=\frac{1}{3}\sqrt{abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)}\ ;$$

fonction symétrique de a, b, c, d, comme on pouvait bien s'y attendre.

Si du point E on abaisse des perpendiculaires sur les plans des faces CAD, CBD, et qu'on joigne leurs pieds au point de contact de DC avec la sphère dont E est le centre ; on formera un quadrilatère bi-rectangle, dans lequel deux côtés seront les rayons des cercles inscrits à ces mêmes faces : rayons que nous représenterons respectivement par α et β. L'angle compris sera égal à l'angle dièdre $\overline{\text{DC}}$, et la diagonale qui joindra son sommet au sommet opposé sera le rayon e de la sphère qui contient les points de contact ; on aura donc (*Lemme*)

$$e=\frac{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta\,Cos.\overline{\text{DC}}+\beta^2}}{Sin.\overline{\text{DC}}}\ .$$

Mais, nous avons les valeurs de sinus et cosinus $\overline{\text{DC}}$, et l'on a de plus (*Prob. 1*)

$$\alpha=\sqrt{\frac{bcd}{b+c+d}}\,,\qquad \beta=\sqrt{\frac{acd}{a+c+d}}\ ;$$

il viendra donc, en substituant

$$e=\frac{2abcd}{\sqrt{abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)}}\ ;$$

ou encore

$$e=\frac{2}{3}\cdot\frac{abcd}{T}\ ;$$

c'est-à-dire, que le rayon de la sphère qui contient les six points de contact de quatre sphères dont chacune touche les trois autres, est les deux tiers du quotient de la division du produit des rayons des quatre sphères par le volume du tétraèdre qui a ses sommets à leurs centres.

Du centre F soient abaissées des perpendiculaires sur les plans des deux faces CAD, CBD; ces perpendiculaires et les droites qui joindront leurs pieds au milieu de l'arête $\overline{CD}$ formeront un quadrilatère bi-rectangle, dans lequel un angle sera encore égal à l'angle dièdre $\overline{CD}$; ses deux côtés comprenant cet angle seront les distances de l'arête $\overline{CD}$ aux centres des cercles circonscrits aux mêmes faces: distances que nous désignerons respectivement par β' et α'; ainsi, en désignant par k la distance du point F à l'arête CD, cette distance sera la diagonale du quadrilatère; on aura donc (*Lemme*)

$$k=\frac{\sqrt{\alpha'^2-2\alpha'\beta' Cos.C+\beta'^2}}{Sin.C}\;;$$

mais, $Sin.C$ et $Cos.C$ sont connus, et l'on a d'ailleurs (*Prob. I*)

$$\alpha'=(c+d)\frac{b^2+(c+d(b-cd}{4\sqrt{bcd(b+c+d)}}\;,\quad \beta'=(c+d)\frac{a^2+(c+d)a-cd}{4\sqrt{acd(a+c+d)}}\;;$$

il viendra donc, en substituant,

$$k=\frac{1}{6T}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} acd(a+c+d)\{b^2+(c+d)b-cd\}^2 \\ -\{b^2+(c+d)b-cd\}\{a^2+(c+d)a-cd\}\{c^2(ad+bd-ab)+d^2(ac+bc-ab)\} \\ +bcd(b+c+d)\{a^2+(c+d)a-cd\}^2 \end{array}\right\}}\;;$$

mais, en menant $FD=f$, cette droite est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont k et $\frac{1}{2}(c+d)$ sont les côtés de l'angle droit; d'où il suit qu'on doit avoir

$$f^2=k^2+\tfrac{1}{4}(c+d)^2=k^2+\frac{9(c+d)^2T^2}{36T^2}\;;$$

en se rappelant donc que

$$9T^2=abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)\;;$$

il viendra

$f=$

$$f=\frac{6}{6T}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} acd(a+c+d)\{b^2+(c+d)b-cd\}^2+bcd(b+c+d)\{a^2+(c+d)a-cd\}^2 \\ +(c+d)^2\{abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)\} \\ -\{b^2+(c+d)b-cd\}\{a^2+(c+d)a-cd\}\{c^2(ad+bd-ab)+d^2(ac+bc-ab)\} \end{array}\right\}}\;;$$

ou en développant réduisant et décomposant

$$f=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)\{(ab+cd)+(ac+bd)+(bc+ad)\}}{abcd(a+b+c+d)^2-(ab+cd)(ac+bd)(bc+ad)}}\,.$$

Telle est donc l'expression du rayon de la sphère qui contient les centres des quatre sphères données.

Solutions du problème d'arithmétique proposé à la page 220 de ce volume.

ÉNONCÉ. *Quels sont les nombres dont toutes les puissances ont, pour leurs* n *derniers chiffres à droite, respectivement, les* n *derniers chiffres à droite de ces nombres eux-mêmes?*

Première solution;

Par M. Tédenat, correspondant de l'institut, recteur de l'académie de Nismes.

I. Soient N, N' deux facteurs de n chiffres au moins, et concevons qu'on les ait partagés, l'un et l'autre en deux tranches dont la dernière à droite ait n chiffres. Soient alors respectivement a, a' les tranches de gauche et b, b' les tranches de droite, considérées les unes et les autres comme des nombres isolés, on aura ainsi

$$N=10^n a+b\ ;$$

$$N'=10^n a'+b'\ ;$$

d'où on conclura

$$NN'=\{10^n aa'+(ab'+ba')\}10^n+bb'\ ;$$

A cause du facteur 10^n qui affecte la première partie de ce produit, elle n'aura aucune influence sur ses n derniers chiffres à droite, lesquels ne dépendront ainsi que de b et b' ; c'est-à-dire que, pour que le produit de deux nombres ait à sa droite n chiffres donnés, disposés daus un ordre donné, il est nécessaire et il suffit que la dernière tranche de n chiffres de la droite du multiplicande, multipliée par la dernière tranche de n chiffres de la droite du multiplicateur donne un produit qui ait ces mêmes n chiffres à sa droite, disposés entre eux dans l'ordre assigné.

Il suit évidemment de là 1.° que, pour que toutes les puissances d'un nombre aient à leur droite les mêmes n derniers chiffres, il est nécessaire et il suffit que les n derniers chiffres de la droite de son quarré soient respectivement les mêmes que les n chiffres qui le terminent lui-même ; 2.° que pour que les n derniers chiffres de la droite du quarré d'un nombre soient respectivement les mêmes que les n derniers chiffres de la droite de ce nombre, il est nécessaire et il suffit que le quarré de sa dernière tranche de n chiffres à droite soit lui-même terminé par ces mêmes chiffres.

Voilà donc la question proposée réduite à celle-ci : *Quels sont les nombres de* n *chiffres qui terminent eux-mêmes leur quarré ?* c'est sous ce point de vue que nous allons l'envisager.

II. Il suit, de ce qui vient d'être dit que tout nombre de n chiffre qui termine lui-même son quarré doit avoir pour sa dernière tranche de p chiffres à droite un nombre qui termine aussi lui-même son quarré, p étant un nombre quelconque moindre que n.

Supposons que, le problème ayant déjà été résolu pour les nombres de $n-1$ chiffres, on veuille le résoudre pour les nombres de n chiffres; les nombres cherchés ne pourront être autres que les nombres déjà trouvés, augmentés d'un chiffre sur leur gauche; et il s'agira d'assigner ce chiffre.

Soit a l'un des nombres qui résolvent le problème pour le cas de $n-1$ chiffres, et soit b la tranche de son quarré qui est à gauche de ses $n-1$ derniers chiffres, en sorte qu'on ait

$$a^2=10^{n-1}b+a\ .$$

Soit ensuite A le chiffre qu'il faut écrire à la gauche de a pour parvenir à un nombre correspondant de n chiffres qui résolve le problème; ce nombre sera ainsi

$$10^{n-1}.A+a\ ;$$

dont le quarré sera

$$10^{2n-2}.A^2+2.10^{n-1}aA+a^2\ ;$$

ou, d'après la précédente valeur de a^2,

$$10^{2n-2}.A^2+2.10^{n-1}aA+10^{n-1}b+a\ ;$$

et il faudra que ce quarré soit terminé par $10^{n-1}.A+a$, c'est-à-dire, qu'il soit égal à ce nombre plus un multiple quelconque de 10^n. Mais comme, excepté le cas où l'on aurait $n=1$, 10^{2n-2} est toujours tout au moins égal à 10^n; il s'ensuit qu'on peut n'avoir aucun égard à la partie $10^{2n-2}.A^2$ de ce quarré, laquelle tombera toujours au delà du n.me chiffre à gauche, et se contenter de poser

$$2.10^{n-1}aA+10^{n-1}.b+a=10^nx+10^{n-1}A+a\ ;$$

ce qui donne, en réduisant, transposant et divisant par 10^{n-1},

$$(2a-1)A=10x-b\ ;$$

équation que l'on pourra simplifier, dans chaque cas particulier, à raison de l'indétermination de x, en rejetant toutes les dixaines qui se trouveront dans $2a-1$ et b.

Nous voilà donc en état de résoudre le problème, pour une valeur quelconque de n, si nous savons le résoudre pour la valeur de n immédiatement inférieure à celle-là. Nous pourrons donc le résoudre pour toutes les valeurs de n, si nous savons le résoudre pour la seule valeur $n=1$.

Or, pour trouver les solutions qui conviennent à ce cas particulier, il suffit de comparer tous les nombres d'un seul chiffre, y compris 0, à leurs quarrés, ce qui donnera

$$A=0\,,\ 1\,,\ 5\,,\ 6\,.$$

Ce cas ainsi résolu, rien ne sera plus facile que de s'élever aux suivans.

Pour $n=2$, on aura

$$a=0\,,\ 1\,,\ 5\,,\ 6\,,$$
$$b=0\,,\ 0\,,\ 2\,,\ 3\,,$$
$$2a-1=9\,,\ 1\,,\ 9\,,\ 1\,;$$

d'où on conclura

$$x=0\,,\ 0\,,\ 2\,,\ 1\,;$$
$$A=0\,,\ 0\,,\ 2\,,\ 7\,.$$

Pour $n=3$, on aura

$$a=00\,,\ 01\,,\ 25\,,\ 76\,,$$
$$b=\ 0\,,\ \ 0\,,\ \ 6\,,\ \ 7\,,$$
$$2a-1=\ 9\,,\ \ 1\,,\ \ 9\,,\ \ 1\,;$$

d'où on conclura

$$x=0\ ,\ 0\ ,\ 6\ ,\ 1\ ;$$

$$A=0\ ,\ 0\ ,\ 6\ ,\ 3\ .$$

Pour $n=4$, on aura

$$a=000\ ,\ 001\ ,\ 625\ ,\ 376\ ,$$

$$b=\quad 0\ ,\quad 0\ ,\quad 0\ ,\quad 1\ ,$$

$$2a-1=\quad 9\ ,\quad 1\ ,\quad 9\ ,\quad 1\ ;$$

d'où on conclura

$$x=0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,$$

$$A=0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 9\ .$$

Pour $n=5$, on aura

$$a=0000\ ,\ 0001\ ,\ 0625\ ,\ 9376\ ;$$

$$b=\quad 0\ ,\quad 0\ ,\quad 9\ ,\quad 0\ ;$$

$$2a-1=\quad 9\ ,\quad 1\ ,\quad 9\ ,\quad 1\ ;$$

d'où on conclura

$$x=0\ ,\ 0\ ,\ 9\ ,\ 0\ ,$$

$$A=0\ ,\ 0\ ,\ 9\ .\ 0\ .$$

On pourrait poursuivre ainsi indéfiniment ; mais il est aisé de voir

1.° Que la série de valeurs 0 , 00 , 000 ,..... se poursuivra toujours indéfiniment suivant la même loi , sans qu'il soit besoin d'en faire le calcul.

2.° Qu'il en sera exactement de même pour la série de valeurs 1 , 01 , 001 ,......

3.° Que , pour la série de valeurs 5 , 25 , 625 ,....., $2a-1$, délivré de ses dixaines, sera toujours 9 ; en sorte que l'équation à résoudre sera $9A=10x-b$; mais , parce que $9A=10A-A$, et que x peut être changé en $A-x$, on pourra à cette équation substituer la suivante

$$A=10x+b\ .$$

4.° Qu'enfin, pour la série de valeurs 6, 76, 376,...., $2a-1$, délivré de ses dixaines, sera toujours 1; en sorte que l'équation à résoudre sera simplement

$$A=10x-b\ .$$

On voit donc que, pour parvenir aux solutions, autres que 0 et 1, qui doivent répondre aux diverses valeurs de n, on n'aura à résoudre que la double équation

$$A=10x\pm b\ ;$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, suivant qu'il s'agit de valeurs terminées par 5 ou de valeurs terminées par 6; et b ayant une valeur propre à chacun de ces deux cas.

Or, comme, d'après ce qui précède, b se réduit toujours à un nombre d'un seul chiffre, et comme A doit aussi avoir un seul chiffre, il faudra faire, pour le signe supérieur, $x=0$, et pour le signe inférieur $x=1$, ce qui donnera les deux formules

$$A=b\ ,\qquad A=10-b\ .$$

Si donc on se rappelle que b, délivré de ses dixaines, n'est autre chose que le n.me chiffre de droite à gauche du quarré de a, on verra que la première série de valeurs peut se calculer directement par cette règle fort simple : *Quarrez le nombre d'un seul chiffre, en rejetant tous les chiffres de ce quarré au delà du second; et vous aurez ainsi le nombre de deux chiffres. Quarrez celui-ci, en rejetant tous les chiffres de ce quarré au delà du troisième; et vous aurez le nombre de trois chiffres. Poursuivez ainsi de la même manière, aussi loin que vous le désirerez.* Voici le type du calcul :

5 , premier nombre.
5
25 , deuxième nombre.
25
125
50
625 , troisième nombre.
625
3125
250
50
0625 , quatrième nombre.
0625
3125
1250
750
90625 , cinquième nombre.
. . . .

Il n'y aurait pas grand changement à faire à cette règle, pour la rendre propre au calcul de la seconde série de valeurs; il ne s'agirait en effet pour cela que de substituer au dernier chiffre admis sur la gauche de chaque produit son complément à 10; ainsi qu'on le voit ici

6 , premier nombre.
6
76 , deuxième nombre.

76 , deuxième nombre.
76
456
32
376 , troisième nombre.
376
2256
632
28
9376 , quatrième nombre.
9376
56256
5632
128
84
09376 , cinquième nombre.
. . . .

Mais il existe, entre les nombres des deux séries, une relation qui peut conduire plus rapidement au but, et qui est trop curieuse pour la passer sous silence. Remarquons, en effet que, d'après les résultats déjà obtenus, on a

$$5+6=11\,;$$
$$25+76=101\,,$$
$$625+376=1001\,,$$
$$0625+9376=10001\,,$$

ce qui nous conduit à soupçonner que A et A' étant deux nombres de n chiffres qui résolvent le problème, on pourrait bien avoir en général

$$A+A'=10^n+1\,. \qquad (1)$$

Or,

Or, c'est une chose facile à vérifier. A étant un nombre qui résout le problème, on doit avoir

$$A^2=10^n x+A\ ; \qquad (2)$$

or, en éliminant A entre ces deux équations, il vient

$$A'^2=10^n(2A'+x-10^n-1)+A'\ ;$$

ou, en posant $2A'+x-10^n-1=x'$,

$$A'^2=10^n x'+A'\ ; \qquad (3)$$

ce qui prouve que A', liée à A par la relation (1), résout également le problème. Au moyen de cette remarque, on n'aura qu'une seule série de valeurs à calculer.

III. Au lieu de demander que les mêmes n derniers chiffres se reproduisent à la droite de chaque puissance, on pourrait exiger seulement qu'ils se reproduisissent de deux en deux puissances, ou de trois en trois, de quatre en quatre, ..., et généralement de m en m; et d'abord les nombres que nous venons précédemment de trouver résoudraient le problème; puisque toute suite de termes égaux peut être considérée comme une suite périodique dont les périodes ont tant et si peu de termes qu'on veut. Mais si l'on exigeait que les mêmes n derniers chiffres reparussent de m en m puissances et pas plutôt, le problème deviendrait possible ou impossible suivant la nature des nombres m et n, ainsi qu'on va le voir.

Supposons, en premier lieu, que les mêmes n derniers chiffres doivent se reproduire de deux en deux puissances; la question se réduira évidemment à trouver un nombre de n chiffres dont les chiffres soient respectivement les n derniers chiffres de la droite de son cube.

Soit a l'un des nombres de $n-1$ chiffres qui résolvent le problème ; soit b la partie de son cube qui est à gauche de ses $n-1$ derniers chiffres, considérée comme un nombre isolé ; on aura

$$a^3=10^{n-1}.b+a\ .$$

Soit ensuite A le chiffre qu'il faut écrire à la gauche de a pour obtenir un nombre de n chiffres qui résolve le problème ; ce nombre sera

$$10^{n-1}.A+a\ ,$$

dont le cube sera

$$10^{3n-3}.A^3+3.10^{2n-2}.aA^2+3.10^{n-1}.a^2A+a^3\ .$$

Les deux premiers termes de ce cube n'ayant aucune influence sur ses n derniers chiffres à droite, seront de nulle considération ; en les supprimant donc, et remettant pour a^3 sa valeur $10^{n-1}.b+a$, il faudra que le nombre résultant soit terminé par $10^{n-1}.A+a$; on aura donc

$$3.10^{n-1}.a^2A+10^{n-1}.b+a=10^n.x+10^{n-1}.A+a\ ;$$

ce qui donnera, en réduisant, transposant et divisant par 10^{n-1} ;

$$(3a^2-1)A=10x-b\ ;$$

équation, qu'à cause de l'indétermination de x, on pourra simplifier dans chaque cas particulier, en ne prenant que le seul chiffre des unités dans les deux nombres $3a^2-1$ et b.

Il ne s'agit donc plus présentement que de connaître toutes les solutions pour la valeur $n=1$; or, il suffit pour cela de comparer successivement tous les nombres d'un seul chiffre, y compris 0, au dernier chiffre de leurs cubes ; ce qui donne sur-le-champ

$$A=0\ ,\ 1\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 9\ .$$

On passera de là aux autres cas ainsi qu'il suit :

Pour $n=2$, on aura

$$a = 0\ ,\ 1\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,$$
$$b = 0\ ,\ 0\ ,\ 6\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,$$
$$3a^2 - 1 = 9\ ,\ 2\ ,\ 7\ ,\ 4\ ,\ 7\ ,\ 2\ ;$$

d'où on conclura

$$x = 0\ ,\ 0 \text{ ou } 1\ ,\ 2\ ,\ 1 \text{ ou } 3\ ,\ 5\ ,\ 1 \text{ ou } 2\ ;$$
$$A = 0\ ,\ 0 \text{ ou } 5\ ,\ 2\ ,\ 2 \text{ ou } 7\ ,\ 7\ ,\ 4 \text{ ou } 9\ .$$

Pour $n=3$, on aura

$$a = 00\ ,\ 01\ ,\ 51\ ,\ 24\ ,\ 25\ ,\ 75\ ,\ 76\ ,\ 49\ ,\ 99\ ,$$
$$b = 0\ ,\ 0\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 9\ ,\ 6\ ,\ 2\ ,$$
$$3a^2 - 1 = 9\ ;\ 2\ ,\ 2\ ,\ 7\ ,\ 4\ ,\ 4\ ,\ 7\ ,\ 2\ ,\ 2\ ;$$

d'où on conclura

$$x = 0,\ 0 \text{ ou } 1,\ 1 \text{ ou } 2,\ 5,\ 1 \text{ ou } 3,\ 2 \text{ ou } 4,\ 3,\ 1 \text{ ou } 2,\ 1 \text{ ou } 2\ ,$$
$$A = 0,\ 0 \text{ ou } 5,\ 2 \text{ ou } 7,\ 6,\ 1 \text{ ou } 6,\ 3 \text{ ou } 8,\ 3,\ 2 \text{ ou } 7,\ 4 \text{ ou } 9\ ;$$

et ainsi de suite.

Ainsi, en nous bornant là, on voit que les seuls nombres dont les trois derniers chiffres se reproduisent perpétuellement à la droite de leurs puissances impaires, sont les nombres terminés par

000 , 001 , 501 , 251 , 751 , 624 , 125 , 625 , 375 , 875 ,
376 , 249 , 749 , 499 , 999 .

Si l'on demandait que la même terminaison reparût seulement de trois en trois puissances, la question se réduirait à trouver un nombre de n chiffres qui terminât lui-même sa quatrième puissance. En raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus, on trouverait facilement que, a étant un des nombres qui résout le problème pour le cas de $n-1$ chiffres, et b étant le n.me chiffre de sa quatrième puissance ; si l'on désigne par A le nombre d'un seul chiffre qu'il faut écrire à la gauche de a, pour obtenir un nombre de n chiffres qui résolvent également le problème, on doit avoir l'équation

$$(4a^3-1)A=10x-b\,,$$

dans laquelle $4a^3-1$ peut être réduit à ses seules unités.

La comparaison des nombres d'un seul chiffre à leur quatrième puissance donne, pour le cas de $n=1$,

$$A=0\,,\ 1\,,\ 5\,,\ 6\,.$$

On aurait ensuite, pour $n=2$,

$$a=0\,,\ 1\,,\ 5\,,\ 6\,,$$

$$b=0\,,\ 0\,,\ 2\,,\ 9\,,$$

$$4a^3-1=9\,,\ 3\,,\ 9\,,\ 3\,;$$

d'où on conclurait

$$x=0\,,\ 0\,,\ 2\,,\ 3\,,$$

$$A=0\,,\ 0\,,\ 2\,,\ 7\,.$$

Ainsi, il n'y a que les seuls nombres terminés par 00, 01, 25, 76 dont les deux derniers chiffres se reproduisent périodiquement à la droite de leurs puissances de trois en trois.

En suivant le même raisonnement pour les cas subséquents, on trouvera facilement que, s'il faut que les mêmes n derniers chiffres se reproduisent périodiquement de m en m puissances ; en désignant par a un des nombres de $n-1$ chiffres qui résolvent le problème, par A le nombre d'un seul chiffre qu'il faut écrire à sa gauche pour obtenir un nombre de n chiffres qui le résolve également ; et enfin par b le n.me chiffre de a^{m+1} ; on doit avoir

$$\{(m+1)a^m-1\}A=10x-b\,.$$

et les applications à des cas particuliers se feront comme il a été enseigné ci-dessus.

IV. On pourrait compliquer encore la question ; en demandant que les terminaisons des puissances ne soient pas immédiatement périodiques ; de manière que les terminaisons périodiques soient précédées d'un nombre donné de terminaisons qui leur soient étrangères ; comme on en voit un exemple dans les nombres terminés par 15, dont les puissances successives ont pour terminaisons 15, 25, 75, 25, 75,..... ; de manière que les périodes, qui ont deux termes, sont précédées du terme 15 qui leur est étranger ; ce qui tient à ce que la fraction $\frac{15}{100}$ réduite à ses moindres termes est $\frac{3}{20}$, dont le dénominateur 20 conserve un facteur 5 commun avec la base 15. Mais nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet qui se rattache d'ailleurs à une théorie déjà développée dans les *Annales* d'une manière fort lumineuse (*).

Deuxième solution ;

Par M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.

La question proposée revient évidemment à trouver un nombre de n chiffres qui se reproduise lui-même à la droite de son quarré (**).

Or, indépendamment de n zéros et de l'unité précédée de $n-1$ zéros, qui résolvent évidemment le problème, il peut encore être résolu par l'un ou l'autre de deux nombres x et y satisfaisant à la double condition

$$x=2^np=5^nq+1\ ;$$

$$y=5^nr=2^ns+1\ ;$$

car on a, dans le premier cas,

(*) Voyez un mémoire de M. Penjon, sur la *Transformation des fractions*, dans le IV.e volume des *Annales*, page 262.

(**) Voyez la précédente solution.

J. D. G.

$$x^2=2^np(5^nq+1)=10^npq+2^np=10^npq+x\ ,$$

et dans le second

$$y^2=5^nr(2^ns+1)=10^nrs+5^nr=10^nrs+y\ ;$$

d'où l'on voit qu'à cause du facteur 10^n qui affecte la première partie des valeurs de x^2 et y^2, ces deux quarrés seront respectivement terminés par x et y.

Tout se réduit donc à résoudre les deux équations indéterminées

$$2^np-5^nq=1\ ,$$

$$5^nr-2^ns=1\ .$$

Voici leurs solutions pour divers cas particuliers

$n=1$,	$p=3$,	$q=1$,	$r=1$,	$s=2$,	$x=6$,	$y=5$,
2 ,	19 ,	3 ,	1 ,	6 ,	76 ,	25 ,
3 ,	47 ,	15 ,	5 ,	78 ,	376 ,	625 ,
4 ,	586 ,	15 ,	1 ,	39 ,	9376 ,	0625 ,
5 ,	293 ,	3 ,	29 ,	2831 ,	09376 ,	90625 ,
6 ,	1709 ,	7 ,	57 ,	13916 ,	109376 ,	890625 ,
7 ,	55542 ,	91 ,	37 ,	22583 ,	7109376 ,	2890625 ,
etc. ,	etc. ,	etc. ,	etc. ,	etc. ,	etc. ,	etc. .

Ainsi, tout nombre terminé par quelqu'une des valeurs de x ou de y aura toutes ses puissances terminées par cette même valeur.

Réflexions sur le même problème ;

Par M. Gergonne.

I. La question proposée revient évidemment à la suivante : *Trouver un nombre de* n *chiffres qui, retranché de son quarré, donne un reste qui ait au moins* n *zéros à sa droite ?*

Soit x le nombre cherché, et soit généralement B la base du système de numération relativement auquel on se propose de résoudre le problème ; en désignant par y un nombre entier indéterminé, l'équation de ce problème sera

$$x^2-x \quad \text{ou} \quad x(x-1)=B^ny\;;$$

x ne devant pas avoir plus de n chiffres.

On satisfait dabord généralement à cette équation, quel que soit B, en posant $y=0$, d'où

$$x=0 \quad \text{ou} \quad x=1\;.$$

Ainsi, dans tout système de numération, tout nombre terminé par n zéros ou par l'unité précédée de $n-1$ zéros, a toutes ces puissances terminées aussi par n zéros ou par l'unité précédée de $n-1$ zéros, respectivement ; ce qui est d'ailleurs évident. Nous ne nous occuperons donc plus à l'avenir de ces deux solutions.

Pour parvenir à la découverte des autres, remarquons d'abord que x, et à plus forte raison $x-1$, étant moindre que B^n, ne sauraient, ni l'un ni l'autre, être divisibles par ce diviseur ; et, comme d'ailleurs ces deux nombres x et $x-1$ sont nécessairement premiers entre eux, ils ne sauraient être divisibles, respectivement, que par deux nombres aussi premiers entre eux.

Soit donc supposé

$$B^n=pq\;;$$

p et q étant deux facteurs premiers entre eux, différens de B^n et de l'unité. B^n étant le plus petit des nombres de $n+1$ chiffres ; il s'ensuit que p et q seront l'un et l'autre moindres que x et $x-1$; en choisissant donc x de manière que l'un des deux soit divisible par p et l'autre par q, on remplira les conditions du problème, puisqu'on aura l'une ou l'autre des équations

$$\frac{x}{p}\cdot\frac{x-1}{q}=y\,, \qquad \frac{x}{q}\cdot\frac{x-1}{p}=y\,.$$

dont les premiers membres sont entiers, par l'hypothèse, et qui ont pour second membre un nombre entier indéterminé.

Posant donc

$$\left.\begin{array}{r} x=pt\,, \\ x-1=qu\,; \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{r} x=qt\,; \\ x-1=pu\,; \end{array}\right.$$

l'élimination de x donnera

$$pt-qu=1 \quad \text{ou} \quad qt-pu=1\,.$$

Ayant donc trouvé un système de valeurs de t et u satisfaisant à l'une ou à l'autre de ces deux équations, on aura ensuite

$$x=pt \quad \text{ou} \quad y=qt\,,$$

et le problème sera résolu.

On voit par là qu'outre les solutions communes à tous les systèmes de numération déjà mentionnés, le problème admettra encore deux fois autant de solutions qu'il y aura de manières de décomposer B^n en deux facteurs premiers entre eux, différens de lui-même et de l'unité.

Soit supposé

$$B=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots, \quad \text{d'où} \quad B^n=a^{n\alpha}b^{n\beta}c^{n\gamma}\ldots\ldots;$$

a, b, c,...... étant des nombres premiers inégaux, au nombre de m. Il est évident qu'il y aura autant de manières de décomposer B^n en deux facteurs premiers entre eux, dont aucun ne soit l'unité, qu'il y aurait de manières d'exécuter cette décomposition sur le simple produit

$$abc\ldots\ldots gh\,,$$

aussi de m facteurs. Or, soit Z_{m-1} ce nombre de décompositions pour le produit de $m-1$ facteurs

$$abc\ldots\ldots g\,,$$

en introduisant le $m.^{me}$ facteur h, on pourra l'introduire indifféremment

remment, pour chaque décomposition, dans le premier ou dans le second facteur, ou bien encore le prendre à lui seul pour un facteur ; ce qui prouve qu'on doit avoir $Z_m=2Z_{m-1}+1$; ce qui donne, en général,

$$Z_m=2^mC-1\ ;$$

mais, lorsque $m=2$, on a évidemment $Z_m=1$, donc $C=\frac{1}{2}$, et par conséquent

$$Z_m=2^{m-1}-1\ ;$$

le nombre des solutions, autres que les deux mentionnées ci-dessus sera donc

$$2Z_m=2^m-2\ ,$$

en y joignant donc ces deux-là, leur nombre total s'élèvera à 2^m ; m indiquant combien la base B a de sortes de facteurs premiers.

II. Lorsqu'on a trouvé un nombre dont les n derniers chiffres à droite se reproduisent perpétuellement à la droite de toutes ses puissances, il est évident qu'à plus forte raison ses n' derniers chiffres à droite, n' étant moindres que n, se reproduiront aussi perpétuellement à la droite de toutes ses puissances. Les solutions du problème, pour la valeur n, donnent donc en même temps *des solutions*, pour la valeur n', moindre que n ; puis donc que, par ce qui précède le nombre des solutions pour chaque valeur de n est toujours le même et ne dépend que de m, il sera le même pour n' que pour n, et conséquemment les solutions pour la valeur n donneront *toutes les solutions* pour la valeur n'.

Ainsi, lorsqu'on voudra avoir les solutions pour plusieurs valeurs de n ; au lieu de monter successivement de plus petites valeurs à la plus élevée, il sera incomparablement préférable d'attaquer directement le problème pour cette dernière ; puisque les solutions qu'on obtiendra renfermeront implicitement toutes les autres.

Appliquons ces généralités à notre système de numération ; et cherchons à résoudre le problème, dans ce système, pour les 20 premières valeurs de n. Pour cela nous poserons sur-le-champ $n=20$. Nous avons d'ailleurs $B=10=2.5$, d'où $B^n=2^{20}.5^{20}$; et nous n'aurons conséquemment que le seul système de valeurs

$$p=2^{20}\,,\quad q=5^{20}\,;$$

en sorte qu'il faudra résoudre successivement les deux équations indéterminées

$$2^{20}.t-5^{20}.u=1\,,\quad 5^{20}.t-2^{20}.u=1\,;$$

ou du moins chercher les plus petits nombres qui y satisfont ; en posant ensuite

$$x=2^{20}.t\,,\qquad x=5^{20}.t\,.$$

Or, on a

$$2^{20}=1\ 048\ 576\,,$$
$$5^{20}=94\ 956\ 806\ 640\ 625\,.$$

Si l'on cherche le plus grand commun diviseur entre ces deux nombres, les quotiens successifs seront

$$90949470\,,\ 5\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 3\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 3\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 10\,,\ 1\,,\ 12\,;$$

A l'aide de ces quotiens, sauf le dernier, on trouvera, pour la dernière fraction convergente vers $\frac{5^{20}}{2^{20}}$,

$$\frac{7385006028926}{81199}\,.$$

On conclura de là, par les théories connues (*), que le plus petit système de valeurs de t et u, dans l'équation

(*) Voyez le 2.e volume de l'*Algèbre* d'Euler, ou la *Théorie des nombres* de M. Legendre.

$$2^{20}.t-5^{20}.u=1$$

est

$$t=73850060289 26\,,$$
$$u=81199\,;$$

que par conséquent, pour l'équatiou

$$5^{20}.t-2^{20}.u=1\,,$$

ce plus petit système de valeurs est

$$t=2^{20}-81199\,,$$
$$u=5^{20}-7385006028926\,.$$

On aura donc

$$x=2^{20}.7385006028926\,;$$
$$x=5^{20}.(2^{20}-81199)=10^{20}-5^{20}.81199\,;$$

On trouvera ainsi que tous les nombres et les seuls nombres dont un certain nombre des derniers chiffres à droite seront les mêmes, que dans l'un quelconque des quatre nombres

$$\ldots\ldots 00000\ 00000\ 00000\ 00000\,,$$
$$\ldots\ldots 00000\ 00000\ 00000\ 00001\,,$$
$$\ldots\ldots 07743\ 74008\ 19871\ 09376\,,$$
$$\ldots\ldots 92256\ 25991\ 82128\ 90625\,,$$

auront aussi les mêmes derniers chiffres à droite, en même nombre, à toutes leurs puissances.

On traiterait d'une manière analogue le cas où l'on exigerait seulement que les terminaisons des puissances successives fussent périodiques (*).

(*) Le Rédacteur a reçu postérieurement de M. Durrande une autre solution du même problème, qui rentre pour le fond dans celles qui viennent d'être mentionnées.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Combinaison.

Avec m choses toutes différentes les unes des autres, de combien de manières peut-on faire n parts ; avec la faculté de faire des parts nulles ?

Problèmes de Géométrie.

I. Diviser graphiquement l'aire d'un triangle en un nombre quelconque de parties égales, par des parallèles à sa base ?

II. Diviser graphiquement le volume d'un tétraèdre en un nombre quelconque de parties égales, par des plans parallèles à sa base ?

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Théorie analitique de la ligne droite et du plan

Par M. Bret, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

Nous avons déjà employé dans ce recueil (*), pour exprimer analitiquement une droite dans l'espace, trois équations telles que

$$x=\alpha+ar\,,$$
$$y=\beta+br\,,$$
$$z=\gamma+cr\,,$$

nous avons observé que α, β, γ étaient les coordonnées d'un point fixe, pris à volonté sur la droite; que r était la distance variable de ce point fixe à un point mobile de la même droite; et qu'enfin a, b, c étaient trois constantes, déterminant la direction de la droite dont il s'agit, et ne variant pas conséquemment lorsque cette droite se meut parallèlement à elle-même. Ces trois constantes doivent d'ailleurs être liées par une relation que nous avons donnée alors, mais que nous allons enseigner à déterminer directement.

Substituons d'abord à notre droite sa parallèle passant par l'origine, et dont les équations seront conséquemment

$$\left.\begin{array}{l} x=ar\,, \\ y=br\,, \\ z=cr\,; \end{array}\right\} \quad (r)$$

et supposons, pour un moment, que les coordonnées soient rectangulaires; r sera alors la diagonale du parallélipipède rectangle construit sur x, y, z; d'où il suit qu'on aura

(*) Voyez notamment la page 93 du IV.e volume.

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \ ;$$

c'est-à-dire, en substituant et divisant par r^2,

$$a^2+b^2+c^2=1 \ .$$

Soit ensuite une autre droite

$$\left.\begin{array}{l} x'=a'r' \ , \\ y'=b'r' \ , \\ z'=c'r' \ ; \end{array}\right\} (r')$$

rapportée aux mêmes axes; nous aurons pareillement

$$a'^2+b'^2+c'^2=1 \ ;$$

et ensuite, par un théorème sur les triangles rectilignes,

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z^2-x')^2=r^2+r'^2-2rr'\text{Cos.}(r\,,\,r') \ ,$$

ou, en substituant, ayant égard aux relations ci-dessus, réduisant, divisant par $2rr'$ et transposant

$$\text{Cos.}(r\ ,\ r)=aa'+bb'+cc' \ ,$$

Cela posé, concevons présentement que les équations (r) appartiennent à un système d'axes non rectangulaires. Par la même origine concevons un système rectangulaire; soient t, u, v, les projections de r sur les axes de ce système; en sorte qu'on ait

$$t^2+u^2+v^2=r^2 \ ;$$

soient de plus x, y, z les projections obliques de r sur les axes primitifs; et soient enfin

$$\left.\begin{array}{l} t'\ ,\ u'\ ,\ v'\ , \\ t''\ ,\ u''\ ,\ v''\ , \\ t'''\ ,\ u'''\ ,\ v'''\ , \end{array}\right\} \text{les projections respectives de} \left\{\begin{array}{l} x\ , \\ y\ , \\ z\ , \end{array}\right.$$

sur les axes rectangulaires, ce qui donnera conséquemment

$$\begin{array}{l} t'^2+u'^2+v'^2=x^2 \ , \\ t''^2+u''^2+v''^2=y^2 \ , \\ t'''^2+u'''^2+v'''^2=z^2 \ ; \end{array}$$

et en outre, par ce qui précède,

$$t''t'''+u''u'''+v''v'''=yz\text{Cos.}(y\,,\,z)\ ,$$
$$t'''t'+u'''u'+v'''v'=zx\text{Cos.}(z\,,\,x)\ ,$$
$$t'\,t''+u'\,u''+v'\,v''=xy\text{Cos.}(x\,,\,y)\ .$$

Présentement r est diagonale commune de deux parallélipipèdes l'un rectangle ayant pour ses arêtes t, u, v, et l'autre obliquangle, qui a pour arêtes x, y, z dont nous connaissons les projections sur celles du premier ; or, comme on peut aller d'une extrémité de r à son autre extrémité en parcourant ces trois arêtes, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$t=t'+t''+t'''\ ,$$
$$u=u'+u''+u'''\ ,$$
$$v=v'+v''+v'''\ .$$

En prenant la somme des quarrés de ces équations, et ayant égard à toutes les relations ci-dessus, on aura

$$r^2=x^2+y^2+z^2+2yz\text{Cos.}(y,\,z)+2zx\text{Cos.}(z,\,x)+2xy\text{Cos.}(x,\,y),$$

substituant enfin pour x, y, z leurs valeurs données par l'équation (r) et divisant par r^2, on aura, pour la relation demandée,

$$a^2+b^2+c^2+2bc\text{Cos.}(y\,,\,z)+2ca\text{Cos.}(z\,,\,x)+2ab\text{Cos.}(x\,,\,y)=1. \qquad \text{(R)}$$

Il est aisé de voir qu'en supposant

$$\left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=0\ ,\ c=0\ ,\\ b=1\ ,\ c=0\ ,\ a=0\ ,\\ c=1\ ,\ a=0\ ,\ b=0\ ;\end{array}\right\}\ r\ \text{deviendra}\ \left\{\begin{array}{l} x\ ,\\ y\ ,\\ z\ .\end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Soient

$$x=\alpha+dp\ ,\quad x=\alpha+gq\ ,$$
$$y=\beta+ep\ ,\quad y=\beta+hq\ ,$$
$$z=\gamma+fp\ ,\quad z=\gamma+kq\ .$$

Les équations de deux droites passant par un même point. Si par ces deux droites on conçoit un plan, et que sur les grandeurs et directions de p et q on construise un parallélogramme, son sommet variable opposé au point de concours des deux droites sera donné par les trois équations

$$x=\alpha+dp+gq\ ,$$
$$y=\beta+ep+hq\ ,$$
$$z=\gamma+fp+kq\ .$$

Or comme, en variant les grandeurs et les signes de p et q, ce sommet peut devenir un quelconque des points du plan où il est situé, et n'en peut jamais sortir ; il s'ensuit que ces équations sont celles de ce plan.

Dans le cas particulier où α, β, γ sont nuls, le plan passe par l'origine, et ses équations sont simplement

$$\left.\begin{array}{l} x=dp+gq\ , \\ y=ep+hq\ , \\ z=fp+kq\ . \end{array}\right\}\ (pq)$$

Ce plan passe alors par deux droites dont les équations sont

$$\left.\begin{array}{l} x=dp\ , \\ y=ep\ , \\ z=fp\ ; \end{array}\right\}\ (p) \qquad \left.\begin{array}{l} x=gq\ , \\ y=hq\ , \\ z=kq\ ; \end{array}\right\}\ (q)$$

d'où il suit qu'on a, entre les six constantes d, e, f, g, h, k, qui déterminent la direction du plan pq, les deux relations

$$d^2+e^2+f^2+2ef\,\text{Cos.}(y\,,z)+2fd\,\text{Cos.}(z\,,x)+2de\,\text{Cos.}(x\,,y)=1\ , \qquad (P)$$
$$g^2+h^2+k^2+2hk\,\text{Cos.}(y\,,z)+2kg\,\text{Cos.}(z\,,x)+2gh\,\text{Cos.}(x\,,y)=1\ ; \qquad (Q)$$

mais les trois dernières sont tout à fait indépendantes des trois premières.

On doit remarquer encore que, lorsqu'on a,

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} e=1\ ,f=0\ ,\ d=0\ , \\ k=1\ ,\ g=0\ ,\ h=0\ ; \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{l} f=1\ ,\ d=0\ ,\ e=0\ , \\ g=1\ ,\ h=0\ ,\ k=0\ ; \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{l} d=1\ ,\ e=0\ ,f=0\ , \\ h=1\ ,\ k=0\ ,g=0\ ; \end{array}\right\} \end{array}\right\}\ pq\ \text{devient}\ \left\{\begin{array}{l} yz\ , \\ zx\ , \\ xy\ . \end{array}\right\}\qquad (\text{II})$$

Cherchons l'angle de deux droites r, r' ; si l'on joint leurs extrémités par une droite on formera un triangle rectiligne, dans lequel on aura, par ce qui précède,

$$r^2+r'^2-rr'\text{Cos.}(r\,,\,r')=\left\{\begin{array}{l}(x-x')^2+2(y-y')(z-z')\text{Cos.}(y\,,\,z)\\+(y-y')^2+2(z-z')(x-x')\text{Cos.}(z\,,\,x)\\+(z-z')^2+2(x-x')(y-y')\text{Cos.}(x\,,y)\end{array}\right\}.$$

En substituant pour x, y, z, x', y', z' leurs valeurs ar, br, cr, $a'r'$, $b'r'$, $c'r'$, ayant égard aux relations (R), (R'), réduisant et divisant par $-2rr'$, on aura

$$\text{Cos.}(r\,,r')=\left\{\begin{array}{l}aa'+(bc'+cb')\text{Cos.}(y\,,\,z)\\+bb'+(ca'+ac')\text{Cos.}(z\,,\,x)\\+cc'+(ab'+ba')\text{Cos.}(x\,,\,y)\end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Si, au moyen des conditions (I), on fait successivement coïncider la droite r' avec chacun des axes, on aura

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos.}(r\,,\,x)=a+b\text{Cos.}(x\,,\,y)+c\text{Cos.}(z\,,\,x)\;,\\\text{Cos.}(r\,,\,y)=b+c\text{Cos.}(y\,,\,z)+a\text{Cos.}(x\,,\,y)\;,\\\text{Cos.}(r\,,\,z)=c+a\text{Cos.}(z\,,\,x)+b\text{Cos.}(y\,,\,z)\;;\end{array}\right\}(2)$$

mais l'équation de relation (R) peut être écrite ainsi

$$\left.\begin{array}{l}a\{a+b\text{Cos.}(x\,,y)+c\text{Cos}\,(z\,,\,x)\}\\+b\{b+c\text{Cos.}(\,y\,,\,z)+a\text{Cos.}(x\,,\,y)\}\\+c\,\{c+a\text{Cos.}(z\,,\,x)+b\text{Cos.}(y\,,\,z)\}\end{array}\right\}=1\;;$$

elle pourra donc (2) être remplacée par celle-ci

$$a\text{Cos.}(r\,,\,x)+b\text{Cos.}(r\,,\,y)+c\text{Cos.}(r\,,\,z)=1\;. \qquad (3)$$

Pareillement, on peut écrire ainsi la formule (1)

$$\text{Cos.}(r,\,r')=\left\{\begin{array}{l}a'\{a+b\text{Cos.}(x\,,\,y)+c\text{Cos.}(z\,,\,x)\}\\+b'\{b+c\text{Cos.}(y\,,\,z)+a\text{Cos.}(x\,,\,y)\}\\+c'\{\,c+a\text{Cos.}(\,z\,,\,x)+b\text{Cos.}(y\,,\,z)\}\end{array}\right\};$$

on pourra donc (2) lui substituer celle-ci

$$\text{Cos.}(r,r')=a'\text{Cos.}(r,x)+b'\text{Cos.}(r,y)+c'\text{Cos.}(r,z)\;; \qquad (4)$$

et il est clair qu'on pourrait écrire pareillement

$$\text{Cos.}(r,r')=a\text{Cos.}(r',x)+b\text{Cos.}(r',y)+c\text{Cos.}(r',z)\;. \qquad (5)$$

En posant, pour abréger,

$$\Delta^2=1-\text{Cos.}^2(y,z)-\text{Cos.}^2(z,x)-\text{Cos.}^2(x,y)+2\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(x,y)\,,$$

les équations (2) donnent

$$\left.\begin{aligned}
a&=\frac{1}{\Delta^2}\left\{\begin{aligned}&\text{Cos.}(r,x)\text{Sin.}^2(y,z)-\text{Cos.}(r,y)\{\text{Cos.}(x,y)-\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(z,x)\}\\&\qquad-\text{Cos.}(r,z)\{\text{Cos.}(z,x)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(y,z)\}\end{aligned}\right\},\\
b&=\frac{1}{\Delta^2}\left\{\begin{aligned}&\text{Cos.}(r,y)\text{Sin.}^2(z,x)-\text{Cos.}(r,z)\{\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(x,y)\}\\&\qquad-\text{Cos.}(r,x)\{\text{Cos.}(x,y)-\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(z,x)\}\end{aligned}\right\},\\
c&=\frac{1}{\Delta^2}\left\{\begin{aligned}&\text{Cos.}(r,z)\text{Sin.}^2(x,y)-\text{Cos.}(r,x)\{\text{Cos.}(z,x)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(y,z)\}\\&\qquad-\text{Cos.}(r,y)\{\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(x,y)\}\end{aligned}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation de relation (5), on obtiendra la suivante qui exprime la relation entre les six angles que forment deux à deux quatre droites x, y, z, r dans l'espace ou, ce qui revient au même, entre les six distances deux à deux de quatre points quelconques d'une sphère,

$$\Delta^2=\left\{\begin{aligned}&\text{Cos.}^2(r,x)\text{Sin.}^2(y,z)-2\text{Cos.}(r,y)\text{Cos.}(r,z)\{\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(x,y)\}\\&+\text{Cos.}^2(r,y)\text{Sin.}^2(z,x)-2\text{Cos.}(r,z)\text{Cos.}(r,x)\{\text{Cos.}(z,x)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(y,z)\}\\&+\text{Cos.}^2(r,z)\text{Sin.}^2(x,y)-2\text{Cos.}(r,x)\text{Cos.}(r,y)\{\text{Cos.}(x,y)-\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(z,x)\}\end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Les mêmes valeurs substituées dans la formule (5) la change en celle-ci, qui fait connaître l'angle de deux droites r, r' en fonction des angles qu'elles forment avec trois autres droites x, y, z ou, ce qui revient au même, la distance entre deux points d'une sphère en fonction des six distances de ces deux points à trois autres points, pris arbitrairement sur cette sphère

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^2\text{Cos.}(r,r')=&\text{Cos.}(r,x)\text{Cos.}(r',x)\text{Sin.}^2(y,z)+\text{Cos.}(r,y)\text{Cos.}(r',y)\text{Sin.}^2(z,x)+\text{Cos.}(r,z)\text{Cos.}(r',z)\text{Sin.}^2(x,y)\\
&-\{\text{Cos.}(r,z)\text{Cos.}(r',y)+\text{Cos.}(r,y)\text{Cos.}(r',z)\}\{\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(x,y)\}\\
&-\{\text{Cos.}(r,x)\text{Cos.}(r',z)+\text{Cos.}(r,z)\text{Cos.}(r',x)\}\{\text{Cos.}(z,x)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(y,z)\}\\
&-\{\text{Cos.}(r,y)\text{Cos.}(r',x)+\text{Cos.}(r,x)\text{Cos.}(r',y)\}\{\text{Cos.}(x,y)-\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(z,x)\}
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Cherchons présentement l'angle d'une droite r avec un plan pq; et d'abord occupons-nous des conditions de leur perpendicularité. Pour que r soit perpendiculaire à pq, il est nécessaire et il suffit qu'elle le soit à la fois aux deux droites p et q ou, ce qui revient au même, que les cosinus des angles qu'elle forme avec ces deux droites soient nuls, ce qui donne (5)

$$\left.\begin{aligned} a\text{Cos.}(p\,,x)+b\text{Cos.}(p\,,y)+c\text{Cos.}(p\,,z)=0\,, \\ a\text{Cos.}(q\,,x)+b\text{Cos.}(q\,,y)+c\text{Cos.}(q\,,z)=0\,. \end{aligned}\right\}\ (9)$$

Si l'on combine ces conditions avec la relation (R), en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} X&=\text{Cos.}(p\,,y)\text{Cos.}(q\,,z)-\text{Cos.}(p\,,z)\text{Cos.}(q\,,y)\,, \\ Y&=\text{Cos.}(p\,,z)\text{Cos.}(q\,,x)-\text{Cos.}(p\,,x)\text{Cos.}(q\,,z)\,, \\ Z&=\text{Cos.}(p\,,x)\text{Cos.}(q\,,y)-\text{Cos.}(p\,,y)\text{Cos.}(q\,,x)\,; \end{aligned}$$

et ensuite

$$\Pi^2=\frac{1}{\Delta^2}\{X^2+Y^2+Z^2+2YZ\text{Cos.}(y\,,z)+2ZX\text{Cos.}(z\,,x)+2XY\text{Cos.}(x\,,y)\}$$

il viendra

$$a=\frac{X}{\Delta\Pi}\,,\quad b=\frac{Y}{\Delta\Pi}\,,\quad c=\frac{Z}{\Delta\Pi}\,. \qquad (10)$$

Mais on a (2)

$$\begin{aligned} \text{Cos.}(p\,,x)&=d+e\text{Cos.}(x\,,y)+f\text{Cos.}(z\,,x)\,, \\ \text{Cos.}(p\,,y)&=e+f\text{Cos.}(y\,,z)+d\text{Cos.}(x\,,y)\,, \\ \text{Cos.}(p\,,z)&=f+d\text{Cos.}(z\,,x)+e\text{Cos.}(y\,,z)\,; \\ \text{Cos.}(q\,,x)&=g+h\text{Cos.}(x\,,y)+k\text{Cos.}(z\,,x)\,, \\ \text{Cos.}(q\,,y)&=h+k\text{Cos.}(y\,,z)+g\text{Cos.}(x\,,y)\,, \\ \text{Cos.}(q\,,z)&=k+g\text{Cos.}(z\,,x)+h\text{Cos.}(y\,,x)\,. \end{aligned}$$

Substituant donc, et posant encore, pour abréger,

$$\begin{aligned} A&=ek-fh\,, \\ B&=fg-dk\,, \\ C&=dh-eg\,; \end{aligned}$$

il viendra

$$X=A\text{Sin.}^2(y\,,z)-B\{\text{Cos.}(x\,,y)-\text{Cos.}(y\,,z)\text{Cos.}(z\,,x)\}-C\{\text{Cos.}(z\,,x)-\text{Cos.}(x\,,y)\text{Cos.}(y\,,z)\}\,;$$

$$Y=B\text{Sin.}^2(z\,,x)-C\{\text{Cos.}(y\,,z)-\text{Cos.}(z\,,x)\text{Cos.}(x\,,y)\}-A\{\text{Cos.}(x\,,y)-\text{Cos.}(y\,,z)\text{Cos.}(z\,,x)\}\,,$$

$$Z=C\text{Sin.}^2(x\,,y)-A\{\text{Cos.}(z\,,x)-\text{Cos.}(x\,,y)\text{Cos.}(y\,,z)\}-B\{\text{Cos.}(y\,,z)-\text{Cos.}(z\,,x)\text{Cos.}(x\,,y)\}\,,$$

et de là on conclura

$$\Pi^2=\left\{\begin{array}{l} A^2\text{Sin.}^2(y\,,z)-2BC\{\text{Cos.}(y\,,z)-\text{Cos.}(z\,,x)\text{Cos.}(x\,,y)\} \\ +B^2\text{Sin.}^2(z\,,x)-2CA\{\text{Cos.}(z\,,x)-\text{Cos.}(x\,,y)\text{Cos.}(y\,,z)\} \\ +C^2\text{Sin.}^2(x\,,y)-2AB\{\text{Cos.}(x\,,y)-\text{Cos.}(y\,,z)\text{Cos.}(z\,,x)\} \end{array}\right\}.$$

Ainsi, a, b, c pourront être exprimés immédiatement, en fonction de d, e, f, g, h, k et des angles que forment deux à deux les axes des coordonnées.

Cherchons présentement l'angle de la droite r avec le plan pq. Pour l'obtenir, imaginons une autre droite r' perpendiculaire à ce plan ; nous aurons

$$\text{Sin.}(pq\,,r)=\text{Cos.}(r\,,r')\;;$$

c'est-à-dire (1)

$$\text{Sin.}(pq\,,r)=\left\{\begin{array}{l} a'\{a+b\text{Cos.}(x\,,y)+c\text{Cos.}(z\,,x)\} \\ +b'\{b+c\text{Cos.}(z\,,x)+a\text{Cos.}(x\,,y)\} \\ +c'\{c+a\text{Cos.}(z\,,x)+b\text{Cos.}(y\,,z)\} \end{array}\right\}.$$

Mais ici les valeurs de a', b', c' sont les mêmes que celles de a, b, c dans le cas précédent ; on aura donc, en substituant,

$$\text{Sin.}(pq\,,r)=\frac{1}{\Delta\Pi}\left\{\begin{array}{l} X\{a+b\text{Cos.}(x\,,y)+c\text{Cos.}(z\,,x)\} \\ +Y\{b+c\text{Cos.}(y\,,z)+a\text{Cos.}(x\,,y)\} \\ +Z\{c+a\text{Cos.}(z\,,x)+b\text{Cos.}(y\,,z)\} \end{array}\right\};$$

ou, en mettant pour X, Y, Z leurs valeurs

$$\text{Sin.}(pq\,,r)=\frac{\Delta(aA+bB+cC)}{\Pi}\;; \qquad (11)$$

on pourra donc exprimer immédiatement $\text{Sin.}(pq\,,r)$, en fonction de a, b, c, d, e, f, g, h, k et des angles que forment deux à deux les axes des coordonnées.

Si,

Si, au moyen des conditions (I), on fait successivement coïncider r avec les trois axes, on aura

$$\left.\begin{aligned}\text{Sin.}(pq\,,x)&=\frac{\Delta A}{\Pi}\,,\\ \text{Sin.}(pq\,,y)&=\frac{\Delta B}{\Pi}\,,\\ \text{Sin.}(pq\,,z)&=\frac{\Delta C}{\Pi}\,.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Si, au moyen des conditions (II), on fait successivement coïncider pq avec les trois plans coordonnés, on aura

$$\left.\begin{aligned}\text{Sin.}(yz\,,r)&=\frac{\Delta a}{\text{Sin.}(y\,,z)}\,,\\ \text{Sin.}(zx\,,r)&=\frac{\Delta b}{\text{Sin.}(z\,,x)}\,,\\ \text{Sin.}(xy\,,r)&=\frac{\Delta c}{\text{Sin.}(x\,,y)}\,.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Si, enfin, par le concours des conditions (I) et (II), on fait successivement coïncider le plan pq avec chacun des plans coordonnés et la droite r avec l'axe qui lui est opposé, il viendra, en chassant les dénominateurs,

$$\left.\begin{aligned}\text{Sin.}(y\,,z)\text{Sin.}(yz\,,x)&=\Delta\,,\\ \text{Sin.}(z\,,x)\text{Sin.}(zx\,,y)&=\Delta\,,\\ \text{Sin.}(x\,,y)\text{Sin.}(xy\,,z)&=\Delta\,.\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

ces dernières équations prouvent que, dans tout triangle sphérique, les produits des sinus des côtés par les sinus des arcs perpendiculaires, abaissés sur leur direction des sommets opposés, sont constans.

Si l'on compare à l'équation (11) la somme des produits des équations (12) par a, b, c, on aura

$$\text{Sin.}(pq\,,r)=a\text{Sin.}(pq\,,x)+b\text{Sin.}(pq\,,y)+c\text{Sin.}(pq\,,z)\,;\quad(15)$$

équation qu'on aurait pu, au surplus, déduire immédiatement de l'équation (5).

En observant que, d'après les valeurs de A, B, C en d, e; f, g, h, k, on a

$$dA+eB+fC=0\ ,$$
$$gA+hB+kC=0\ ;$$

les équations (12) donneront encore

$$\left.\begin{array}{l} d\text{Sin.}(pq\,,\,x)+e\text{Sin.}(pq\,,\,y)+f\text{Sin.}(pq\,,\,z)=0\ , \\ g\text{Sin.}(pq\,,\,x)+h\text{Sin.}(pq\,,\,y)+k\text{Sin.}(pq\,,\,z)=0\ . \end{array}\right\}\ (16)$$

La comparaison des équations (13) et (14) donne

$$a=\frac{\text{Sin.}(yz\,,\,r)}{\text{Sin.}(yz\,,\,x)}\ ,\quad b=\frac{\text{Sin.}(zx\,,\,r)}{\text{Sin.}(zx\,,\,y)}\ ,\quad c=\frac{\text{Sin.}(xy\,,\,r)}{\text{Sin.}(xy\,,\,z)}\ . \qquad (17)$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la relation (3), on arrivera à ce théorème

$$\frac{\text{Sin.}(yz\,,\,r)}{\text{Sin.}(yz\,,\,x)}\text{Cos.}(r,x)+\frac{\text{Sin.}(zx\,,\,r)}{\text{Sin.}(zx\,,\,y)}\text{Cos.}(r,y)+\frac{\text{Sin.}(xy\,,\,r)}{\text{Sin.}(xy\,,\,z)}\text{Cos.}(r,z)=1\,. \ (18)$$

Si l'on substitue ces mêmes valeurs dans la formule (5), on aura

$$\text{Cos.}(r\,,r')=\frac{\text{Sin.}(yz\,,\,r)}{\text{Sin.}(yz\,,\,x)}\text{Cos.}(r',x)+\frac{\text{Sin.}(zx\,,\,r)}{\text{Sin.}(zx\,,\,y)}\text{Cos.}(r'\,,\,y)$$
$$+\frac{\text{Sin.}(xy\,,\,r)}{\text{Sin.}(xy\,,\,z)}\text{Cos.}(r'\,,\,z)\ . \qquad (19)$$

En les substituant enfin dans la formule (15) on obtient

$$\text{Sin.}(pq\,,r)=\frac{\text{Sin.}(yz\,,\,r)}{\text{Sin.}(yz\,,x)}\text{Sin.}(pq\,,\,x)+\frac{\text{Sin.}(zx\,,\,r)}{\text{Sin.}(zx\,,y)}\text{Sin.}(pq\,,\,y)$$
$$+\frac{\text{Sin.}(xy\,,\,r)}{\text{Sin.}(xy\,,\,z)}\text{Sin.}(pq\,,z)\ . \qquad (20)$$

Occupons-nous, en dernier lieu, de la recherche de l'angle de deux plans pq, $p'q'$. Le cosinus de cet angle n'est autre que le cosinus de deux droites r, r' qui seraient respectivement perpendiculaires à ces deux plans. On aura donc, (1) et (10),

$$\text{Cos.}(pq\,,p'q')=\frac{1}{\Delta^2\Pi\Pi'}\left\{\begin{array}{l}XX'+(YZ'+ZY')\text{Cos.}(y,z)\\+YY'+(ZX'+XZ')\text{Cos.}(z,x)\\+ZZ'+(XY'+YX')\text{Cos.}(x,y)\end{array}\right\};\qquad(21)$$

ou

$$\text{Cos.}(pq\,,p'q')=\frac{1}{\Delta^2\Pi\Pi'}\left\{\begin{array}{l}X'\{X+Y\text{Cos.}(x,y)+Z\text{Cos.}(z,x)\}\\+Y'\{Y+Z\text{Cos.}(y,z)+X\text{Cos.}(x,y)\}\\+Z'\{Z+X\text{Cos.}(z,x)+Y\text{Cos.}(y,z)\}\end{array}\right\}.\quad(22)$$

X, Y, Z, Π et Δ ont été déterminés précédemment, et on obtiendra X', Y', Z' en changeant dans X, Y, Z, les quantités A, B, C en A', B', C'; on aura d'ailleurs

$$A'=e'k'-f'h'\,,$$
$$B'=f'g'-d'k'\,,$$
$$C'=d'h'-e'g'\,.$$

On trouvera, au surplus

$$X+Y\text{Cos.}(x,y)+Z\text{Cos.}(z,x)=\Delta^2A\,,$$
$$Y+Z\text{Cos.}(y,z)+X\text{Cos.}(x,y)=\Delta^2B\,,$$
$$Z+X\text{Cos.}(z,x)+Y\text{Cos.}(y,z)=\Delta^2C\,.$$

En conséquence, la formule (22) deviendra

$$\text{Cos.}(pq\,,p'q')=\frac{AX'+BY'+CZ'}{\Pi\Pi'}=\frac{A'X+B'Y+C'Z}{\Pi\Pi'}\,;$$

ou encore

$$\text{Cos.}(pq,p'q')=\frac{1}{\Pi\Pi'}\left\{\begin{array}{l}AA'\text{Sin.}^2(y,z)-(BC'+CB')\{\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(x,y)\}\\+BB'\text{Sin.}^2(z,x)-(CA'+AC')\{\text{Cos.}(z,x)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(y,z)\}\\+CC'\text{Sin.}^2(x,y)-(AB'+BA')\{\text{Cos.}(x,y)-\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(z,x)\}\end{array}\right\}.\qquad(23)$$

Au moyen de cette dernière formule, il sera très-aisé d'exprimer immédiatement $\text{Cos.}(pq\,,p'q')$, en fonction de d, e, f, g, h, k, d', e', f', g', h', k' et des angles que forment deux à deux les axes des coordonnées.

Si, au moyen des conditions (II), on fait successivement coïncider le plan $p'q'$ avec les trois plans coordonnés, on trouvera

$$\left.\begin{array}{r}\Pi\text{Sin.}(y,z)\text{Cos.}(pq,yz)=A\text{Sin.}^2(y,z)-B\{\text{Cos.}(z,x)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(y,z)\}\\ -C\{\text{Cos.}(x,y)-\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(z,x)\}\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r}\Pi\text{Sin.}(z,x)\text{Cos.}(pq,zx)=B\text{Sin.}^2(z,x)-C\{\text{Cos.}(x,y)-\text{Cos.}(y,z)\text{Cos.}(z,x)\}\\ -A\{\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(x,y)\}\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r}\Pi\text{Sin.}(x,y)\text{Cos.}(pq,xy)=C\text{Sin.}^2(x,y)-A\{\text{Cos.}(y,z)-\text{Cos.}(z,x)\text{Cos.}(x,y)\}\\ -B\{\text{Cos.}(z,x)-\text{Cos.}(x,y)\text{Cos.}(y,z)\}\end{array}\right\};$$

au moyen de quoi la formule (23) deviendra

$$\text{Cos.}(pq\,,p'q')=\frac{1}{\Pi'}\left\{\begin{array}{r}A'\text{Sin.}(y\,,\,z)\text{Cos.}(pq\,,\,yz)\\ +B'\text{Sin.}(z\,,\,x)\text{Cos.}(pq\,,\,zx)\\ +C'\text{Sin.}(x\,,\,y)\text{Cos.}(pq\,,\,xy)\end{array}\right\}; \qquad (24)$$

ou encore

$$\text{Cos.}(pq\,,p'q')=\frac{1}{\Pi}\left\{\begin{array}{r}A\text{Sin.}(y\,,\,z)\text{Cos.}(yz\,,\,p'q')\\ +B\text{Sin.}(z\,,\,x)\text{Cos.}(zx\,,\,p'q')\\ +C\text{Sin.}(x\,,\,y)\text{Cos.}(xy\,,\,p'q')\end{array}\right\}; \qquad (25)$$

mais, en éliminant Δ entre les formules (12) et (14), il vient

$$\frac{A\text{Sin.}(y,z)}{\Pi}=\frac{\text{Sin.}(pq,x)}{\text{Sin.}(yz,x)},$$

$$\frac{B\text{Sin.}(z,x)}{\Pi}=\frac{\text{Sin.}(pq,y)}{\text{Sin.}(zx,y)},$$

$$\frac{C\text{Sin.}(x,y)}{\Pi}=\frac{\text{Sin.}(pq,z)}{\text{Sin.}(xy,z)};$$

substituant ces valeurs dans la forme (25), elle deviendra

$$\text{Cos.}(pq,p'q')=\frac{\text{Sin.}(pq,x)}{\text{Sin.}(yz,x)}\text{Cos.}(yz,p'q')+\frac{\text{Sin.}(pq,y)}{\text{Sin.}(zx,y)}\text{Cos.}(zx\,,p'q')$$
$$+\frac{\text{Sin.}(pq,z)}{\text{Sin.}(xy,z)}\text{Cos.}(xy,\,p'q'). \qquad (26)$$

Si, au moyen des conditions (II), on fait successivement coïncider les deux plans pq, $p'q'$ avec deux plans coordonnés différens, on tirera des formules (23)

$$\mathrm{Sin.}(z,x)\mathrm{Sin.}(x,y)\mathrm{Cos.}(zx,xy)=\mathrm{Cos.}(y,z)-\mathrm{Cos.}(z,x)\mathrm{Cos.}(x,y)\;,$$
$$\mathrm{Sin.}(x,y)\mathrm{Sin.}(y,z)\mathrm{Cos.}(xy,yz)=\mathrm{Cos.}(z,x)-\mathrm{Cos.}(x,y)\mathrm{Cos.}(y,z)\;,$$
$$\mathrm{Sin.}(y,z)\mathrm{Sin.}(z,x)\mathrm{Cos.}(yz,zx)=\mathrm{Cos.}(x,y)-\mathrm{Cos.}(y,z)\mathrm{Cos.}(z,x)\;;$$

On reconnaît ici les équations fondamentales de la trigonométrie sphérique.

Il n'aura pas au surplus échappé au lecteur que toutes les formules que nous venons d'obtenir, et beaucoup d'autres que nous aurions pu en déduire, sont des formules de trigonométrie sphérique, auxquelles peut-être on parviendrait beaucoup moins facilement en employant les voies ordinaires.

GÉOMÉTRIE.

Théorèmes relatifs aux polygones réguliers ;

Par feu FRANÇAIS, professeur aux écoles d'artillerie.

IL a été fait mention, dans le IV.e volume de ce recueil (pages 70 et 133), d'une communication faite par M. Legendre à feu M. Français, au sujet de la nouvelle théorie des imaginaires de M. Argand. Ce qu'on va lire est la substance d'une réponse à cette communication, datée de La Fère, 7 novembre 1806. M. Français mande à M. Legendre qu'il était, dès l'an X, en possession des théorèmes que sa lettre renferme, qu'il en supprime les démonstrations, pour éviter les longueurs; mais qu'il pense qu'elles doivent se rattacher facilement à la nouvelle théorie. Il termine ainsi :

« Je suis intimement persuadé que la *Géométrie de position* va enfin voir le » jour. Depuis Leibnitz, plus d'un siècle elle fut annoncée aux savans. C'en est » fait, je crois, elle va naître ou elle est née : gloire à son auteur ».

Nous aurions pu tenter de donner les démonstrations de ces théorèmes; nous avons pensé qu'il était plus convenable de laisser au lecteur le plaisir de les découvrir.

Dans tout ce qui va suivre, nous représenterons constamment par S_1, S_2, S_3,.... les sommets d'un polygone régulier; C sera son centre ; r, r' seront respectivement les rayons des cercles circonscrit et inscrit ; P sera un point placé à une distance a du centre, et dont nous indiquerons la situation dans chaque cas ; m et n seront des nombres abstraits, entiers et positifs ; et ϖ sera la demi-circonférence du cercle dont le rayon $=1$. Nous ferons connaître les autres notations à mesure qu'elles nous seront nécessaires.

THÉORÈME I. Dans tout polygone régulier de m côtés, où le point P est quelconque ; n étant $<m$; on a

$$\overline{PS_1}^{2n}+\overline{PS_2}^{2n}+\overline{PS_3}^{2n}+\ldots\ldots+\overline{PS_m}^{2n}=\frac{m}{\varpi}\int(a^2-2ar\text{Cos}.\beta+r^2)^n.d\beta\,;$$

l'intégrale étant prise, dans le second membre, depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\varpi$.

Corollaire I. P et P$'$ étant deux quelconques des points de la circonférence d'un cercle concentrique à notre polygone, et n étant toujours $<m$; on a

$$\overline{PS_1}^{2n}+\overline{PS_2}^{2n}+\ldots\ldots+\overline{PS_m}^{2n}=\overline{P'S_1}^{2n}+\overline{P'S_2}^{2n}+\ldots\ldots+\overline{P'S_m}^{2n}\,.$$

Corollaire II. Deux polygones réguliers $S_1S_2S_3\ldots S_m$, $S'_1S'_2S'_3\ldots S'_{m'}$ étant inscrits au même cercle ; si l'on a $n<m$ et $n'<m$; on aura, P étant quelconque

$$\frac{\overline{PS_1}^{2n}+\overline{PS_2}^{2n}+\overline{PS_3}^{2n}+\ldots\ldots+\overline{PS_m}^{2n}}{\overline{PS'_1}^{2n}+\overline{PS'_2}^{2n}+\overline{PS'_3}^{2n}+\ldots+\overline{PS'_{m'}}^{2n}}=\frac{n}{n'}\,.$$

Corollaire III. P étant toujours quelconque ; soit mené au cercle circonscrit le rayon CD, perpendiculaire à CP, et soient joints PD ; on aura

$$\overline{PS_1}^{2}+\overline{PS_2}^{2}+\overline{PS_3}^{2}+\ldots\ldots+\overline{PS_m}^{2}=m\,.\,\overline{PD}^{2}\,.$$

Corollaire IV. P étant un quelconque des points de la circonférence du cercle circonscrit au polygone, et n étant toujours $<m$; on a

$$\overline{PS}_1^{\,2n}+\overline{PS}_2^{\,2n}+\overline{PS}_3^{\,2n}+\ldots\ldots+\overline{PS}_m^{\,2n}=\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots 2n}.m(2r)^{2n}.$$

Corollaire V. P étant encore quelconque sur la circonférence du cercle circonscrit, et $2m$ étant le nombre des côtés du polygone ; en supposant toujours $n<m$; on aura

$$\overline{PS}_1^{\,2n}+\overline{PS}_3^{\,2n}+\overline{PS}_5^{\,2n}+\ldots+\overline{PS}_{2m-1}^{\,2n}=\overline{PS}_2^{\,2n}+\overline{PS}_4^{\,2n}+\overline{PS}_6^{\,2n}+\ldots+\overline{PS}_{2m}^{\,2n}.$$

THÉORÈME II. P étant toujours quelconque, sur la circonférence du cercle circonscrit, et le nombre des côtés du polygone étant $2m+1$; quel que soit le rapport de m à n ; on aura

$$\overline{PS}_1^{\,(2n+1)}+\overline{PS}_3^{\,(2n+1)}+\ldots+\overline{PS}_{2m+1}^{\,(2n+1)}$$
$$=\overline{PS}_2^{\,(2n+1)}+\overline{PS}_4^{\,(2n+1)}+\ldots+\overline{PS}_{2m}^{\,(2n+1)}.$$

THÉORÈME II. Deux polygones réguliers $S_1S_2S_3\ldots S_{2m+1}$ et $S'_1S'_2S'_3\ldots S'_{2m-1}$, de $2m+1$ et $2m-1$ côtés étant inscrits au même cercle ; et P, P′ étant deux quelconques des points de la circonférence de ce cercle ; PQ étant la corde qui divise l'angle S_mPS_{m+1} en deux parties égales ; si l'on a $2n<2m-1$, on aura

$$\left\{\overline{PS}_1^{\,2n}+\overline{PS}_2^{\,2n}+\ldots+\overline{PS}_{2m}^{\,2n}\right\}-\left\{\overline{P'S'}_1^{\,2n}+\overline{P'S'}_2^{\,2n}+\ldots+\overline{P'S'}_{2n-1}^{\,2n}\right\}=\overline{PQ}^{\,2n}.$$

THÉORÈME IV. Deux polygones réguliers S_1, S_2, $S_3\ldots S_{2m}$ et $S'_1S'_2S'_3\ldots S'_{2m-2}$, de $2m$ et $2m-2$ côtés étant inscrits au même cercle ; et deux points P, P′ étant pris quelconques sur la circonférence de ce cercle ; en supposant $n<2m-1$, on aura

$$\left\{\overline{PS}_1^{\,2n}+\overline{PS}_2^{\,2n}+\ldots+\overline{PS}_{2m}^{\,2n}\right\}-\left\{\overline{P'S'}_1^{\,2n}+\overline{P'S'}_2^{\,2n}+\ldots+\overline{P'S'}_{2m-2}^{\,2n}\right\}=\overline{PS}_m^{\,2n}+\overline{PS}_{2m}^{\,2n}.$$

THÉORÈME V. Le point P étant quelconque, et m étant le nombre des côtés du polygone ; soit AB le diamètre du cercle circonscrit passant par P ; soit pris, sur la circonférence de ce cercle, à partir du point A, un arc $AE=m.AS_1$; si de plus on prend sur ce diamètre AB, ou sur son prolongement, un point F tel que l'on ait $CF=\frac{a^m}{r^{m-1}}$, et si enfin on joint EF, on aura

$$PS_1 . PS_2 . PS_3 \ldots\ldots PS_m = EF . r^{m-1} .$$

Corollaire I. Le point P étant pris arbitrairement sur la direction de CS_1, et le nombre des côtés du polygone étant toujours $=m$; on aura

$$PS_1 . PS_2 . PS_3 \ldots\ldots PS_m = \pm(r^n - a^n) ;$$

suivant que le point P sera intérieur ou extérieur au polygone.

Corollaire II. Le point P étant quelconque, sur la circonférence du cercle circonscrit, et m étant le nombre des côtés du polygone; si l'on prend, à partir de P, l'arc $PS_1G=m . PS_1$, et qu'on mène la corde PG; on aura

$$PS_1 . PS_2 . PS_3 \ldots\ldots PS_m = PG . r^{m-1} .$$

THÉORÈME VI. Tout étant ici comme dans le *Théor. V*, si ce n'est que le nombre des côtés du polygone est supposé $=2m$; si l'on prend, sur la direction du diamètre AB, un point F′, aussi éloigné du centre que l'est le point F, mais du côté opposé; en joignant F′E, on aura

$$PS_1 . PS_3 . PS_5 \ldots\ldots PS_{2m-1} = EF . r^{m-1} ,$$
$$PS_2 . PS_4 . PS_6 \ldots\ldots PS_{2m} \quad = EF' . r^{m-1} ;$$

les points F, F′ étant tels que $CF=CF'=\frac{a^m}{r^{m-1}}$; et le point E étant tel que l'arc $AS_1E=m . AS_1$.

Corollaire I. Deux points P, P′ étant quelconques, sur la circonférence d'un cercle concentrique à un polygone régulier de $2m$ côtés; on a

$$\{PS_1 . PS_3 \ldots PS_{2m-1}\}^2 + \{PS_2 . PS_4 \ldots PS_{2m}\}^2$$
$$= \{P'S_1 . P'S_3 \ldots P'S_{2m-1}\}^2 + \{P'S_2 . P'S_4 \ldots P'S_{2m}\}^2 .$$

Corollaire II. Le point P étant quelconque, sur la direction de CS_1;

CS_1 ; suivant que ce point sera extérieur ou intérieur au polygone, supposé de $2m$ côtés, on aura

$$PS_1 . PS_3 . PS_5 \ldots\ldots PS_{2m-1} = \pm\left\{\overline{CP}^m - \overline{CS_1}^m\right\} .$$

On aura aussi, quel que soit P sur CS_1,

$$PS_2 . PS_4 . PS_6 \ldots\ldots PS_{2m} = \overline{CP}^m + \overline{CS_1}^m .$$

Corollaire III. P et P′ étant quelconques sur la direction de CS_1 et $2m$ étant toujours le nombre des côtés du polygone ; on aura

$$PS_2 . PS_4 \ldots\ldots PS_{2m} \pm PS_1 . PS_3 \ldots\ldots PS_{2m-1}$$

$$= P'S_2 . P'S_4 \ldots\ldots P'S_{2m} \pm P'S_1 . P'S_3 \ldots\ldots P'S_{2m-1} ,$$

les signes supérieurs devant être pris dans les deux membres, si P et P′ sont intérieurs au polygone ; les signes inférieurs, s'ils lui sont tous deux extérieurs ; enfin le signe inférieur du premier membre devant être pris avec le signe supérieur du second, si P est extérieur et P′ intérieur.

Corollaire IV. Deux polygones réguliers de $2m$ côtés étant concentriques, et ayant leurs côtés respectivement parallèles ; et P étant quelconque sur la direction CS'_1S_1 ; on aura

$$PS_2 . PS_4 \ldots\ldots PS_{2m} \pm PS_1 . PS_3 \ldots\ldots PS_{2m-1}$$

$$= PS'_2 . PS'_4 \ldots\ldots PS'_{2m} \pm PS'_1 . PS'_3 \ldots\ldots PS'_{2m-1} ;$$

Les signes supérieurs devant être pris, dans les deux membres, si le point P est extérieur aux deux polygones ; les inférieurs, s'il est intérieur à tous deux ; enfin, le signe supérieur du premier membre devant être pris avec l'inférieur du second si le point P est situé entre les deux polygones.

Dans tout ce qui va suivre H_1, H_2, H_3 ...... seront les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur les directions des côtés S_1S_2, S_2S_3, S_3S_4, ... respectivement; T_1, T_2, T_3, ... seront les points de contact des mêmes côtés avec le cercle inscrit.

THÉORÈME VII. Le point P étant quelconque, et le nombre des côtés du polygone étant $m>n$; on a

$$\overline{PH}_1^n+\overline{PH}_2^n+\overline{PH}_3^n+\ldots\ldots+\overline{PH}_m^n=\frac{m}{\varpi}\int(r'-a\text{Cos.}\beta)^n d\beta\ ;$$

l'intégrale étant prise entre $\beta=0$ et $\beta=\varpi$.

Corollaire I. P et P′ étant deux points quelconques d'une circonférence concentrique à un polygone régulier, dont le nombre des côtés est $m>n$; on a

$$\overline{PH}_1^n+\overline{PH}_2^n+\overline{PH}_3^n+\ldots+\overline{PH}_m^n=\overline{P'H}_1^n+\overline{P'H}_2^n+\overline{P'H}_3^n+\ldots+\overline{P'H}_m^n.$$

Corollaire II. Le point P étant toujours quelconque, et m, m' étant les nombres de côtés de deux polygones réguliers circonscrits au même cercle ; on aura

$$\frac{\overline{PH}_1^n+\overline{PH}_2^n+\overline{PH}_3^n+\ldots\ldots+\overline{PH}_m^n}{\overline{PH'}_1^n+\overline{PH'}_2^n+\overline{PH'}_3^n+\ldots+\overline{PH'}_{m'}^n}=\frac{m}{m'}\ ;$$

Corollaire III. Quel que soit le point P et le nombre m des côtés d'un polygone régulier ; on a

$$PH_1+PH_2+PH_3+\ldots\ldots+PH_m=mr'.$$

Corollaire IV. P étant quelconque sur la circonférence du cercle inscrit et le nombre des côtés du polygone étant toujours $m>n$; on a

$$\overline{\mathrm{PH}}_1^{\,n}+\overline{\mathrm{PH}}_2^{\,n}+\overline{\mathrm{PH}}_3^{\,n}+\ldots\ldots+\overline{\mathrm{PH}}_m^{\,n}=\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots 2n}.mr'^n.$$

Corollaire V. P étant toujours sur la circonférence du cercle inscrit, et le nombre des côtés du polygone étant encore $m>n$; on aura

$$\frac{\overline{\mathrm{PT}}_1^{\,2n}+\overline{\mathrm{PT}}_2^{\,2n}+\overline{\mathrm{PT}}_3^{\,2n}+\ldots\ldots+\overline{\mathrm{PT}}_m^{\,2n}}{\overline{\mathrm{PH}}_1^{\,n}+\overline{\mathrm{PH}}_2^{\,n}+\overline{\mathrm{PH}}_3^{\,n}+\ldots\ldots+\overline{\mathrm{PH}}_m^{\,n}}=(2r')^n.$$

Corollaire VI. Tout étant comme dans le précédent corollaire, on aura encore

$$\overline{\mathrm{PH}}_1^{\,n}+\overline{\mathrm{PH}}_2^{\,n}+\overline{\mathrm{PH}}_3^{\,n}+\ldots\ldots+\overline{\mathrm{PH}}_m^{\,n}=\frac{mr^n}{\varpi}\int\left(\mathrm{Cos}.\frac{\varpi}{m}-\mathrm{Cos}.\beta\right)^m.d\beta\,;$$

r étant le rayon du cercle circonscrit, et l'intégrale devant être prise entre $\beta=0$ et $\beta=\varpi$.

THÉORÈME. VIII. P étant quelconque, et m étant le nombre des côtés du polygone; en posant l'angle $\mathrm{PCT}_1=\alpha$, on aura

$$\mathrm{PH}_1.\mathrm{PH}_2.\mathrm{PH}_3\ldots\ldots\mathrm{PH}_m=$$

$$\left(\tfrac{1}{2}a\right)^m\left\{\left(\frac{\sqrt{1+\frac{a}{r'}}-\sqrt{1-\frac{a}{r'}}}{\sqrt{1+\frac{a}{r'}}+\sqrt{1-\frac{a}{r'}}}\right)^m+\left(\frac{\sqrt{1+\frac{a}{r'}}+\sqrt{1-\frac{a}{r'}}}{\sqrt{1+\frac{a}{r'}}-\sqrt{1-\frac{a}{r'}}}\right)^m-2\mathrm{Cos}.2m\alpha\right\}.$$

Corollaire I. Si, par un point P extérieur à un polygone régulier de m côtés on mène au cercle inscrit une tangente PT, le touchant en T; en posant l'angle $CPT=2\beta$, et conservant à α sa précédente valeur; on aura

$$PH_1 . PH_2 . PH_3 \ldots\ldots PH_m=4(\tfrac{1}{2}a)^m \mathrm{Sin}.m(\alpha-\beta)\mathrm{Sin}.m(\alpha+\beta)\,.$$

Corollaire II. Si le point P est au contraire intérieur au polygone; en élevant à CP en P une perpendiculaire PK, terminée en K à la circonférence du cercle inscrit, menant le rayon CK et posant l'angle $PCK=2\beta$; on aura

$$PH_1.PH_2.PH_3\ldots PH_m=(\tfrac{1}{2}a)^m\{\mathrm{Tang.}^m(\tfrac{1}{4}\varpi-\beta)+\mathrm{Cot.}^m(\tfrac{1}{4}\varpi-\beta)-2\mathrm{Cos.}2m\alpha\}$$

Corollaire III. P étant sur la circonférence du cercle inscrit; on a

$$PH_1 . PH_2 . PH_3 \ldots\ldots PH_m=4(\tfrac{1}{2}r')^m \mathrm{Sin.}^2 m\alpha\,.$$

Corollaire IV. Si, au contraire, P est sur la circonférence du cercle circonscrit; on aura

$$PH_1 . PH_2 . PH_3 \ldots\ldots PH_m=-4(\tfrac{1}{2}r)^m \mathrm{Cos.}^2 m\alpha\,.$$

Corollaire V. Deux polygones réguliers de m côtés étant l'un $S_1S_2S_3 \ldots\ldots S_m$ circonscrit et l'autre $S'_1S'_2S'_3 \ldots\ldots S'_m$ inscrit à un même cercle, d'un rayon r, de telle manière que leurs côtés soient respectivement parallèles; et P étant un point quelconque de la circonférence; on a, abstraction faite des signes des perpendiculaires,

$$PH_1 . PH_2 . PH_3 \ldots . PH_m+PH'_1 . PH'_2 . PH'_3 \ldots . PH'_m=4(\tfrac{1}{2}r)^m\,.$$

Corollaire VI. Si, au contraire, les sommets de l'inscrit répondent aux milieux des côtés du circonscrit ; on aura , en faisant toujours abstraction des signes des perpendiculaires,

$$PH_1 . PH_2 . PH_3 \ldots . PH_m = PH'_1 . PH'_2 . PH'_3 \ldots . PH'_m .$$

Corollaire VII. Le point P étant sur la circonférence du cercle circonscrit à un polygone régulier de m côtés ; on aura

$$\frac{(PS_1 . PS_2 . PS_3 \ldots . PS_m)^2}{PH_1 . PH_2 . PH_3 \ldots . PH_m} = -(2r)^m .$$

THÉORÈME IX. Les côtés d'un polygone régulier de m côtés étant prolongés jusqu'à la rencontre d'une transversale quelconque en L_1 , L_2 , L_3 , ... L_m ; et la perpendiculaire CP abaissée du centre du polygone sur cette droite étant supposée $=a$; en désignant toujours par 2α l'angle T′CP formé par CP avec le rayon $CT'=r'$ du cercle inscrit qui se termine au milieu T′ du premier côté S_1S_2 ; on aura , si m est impair ,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 \ldots PL_m = \frac{(\frac{1}{2})^m}{\mathrm{Sin}.2m\alpha}\{(\sqrt{r'+a}+\sqrt{r'-a})^{2m}+(\sqrt{r'+a}-\sqrt{r'-a})^{2m}-2(2a)^m\mathrm{Cos}.2m\alpha\} ;$$

et, si m est pair ,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 \ldots PL_m = \frac{(\frac{1}{2})^m}{(2\mathrm{Sin}.m\alpha)^2}\{(\sqrt{r'+a}+\sqrt{r'-a})^{2m}+(\sqrt{r'+a}-\sqrt{r'-a})^{2m}-2(2a)^m\mathrm{Cos}.2m\alpha\} ;$$

abstraction faite des signes.

Corollaire I. Si la transversale est tangente au cercle inscrit ; et si, ayant pris l'arc $PT'E=m.PT'$, on mène par E une tangente EL , rencontrant la transversale en L ; en faisant toujours abstraction des signes , on aura , si m est pair ,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 \ldots . PL_m = r'^m ;$$

et si m est impair ,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 \ldots\ldots PL_m = PL . r'^{m-1} .$$

Corollaire II. Si la transversale est tangente au cercle circonscrit en P ; en prenant, à partir de P, l'arc $PS_1E = mPS_1$, menant au cercle, par E, la tangente EL, rencontrant la transversale en L ; on aura, toujours abstraction faite des signes, si m est impair,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 \ldots\ldots PL_m = PL . r^{m-1} ;$$

et, si m est pair,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 \ldots\ldots PL_m = \overline{EL}^2 . r^{m-2} .$$

Corollaire III. Enfin, la transversale étant supposée passer par le centre du polygone ; si par l'un M des points où cette droite coupe le cercle inscrit, on mène à ce cercle une tangente perpendiculaire à la transversale ; et si, après avoir mené le rayon CA, parallèle à cette tangente, et pris l'arc $AT'E = m . AT' = m(\frac{1}{2}\varpi - MT')$, on mène le rayon CFN par le milieu F de l'arc $AT'E$, et prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente en N ; on aura, en faisant encore abstraction des signes, si m est impair,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 \ldots PL_m = CN . (2r')^{n-1} ;$$

et, si m est pair,

$$PL_1 . PL_2 . PL_3 \ldots PL_m = \overline{CN}^2 . (2r')^{n-2} . \quad (*)$$

(*) Il serait curieux de rechercher si les polygones étoilés de M. Poinsot, ou même ceux qui ont été considérés par M. Argand, à la page 189 de ce volume, ne jouissant pas de quelques propriétés analogues ; en supposant toutefois, pour ces derniers, ou que leurs sommets sont uniformément distribués sur une circonférence de cercle, ou que leurs côtés sont tangens à un même cercle, et ont leurs points de contact avec lui uniformément distribués sur la circonférence.

J. D. G.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions des deux problèmes de géométrie proposés à la page 172 de ce volume;

Par M. Bret, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

Soient x, y, z les coordonnées du sommet d'un angle trièdre, rapporté à trois axes rectangulaires; et soient X, Y, Z les coordonnées courantes dans l'espace. Soient les coordonnées des arêtes de l'angle trièdre ainsi qu'il suit:

$$\left.\begin{array}{lll} X=x+ar\,, & X=x+a'r'\,, & X=x+a''r''\,, \\ Y=y+br\,, & Y=y+b'r'\,, & Y=y+b''r''\,, \\ Z=z+cr\,, & Z=z+c'r'\,, & Z=z+c''r''\,; \end{array}\right\}\quad(1)$$

nous aurons, entre les constantes, les équations de condition

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2=1\,, \\ a'^2+b'^2+c'^2=1\,, \\ a''^2+b''^2+c''^2=1\,; \end{array}\right\}\quad(2)$$

Si l'angle trièdre est tri-rectangle, on aura, en outre

$$\left.\begin{array}{l} aa'+bb'+cc'=0\,, \\ a'a''+b'b''+c'c''=0\,, \\ a''a+b''b+c''c=0\,, \end{array}\right\}\quad(3)$$

Il est d'ailleurs connu qu'à ces relations on peut substituer, comme équivalentes, les relations que voici :

$$\left.\begin{array}{l} a^2+a'^2+a''^2=1\ ,\\ b^2+b'^2+b''^2=1\ ,\\ c^2+c'^2+c''^2=1\ . \end{array}\right\}(4)\qquad \left.\begin{array}{l} bc+b'c'+b''c''=0\ ,\\ ca+c'a'+c''a''=0\ ,\\ ab+a'b'+a''b''=0\ . \end{array}\right\}(5)$$

et qu'on en peut encore, entr'autres, déduire les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b'c''-c'b''}{a}=\dfrac{c'a''-a'c''}{b}=\dfrac{a'b''-b'a''}{c}\ ,\\[2mm] \dfrac{b''c-c''b}{a'}=\dfrac{c''a-a''c}{b'}=\dfrac{a''b-b''a}{c'}\ ,\\[2mm] \dfrac{bc'-cb'}{a''}=\dfrac{ca'-ac'}{b''}=\dfrac{ab'-ba'}{c''}\ . \end{array}\right\}(6)$$

Les équations des faces de l'angle trièdre sont

$$X=x+a'r'+a''r''\ ,\quad X=x+a''r''+ar\ ,\quad X=x+ar+a'r'\ ,$$

$$Y=y+b'r'+b''r''\ ,\quad Y=y+b''r''+br\ ,\quad Y=y+br+b'r'\ ,$$

$$Z=z+c'r'+c''r''\ ,\quad Z=z+c''r''+cr\ ,\quad Z=z+cr+c'r'\ .$$

Si, entre les trois équations de chacune d'elles on élimine les deux variables qui leur sont communes, on trouvera pour nouvelles équations de ces mêmes faces, en ayant égard aux relations (5),

$$\left.\begin{array}{l} a\ (X-x)+b\ (Y-y)+c\ (Z-z)=0\ ,\\ a'(X-x)+b'(Y-y)+c'(Z-z)=0\ ,\\ a''(X-x)+b''(Y-y)+c''(Z-z)=0\ , \end{array}\right\}(7)$$

Ces choses entendues, nous pouvons procéder à la solution des deux questions proposées.

PROBLÈME I. Quelle surface décrit le sommet d'un angle trièdre

trièdre tri-rectangle mobile, dont les arêtes sont assujetties à toucher perpétuellement une surface fixe du second ordre?

Solution. Soit

$$AX^2+BY^2+CZ^2+2A'X+2B'Y+2C'Z=0 \tag{8}$$

l'équation de la surface fixe du second ordre. En la combinant (1) avec celles de l'arête r, pour éliminer X, Y, Z; exprimant que l'équation résultante du second degré en r a ses deux racines égales, et posant, pour abréger,

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'x+2B'y+2C'z=K$$

$$Ax+A'=D\ ,\quad D^2-AK=D'\ ,$$

$$By+B'=E\ ,\quad E^2-BK=E'\ ,$$

$$Cz+C'=F\ ,\quad F^2-CK=F'\ .$$

on aura

$$D'a^2+E'b^2+F'c^2+2EFbc+2FDca+2DEab=0\ ;$$

On exprimera donc que les trois arêtes sont tangentes à la surface courbe, en écrivant

$$D'a^2+E'b^2+F'c^2+2EFbc+2FDca+2DEab=0\ ;$$

$$D'a'^2+E'b'^2+F'c'^2+2EFb'c'+2FDc'a'+2DEa'b'=0\ ,$$

$$D'a''^2+E'b''^2+F'c''^2+2EFb''c''+2FDc''a''+2DEa''b''=0\ ;$$

en ajoutant entr'elles ces trois équations, et ayant égard aux relations (4) et (5), il viendra

$$D'+E'+F'=0\ ;$$

c'est-à-dire,

$$D^2+E^2+F^2-K(A+B+C)=0\ ,$$

ou encore

$$(Ax+A')^2+(By+B')^2+(Cz+C')^2$$

$$-(A+B+C)(Ax^2+By^2+Cz^2+2A'x+2B'y+2C'z)=0\ ,$$

ou enfin, en développant et ordonnant

$$\left.\begin{array}{r}A(B+C)x^2+B(C+A)y^2+C(A+B)z^2\\+2A'(B+C)x+2B'(C+A)y+2C'(A+B)z\end{array}\right\}=A'^2+B'^2+C'^2\ . \quad (9)$$

Telle est l'équation de la surface cherchée.

PROBLÈME II. Quelle surface décrit le sommet d'un angle trièdre tri-rectangle mobile, dont les faces sont assujetties à être perpétuellement tangentes à une même surface donnée du second ordre?

Solution. L'équation du plan tangent à la surface (8), par un point de cette surface dont les coordonnées sont X', Y', Z', est

$$(AX'+A')X+(BY'+B')Y+(CZ'+C')Z+A'X'+B'Y'+C'Z'=0\ ; \quad (10)$$

les trois coordonnées X', Y', Z' étant liées entr'elles par la relation

$$AX'^2+BY'^2+CZ'^2+2A'X'+2B'Y'+2C'Z'=0\ ,$$

laquelle peut être écrite ainsi

$$BC(AX'+A')^2+CA(BY'+B')^2+AB(CZ'+C')^2=BCA'^2+CAB'^2+ABC'^2\ . \quad (11)$$

Mais l'équation du plan de la face $r'r''$ est (7)

$$aX+bY+cZ-(ax+by+cz)=0\ ; \quad (12)$$

si donc on veut exprimer que cette face est tangente à la surface du second ordre, il faudra écrire que les équations (10) et (12) ne diffèrent au plus que par un facteur, ce qui donnera

$$\begin{aligned}\lambda a&=AX'+A',\\ \lambda b&=BY'+B', \quad \lambda(ax+by+cz)+A'X'+B'Y'+C'Z'=0.\\ \lambda c&=CZ'+C'.\end{aligned}$$

En éliminant X', Y', Z', λ entre ces quatre équations et l'équation (11), et posant, pour abréger,

$$BCA'^2+CAB'^2+ABC'^2=K,$$

$$Ax+A'=D, \quad BCD^2-K=D',$$

$$By+B'=E, \quad CAE^2-K=E',$$

$$Cz+C'=F, \quad ABF^2-K=F';$$

on obtient aisément

$$BCD'a^2+CAE'b^2+ABF'c^2+2ABC(AEFbc+BFDca+CDEab)=0.$$

Afin donc que les trois faces de l'angle trièdre soient tangentes à la surface courbe, on devra avoir

$$BCD'a^2+CAE'b^2+ABF'c^2+2ABC(AEFbc+BFDca+CDEab)=0,$$

$$BCD'a'^2+CAE'b'^2+ABF'c'^2+2ABC(AEFb'c'+BFDc'a'+CDEa'b')=0,$$

$$BCD'a''^2+CAE'b''^2+ABF'c''^2+2ABC(AEFb''c''+BFDc''a''+CDEa''b'')=0.$$

En prenant la somme de ces trois équations, et ayant égard aux relations (4) et (5), il vient

$$BCD'+CAE'+ABF'=0,$$

c'est-à-dire,

$$B^2C^2D^2+C^2A^2E^2+A^2B^2F^2-K(BC+CA+AB)=0;$$

ou encore

$$\left.\begin{matrix}B^2C^2(Ax+A')^2+C^2A^2(By+B')^2+A^2B^2(Cz+C')^2\\ -(BC+CA+AB)(BCA'^2+CAB'^2+ABC'^2)\end{matrix}\right\}=0,$$

ou enfin, en développant, ordonnant et réduisant,

$$ABC(x^2+y^2+z^2)+2(BCA'x+CAB'y+ABC'z)$$
$$=(B+C)A'^2+(C+A)B'^2+(A+B)C'^2 .$$

Telle est donc l'équation de la surface cherchée. On voit que cette surface est une sphère ; et, en écrivant son équation sous cette forme :

$$\left\{x+\frac{A'}{A}\right\}^2+\left\{y+\frac{B'}{B}\right\}^2+\left\{z+\frac{C'}{C}\right\}^2=\frac{BC+CA+AB}{ABC}\left\{\frac{A'^2}{A}+\frac{B'^2}{B}+\frac{C'^2}{C}\right\};$$

on voit que les coordonnées de son centre sont

$$-\frac{A'}{A}\,,\quad -\frac{B'}{B}\,,\quad -\frac{C'}{C}\,,$$

et que son rayon est

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right\}\left\{\frac{A'^2}{A}+\frac{B'^2}{B}+\frac{C'^2}{C}\right\}}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. On donne les distances du centre du cercle circonscrit à un triangle à ses trois côtés, et on demande de construire le triangle ?

II. On donne les distances du centre du cercle inscrit à un triangle à ses trois sommets, et on demande de construire le triangle ?

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Essai sur la recherche des grandeur et direction des diamètres principaux, dans les lignes et surfaces du second ordre qui ont un centre;

Par M. Bret, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

On s'est servi plusieurs fois, avec avantage, dans ce recueil, de la propriété de *maxima* et de *minima* dont jouissent les diamètres principaux, dans les lignes et surfaces du second ordre qui ont un centre, pour la recherche des grandeur et direction de ces diamètres. Nous nous proposons de montrer ici que, par des considérations plus élémentaires, on peut parvenir au même but, d'une manière tout au moins aussi simple.

I. Soit l'équation

$$ax^2+by^2+2cxy=0 . \qquad (1)$$

Il est connu, et il est d'ailleurs facile de démontrer 1.° que, si l'on a

$$c^2-ab<0 , \qquad (2)$$

cette équation n'exprimera absolument rien ; 2.° qu'elle exprimera le système de deux droites se coupant à l'origine, si l'on a au contraire

$$c^2-ab>0 ; \qquad (3)$$

3.° qu'enfin, dans le cas particulier où l'on aura

$$c^2-ab=0\ , \qquad (4)$$

les deux droites se confondront en une seule, donnée de direction par l'une ou l'autre des deux équations équivalentes

$$\left.\begin{array}{l} ax+cy=0\ , \\ by+cx=0\ ; \end{array}\right\} \quad (5)$$

lesquelles en effet, par l'élimination de x et y, reproduisent la relation (4).

Cela posé ; soit

$$Ax^2+By^2+2Cxy=D \qquad (6)$$

l'équation d'une ligne du second ordre, ayant son centre à l'origine des coordonnées, que nous supposons former entre elles un angle γ. L'équation d'un cercle ayant son centre à l'origine et son rayon égal à r sera

$$x^2+y^2+2xy\,\mathrm{Cos.}\gamma=r^2\ . \qquad (7)$$

Ce cercle coupera la courbe en des points dont r exprimera la distance à l'origine.

Soit prise la différence des produits de l'équation (6) par r^2 et de l'équation (7) par D ; nous aurons ainsi

$$(Ar^2-D)x^2+(Br^2-D)y^2+2(Cr^2-D\,\mathrm{Cos.}\gamma)xy=0\ , \qquad (8)$$

équation qui, ayant lieu en même temps que (6) et (7), doit appartenir à une ligne contenant les points d'intersection de celles qu'expriment ces deux-là.

Par la comparaison de (1) et de (8), on a

$$a=Ar^2-D\ , \quad b=Br^2-D\ , \quad c=Cr^2-D\,\mathrm{Cos.}\gamma\ ;$$

d'où il suit 1.° que, si l'on prend (2) l'arbitraire r de telle sorte qu'on ait

$$(Cr^2-D\,\mathrm{Cos.}\gamma)^2-(Ar^2-D)(Br^2-D)<0\ , \qquad (9)$$

l'équation (8) n'exprimera rien ; et par conséquent le cercle (7) ne coupera pas la courbe (6) ; 2.° que, si au contraire on prend (3) l'arbitraire r de telle sorte qu'on ait

$$(Cr^2-D\mathrm{Cos}.\gamma)^2-(Ar^2-D)(Br^2-D)>0\ , \qquad (10)$$

cette équation (8) exprimera le système de deux droites se coupant à l'origine, lesquelles contiendront les quatre intersections de la courbe (6) avec le cercle (7) ; 3.° qu'enfin, dans le cas particulier (4) où l'on prendra l'arbitraire r de telle sorte qu'on ait

$$(Cr^2-D\mathrm{Cos}.\gamma)^2-(Ar^2-D)(Br^2-D)=0\ , \qquad (11)$$

les deux droites se confondront en une seule ; de sorte que le cercle touchera simplement la courbe.

Or, il est visible qu'alors cette droite unique deviendra l'un ou l'autre des diamètres principaux, et que r sera la longueur de la moitié de ce diamètre ; ainsi, les longueurs des demi-diamètres principaux sont donnés par l'équation (11) qui, développée, revient à

$$(C^2-AB)r^4+D(A+B-2C\mathrm{Cos}.\gamma)r^2-D^2\mathrm{Sin}.^2\gamma=0\ ;$$

et leur direction est donnée (5) par l'une ou l'autre des deux équations équivalentes

$$(Ar^2-D)x+(Cr^2-D\mathrm{Cos}.\gamma)y=0\ ,$$

$$(Br^2-D)y+(Cr^2-D\mathrm{Cos}.\gamma)x=0\ .$$

Si, dans l'équation (8), on suppose $r=\infty$, cette équation devient

$$Ax^2+By^2+2Cxy=0\ ,$$

et exprime conséquemment le système de deux droites coupant la courbe (6) à une distance infinie ; mais, pour cela, il faut qu'on ait

$$C^2-AB>0\ ;$$

ainsi, c'est là le seul cas où cette courbe puisse avoir des asymptotes.

II. Soit l'équation

$$ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'zx+2c'xy=0 \; . \qquad (1)$$

Il est connu, et il est d'ailleurs facile de démontrer que, suivant que la fonction

$$abc-aa'^2-bb'^2-cc'^2+2a'b'c' \qquad (2)$$

sera positive ou négative, l'équation (1) n'exprimera absolument rien, ou exprimera une surface conique ayant son centre à l'origine; et qu'en particulier, lorsque cette fonction sera nulle, la surface conique dégénèrera en une ligne droite, donnée par le système de deux quelconques des trois équations

$$\left.\begin{array}{l} ax+b'z+c'y=0 \; , \\ by+c'x+a'z=0 \; , \\ cz+a'y+b'x=0 \; ; \end{array}\right\} \quad (3)$$

donc chacune est en effet comportée par les deux autres, toutes les fois que la fonction (2) est nulle.

Cela posé; soit

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=D \qquad (4)$$

l'équation d'une ligne du second ordre, ayant son centre à l'origine; les coordonnées faisant entre elles les angles que voici:

$$\text{Ang.}(y\,,z)=\alpha \; , \quad \text{Ang.}(z\,,x)=\beta \; , \quad \text{Ang.}(x\,,y)=\gamma \; .$$

L'équation d'une sphère ayant son centre à l'origine et son rayon égal à r sera

$$x^2+y^2+z^2+2yz\text{Cos.}\alpha+2zx\text{Cos.}\beta+2xy\text{Cos.}\gamma=r^2 \; . \qquad (5)$$

cette sphère coupera la surface courbe suivant tous ceux de ses points qui seront à la distance r de l'origine.

Soit prise la différence des produits de l'équation (4) par r^2 et de l'équation (5) par D; nous aurons ainsi

$$\left.\begin{array}{l}(Ar^2-D)x^2+2(A'r^2-D\mathrm{Cos}.\alpha)yz\\+(Br^2-D)y^2+2(B'r^2-D\mathrm{Cos}.\beta)zx\\+(Cr^2-D)z^2+2(C'r^2-D\mathrm{Cos}.\gamma)xy\end{array}\right\}=0\ ; \qquad (6)$$

équation qui, ayant lieu en même temps que (4) et (5), doit, en général, exprimer une surface qui passe par la commune section des deux premiers.

Par la comparaison de (1) et (6), on a

$$\begin{array}{ll}a=Ar^2-D\ , & a'=A'r^2-D\mathrm{Cos}.\alpha\ ;\\ b=Br^2-D\ , & b'=B'r^2-D\mathrm{Cos}.\beta\ ,\\ c=Cr^2-D\ , & c'=C'r^2-D\mathrm{Cos}.\gamma\ ;\end{array}$$

d'où l'on voit que, suivant les diverses valeurs qu'on voudra assigner à r, l'équation (6) pourra être absurde d'elle-même, ou exprimer une surface conique ayant son centre à l'origine, laquelle passera par l'intersection de la sphère avec la surface du second ordre. En particulier, cette sphère deviendra tangente à la surface (1), et la surface conique se réduira à une droite (2), lorsqu'on aura

$$\left.\begin{array}{l}(Ar^2-D)(Br^2-D)(Cr^2-D)+2(A'r^2-D\mathrm{Cos}.\alpha)(B'r^2-D\mathrm{Cos}.\beta)(C'r^2-D\mathrm{Cos}.\gamma)\\-(Ar^2-D)(A'r^2-D\mathrm{Cos}.\alpha)^2-(Br^2-D)(B'r^2-D\mathrm{Cos}.\beta^2)-(Cr^2-D)(C'r^2-D\mathrm{Cos}.\gamma)^2=0.\end{array}\right. \quad (7)$$

Or, il est visible qu'alors cette droite unique deviendra l'un des diamètres principaux, et que r sera la longueur de la moitié de ce diamètre; ainsi, les longueurs des demi-diamètres principaux sont données par l'équation (7) qui, développée revient à

$$(ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C')r^6$$

$$-D\left\{\begin{array}{l}(BC-A'^2)+2(B'C'-AA')\mathrm{Cos}.\alpha\\+(CA-B'^2)+2(C'A'-BB')\mathrm{Cos}.\beta\\+(AB-C'^2)+2(A'B'-CC')\mathrm{Cos}.\gamma\end{array}\right\}r^4$$

$$+D^2\left\{\begin{array}{l} A\,\text{Sin.}^2\alpha-2A'(\text{Cos}\,\alpha-\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}\gamma) \\ +B\,\text{Sin.}^2\beta-2B'(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\,\text{Cos.}\alpha) \\ +C\,\text{Sin.}^2\gamma-2C'(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\,\text{Cos.}\beta) \end{array}\right\}r^2$$

$$-D^3(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos}^2\lambda+2\text{Cos.}\alpha\,\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}\gamma)=0\;.$$

et leur direction est donnée (3) par le concours de deux quelconques des trois équations

$$(Ar^2-D)x+(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)z+(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)y=0\;,$$

$$(Br^2-D)y+(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)x+(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)z=0\;,$$

$$(Cr^2-D)z+(A'r^2-D\text{Cos.}\delta)y+(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)x=0\;.$$

En raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus on trouvera que l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=0$$

est celle de la surface conique asymptotique de la surface proposée ; mais que, pour qu'elle puisse signifier quelque chose, il faut qu'on ait

$$ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C'>0\;;$$

ainsi, ce cas est le seul où la surface proposée ait une surface conique asymptotique.

III. Quelque simple et élégante que puisse paraître la précédente analise, nous pensons que, dans un traité élémentaire de géométrie analitique, on doit lui préférer encore soit la discussion donnée par M. Gergonne, à la page 61 de ce volume, soit celle que nous avons donnée nous-même, par la transformation des coordonnées, (tome II, page 33, et tome IV, page 93), et où nous avons fait connaître pour la première fois l'équation qui donne les longueurs des diamètres principaux des surfaces du second ordre, en fonction des coefficiens de l'équation primitive.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Développement en séries des fonctions logarithmiques et exponentielles ;

Par M. GERGONNE.

J'AI donné, dans le troisième volume de ce recueil (page 344), une méthode de développement des fonctions circulaires en séries qui me semble fort courte et fort simple. Je me propose ici de parvenir, par des moyens analogues, au développement des fonctions logarithmiques et exponentielles ; de manière que les deux articles pourront se servir de suite l'un à l'autre.

I. Le logarithme de l'unité étant nul, dans tout système logarithmique, on est fondé à supposer, quel que soit x,

$$\text{Log.}(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots\ldots ; \qquad (1)$$

A, B, C,..... étant des coefficiens inconnus qu'il s'agit de déterminer.

On aura semblablement

$$\text{Log.}(1+y)=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots\ldots , \qquad (2)$$

et

$$\text{Log.}\left\{1+\left(\frac{x-y}{1+y}\right)\right\}=A\left(\frac{x-y}{1+y}\right)+B\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2+C\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^3+\ldots \quad (3)$$

Mais on a

$$\text{Log.}(1+x)-\text{Log.}(1+y)=\text{Log.}\frac{1+x}{1+y}=\text{Log.}\left\{1+\left(\frac{x-y}{1+y}\right)\right\};$$

substituant donc les valeurs (1), (2), (3), il viendra, en divisant les deux membres de l'équation résultante par $x-y$, et en les multipliant par $1+y$,

$$(1+y)\{A+B(x+y)+C(x^2+xy+y^2)+D(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\ldots\}$$
$$=A+B\left(\frac{x-y}{1+y}\right)+C\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2+D\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^3+\ldots.$$

Dans cette dernière équation, x et y demeurant indéterminés et indépendans, on peut supposer $y=x$; elle devient ainsi

$$(1+x)(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots\ldots)=A\ ;$$

ou, en développant et réduisant,

$$\left.\begin{matrix}2B\\+A\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}x+3C\\+2B\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}x^2+4D\\+3C\end{matrix}\right|x^3+\ldots\ldots=0\ .$$

Ce qui donnera, à cause de l'indétermination de x,

$$\left.\begin{array}{l}2B+\ A=0\ ,\\3C+2B=0\ ,\\4D+3C=0\ ,\\\ldots\ldots=0\ ;\end{array}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{array}{l}B=-\frac{1}{2}A\ ,\\C=+\frac{1}{3}A\ ,\\D=-\frac{1}{4}A\ ,\\\ldots\ldots\ldots;\end{array}\right.$$

substituant donc dans (1), il viendra

$$\text{Log.}(1+x)=A(x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\ldots\ldots \qquad (4)$$

Dans cette formule, A demeure arbitraire; mais cela doit être ainsi, puisqu'à raison du choix arbitraire de la base, à un même nombre peut répondre une infinité de logarithmes différens.

Si, dans cette formule (4), on change x en $x-1$, elle deviendra

$$\text{Log.}x=A\{(x-1)-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{3}(x-1)^3-\tfrac{1}{4}(x-1)^4+\ldots\ldots\}\ . \qquad (5)$$

Soit b la base du système logarithmique, et soit successivement changé

changé x, dans cette dernière formule, en $\sqrt[m]{x}$ et en $\sqrt[n]{b}$, elle deviendra

$$\text{Log}.x = mA\{(\sqrt[m]{x}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[m]{x}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[m]{x}-1)^3-\ldots\},$$

$$1 = nA\{(\sqrt[n]{b}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[n]{b}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[n]{b}-1)^3-\ldots\};$$

d'où on conclura, en divisant,

$$\text{Log}.x = \frac{m}{n}\cdot\frac{(\sqrt[m]{x}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[m]{x}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[m]{x}-1)^3-\ldots}{(\sqrt[n]{b}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[n]{x}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[n]{x}-1)^3-\ldots};$$

expression que l'on peut toujours facilement rendre convergente à volonté, en prenant pour m et n des puissances de 2 d'un degré très-élevé. On trouvera, au surplus, dans le premier volume de ce recueil (page 18) de très-amples développemens sur le parti que l'on peut tirer de la formule (4), dans le calcul des tables de logarithmes.

II. Le logarithme de l'unité étant nul, dans tout système de logarithmes, on est fondé à supposer, quel que soit x,

$$x = 1 + A\text{Log}.x + B\text{Log}.^2x + C\text{Log}.^3x + \ldots \qquad (6)$$

A, B, C, ... étant des coefficiens inconnus qu'il s'agit de déterminer.

On aura semblablement

$$y = 1 + A\text{Log}.y + B\text{Log}.^2y + C\text{Log}.^3y + \ldots \qquad (7)$$

et

$$\frac{x}{y} = 1 + A\text{Log}.\frac{x}{y} + B\text{Log}.^2\frac{x}{y} + C\text{Log}.^3\frac{x}{y} + \ldots;$$

série que l'on peut encore écrire ainsi

$$\frac{x}{y} = 1 + A(\text{Log}.x-\text{Log}.y) + B(\text{Log}.x-\text{Log}.y)^2 + C(\text{Log}.x-\text{Log}.y)^3 + \ldots \quad (8)$$

Mais on a

$$x-y = y\left(\frac{x}{y}-1\right);$$

substituant donc les valeurs (6), (7), (8), il viendra, en divisant les deux membres de l'équation résultante par $\text{Log}.x-\text{Log}.y$,

$$A+B(\text{Log}.x+\text{Log}.y)+C(\text{Log}.^2x+\text{Log}.x\text{Log}.y+\text{Log}.^2y)+\ldots\ldots$$
$$=y\{A+B(\text{Log}.x-\text{Log}.y)+C(\text{Log}.x-\text{Log}.y)^2+\ldots\ldots\}$$

Dans cette dernière équation, x et y devant demeurer indéterminés et indépendans, on peut supposer $y=x$; elle devient ainsi

$$A+2B\text{Log}.x+3C\text{Log}.^2x+4D\text{Log}.^3x+\ldots\ldots=Ax\ ;$$

ou, en mettant pour x sa valeur (6) et réduisant,

$$2B\text{Log}.x+3C\text{Log}.^2x+4D\text{Log}.^3x+\ldots\ldots$$
$$=A^2\text{Log}.x+AB\text{Log}.^2x+AC\text{Log}.^3x+\ldots\ldots\ ;$$

ce qui donnera, à cause de l'indétermination de x,

$$\left.\begin{array}{l} 2B=A^2\ , \\ 3C=AB\ , \\ 4D=AC\ , \\ \ldots\ldots\ ; \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} B=\dfrac{A^2}{1.2}\ ; \\ C=\dfrac{A^3}{1.2.3}\ , \\ D=\dfrac{A^4}{1.2.3.4}\ , \\ \ldots\ldots\ ; \end{array}\right.$$

substituant donc dans (6), il viendra

$$x=1+\frac{A\text{Log}.x}{1}+\frac{A^2\text{Log}.^2x}{1.2}+\frac{A^3\text{Log}.^3x}{1.2.3}+\ldots, \qquad (9)$$

formule dans laquelle A demeure arbitraire, pour les même raisons que ci-dessus.

III. On se tromperait étrangement si l'on pensait que l'indéterminée A est la même dans la formule (9) que dans la formule (4); puisque ces deux formules ont été déterminées indépendamment l'une de l'autre. Il existe néanmoins entre ces deux indéterminées une relation simple facile à découvrir. Observons pour cela qu'on tire des équations (5) et (9), en changeant A en A' dans la première,

$$\text{Log}.x=A'(x-1)\{1-\tfrac{1}{2}(x-1)+\tfrac{1}{3}(x-1)^2-\ldots\ldots\}\ ,$$
$$x-1=A\text{Log}.x\left\{1+\frac{A\text{Log}.x}{1.2}+\frac{A^2\text{Log}.^2x}{1.2.3}-\ldots\ldots\right\}\ ;$$

ce qui donne, en multipliant membre à membre, et supprimant de part et d'autre le facteur $(x-1)\text{Log.}x$,

$$1=AA'\{1-\tfrac{1}{2}(x-1)+\tfrac{1}{3}(x-1)^2-\ldots..\}\left\{1+\frac{A\text{Log.}x}{1.2}+\frac{A^2\text{Log.}^2x}{1.2.3}+\ldots\right\};$$

faisant enfin, dans cette dernière équation $x=1$, on arrivera à cette relation simple

$$AA'=1\ .$$

Ainsi, l'on peut écrire

$$\text{Log.}x=\frac{1}{A}\left\{(x-1)-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{3}(x-1)^3-\ldots\ldots\right\},\qquad(10)$$

$$x=1+\frac{A\text{Log.}x}{1}+\frac{A^2\text{Log.}^2x}{1.2}+\frac{A^3\text{Log.}^3x}{1.2.3}+\ldots.\ ;\qquad(11)$$

la constante A étant alors la même dans les deux formules.

Cette constante étant arbitraire, la supposition la plus simple qu'on puisse faire à son égard est $A=1$; on tombe alors sur les logarithmes *népériens* ou *naturels*. En les désignant simplement par l, on a

$$\text{l}x=(x-1)-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{3}(x-1)^3-\ldots..\ ,\qquad(12)$$

$$x=1+\frac{\text{l}x}{1}+\frac{\text{l}^2x}{1.2}+\frac{\text{l}^3x}{1.2.3}+\ldots\ldots\qquad(13)$$

Si, dans la dernière de ces deux formules, on change x en b^x, b étant la base d'un système quelconque, on aura

$$b^x=1+\frac{x\text{l}b}{1}+\frac{x^2\text{l}^2b}{1.2}+\frac{x^3\text{l}^3b}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

En désignant par e la base du système de Néper, et changeant b en e, dans cette dernière formule, on aura

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Si enfin dans celle-ci on fait $x=1$, on aura, pour calculer la base e du système de Néper, cette série très-commode et très-convergente

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème d'alliage proposé la page 264 de ce volume ;

Par M. J. B. Durrande.

PROBLÈME. *Deux vases contenant des volumes connus* V, V′ *de mélanges de plusieurs liquides, dont le nombre et les proportions sont inconnus pour chaque vase ; ne serait-il pas possible de construire deux vases plus petits et d'une même capacité, tels qu'en les emplissant à la fois dans les deux vases donnés, et versant ensuite dans chacun le liquide extrait de l'autre, les mélanges de liquides contenus dans les deux vases, après cette opération, soient exactement de même nature ? et quelle devrait être pour cela la capacité commune des deux vases égaux ?*

Solution. Puisqu'on suppose les liquides exactement mêlés dans chaque vase, on peut considérer les mélanges comme deux liquides de nature différente qu'il faut mêler exactement, par l'opération proposée.

Soit donc désignée par x la capacité commune des deux vases égaux et inconnus ; l'opération exécutée, les volumes des deux liquides contenus dans les deux vases seront

$$\text{Premier vase}\left\{\begin{array}{ll}\text{Premier liquide. . . . . .} & V-x\ ;\\ \text{Deuxième liquide . . . . .} & x\ ,\end{array}\right.$$

$$\text{Deuxième vase}\left\{\begin{array}{ll}\text{Premier liquide. . . . .} & x\ ,\\ \text{Deuxième liquide . . . .} & V'-x\ ,\end{array}\right.$$

afin donc que les deux mélanges soient exactement faits dans les mêmes proportions, on doit avoir

$$\frac{V-x}{x}=\frac{x}{V'-x}\,, \quad \text{ou} \quad x^2=(V-x)(V'-x)\,,$$

d'où on tire

$$x=\frac{VV'}{V+V'}\,;$$

ainsi la capacité commune des deux vases demandés est le produit des volumes des deux mélanges, divisé par leur somme.

Soit $V>V'$; on a

$$\tfrac{1}{2}V-x=\tfrac{1}{2}V\,.\,\frac{V-V'}{V+V'}\,, \quad x-\tfrac{1}{2}V'=\tfrac{1}{2}V'\,.\,\frac{V-V'}{V+V'}\,;$$

ce qui montre que la capacité x est toujours plus grande que la moitié du plus petit des deux volumes donnés, mais moindre que la moitié du plus grand.

Dans le cas où l'on a $V'=V$, on trouve simplement $x=\tfrac{1}{2}V$; ce qui est d'ailleurs évident.

On voit donc que l'on peut, par une opération unique, mêler exactement deux liquides contenus dans deux vases différens, lorsqu'on n'a pas la faculté de les verser en totalité dans un troisième vase. Il serait intéressant d'étendre cette méthode à un plus grand nombre de liquides contenus dans autant de vases.

Solutions de deux des problèmes d'optique proposés à la page 196 de ce volume;

Par un Abonné.

PROBLÈME I. *Sur une table rectangulaire donnée doivent être placées deux lumières de même intensité, élevées au-dessus de cette* *table d'une même quantité donnée, et qui doivent y être tellement posées que leurs projections tombent sur la droite qui joint les milieux des deux petits côtés de cette table, et soient également distantes de part et d'autre du milieu de cette droite. On demande de quelle manière ces deux lumières doivent être placées; 1.° pour que le point le moins éclairé du bord de la table le soit le plus possible? 2.° pour que le point le plus éclairé du bord de la table le soit le moins possible?*

Solution. Soient $2a$ l'un des longs côtés, $2b$ l'un des petits côtés de la table, c la hauteur commune des deux lumières au-dessus de son plan, et z la distance commune de leurs projections au centre de la table. Pour plus de simplicité, prenons pour unité d'intensité l'intensité commune de nos deux lumières et pour unité d'illumination la clarté que donne l'une d'elles à une distance égale à l'unité de longueur, et rappelons-nous que la lumière se propage en raison inverse du quarré des distances.

Examinons, en premier lieu, ce qui se passe le long de l'un des petits côtés de la table. Il est d'abord évident que son milieu en sera le point le plus éclairé, puisque chacune des deux lumières sera plus voisine de ce milieu que de tout autre point du même bord. Il est clair en outre que l'illumination de ce même bord ira sans cesse en décroissant continuellement, de part et d'autre de ce milieu; de manière que les deux extrémités de l'un des petits côtés en seront les points les moins éclairés.

L'illumination du milieu de l'un des petits côtés sera

$$\frac{1}{c^2+(a-z)^2}+\frac{1}{c^2+(a+z)^2}=\frac{2(z^2+a^2+c^2)}{(z^2+a^2+c^2)^2-4a^2z^2}\,; \qquad (1)$$

et celle de l'une de ses extrémités sera

$$\frac{1}{b^2+c^2+(a-z)^2}+\frac{1}{b^2+c^2+(a+z)^2}=\frac{2(z^2+a^2+b^2+c^2)}{(z^2+a^2+b^2+c^2)^2-4a^2z^2}\,. \qquad (2)$$

Supposons actuellement que z varie et voyons ce qui en devra résulter. Si d'abord on avait $z=\infty$, il est évident que le milieu du petit côté serait infiniment peu éclairé, et qu'il en serait de même de ses deux extrémités; mais, à mesure que z diminuera l'illumination deviendra plus vive; cependant, comme cette illumination redeviendra de nouveau infiniment petite, lorsqu'on aura $z=-\infty$, il s'ensuit qu'entre ces deux valeurs il doit s'en trouver une qui donne pour le milieu du petit côté, et conséquemment aussi pour ses extrémités, un *maximum* d'illumination; et l'on voit même que ce *maximum* répondrait à $z=a$, si l'on avait $c=0$, puisqu'alors l'une des lumières se confrondrait avec le milieu du petit côté.

Pour savoir à quelle valeur de z répond le *maximum* dont il s'agit, lorsque c n'est point nul, différentions la formule (1) par rapport à cette variable z en divisant par dz; nous trouverons ainsi

$$4z.\frac{4a^2(a^2+c^2)-(z^2+a^2+c^2)^2}{\{(z^2+a^2+c^2)^2-4a^2z^2\}^2};$$

d'où, en égalant à zéro,

$$z=0\,, \quad \text{ou} \quad (z^2+a^2+c^2)^2=4a^2(a^2+c^2)\,.$$

En rejetant tout emploi de signes qui rendrait inévitablement z imaginaire, ainsi que le double signe de z, la seconde équation donne simplement

$$z=\sqrt{(2a-\sqrt{a^2+c^2})\sqrt{a^2+c^2}}\,;$$

et encore, pour que cette valeur puisse être admise, faudra-t-il qu'on n'ait pas $2a<\sqrt{a^2+c^2}$. Ainsi, en élevant au milieu de la table une perpendiculaire à son plan égale à la hauteur commune des deux lumières, il faudra que la distance de l'extrémité de cette perpendiculaire au milieu du petit côté n'excède pas la longueur totale de la table, pour que cette valeur de z puisse être admise.

Pour savoir présentement laquelle de cette valeur ou de la valeur $z=0$ répond au *maximum*, passons à la différentielle seconde, que nous trouverons être, en la divisant par dz^2,

$$4\,.\,\frac{4a^2(a^2+c^2)-(z^2+a^2+c^2)^2}{\{(z^2+a^2+c^2)^2-4a^2z^2\}^2}$$

$$-16z^2.\frac{(z^2+a^2+c^2)\{(z^2+a^2+c^2)^2-4a^2z^2\}-2\{(z^2+a^2+c^2)-2a^2\}\{4a^2(a^2+c^2)-(z^2+a^2+c^2)^2\}}{\{(z^2+a^2+c^2)^2-4a^2z^2\}^3}$$

En posant $z=0$, la seconde fraction s'évanouit et la première devient

$$4\,.\,\frac{4a^2-(a^2+c^2)}{(a^2+c^2)^3}\;;$$

quantité négative ou positive, suivant que $2a$ sera moindre ou plus grand que $\sqrt{a^2+b^2}$; ainsi, la valeur $z=0$, répondra à un *maximum*, si la valeur

$$z=\sqrt{(2a-\sqrt{a^2+c^2})\sqrt{a^2+c^2}}\;.$$

est *imaginaire*; et cette valeur $z=0$ répondra à un *minimun*, si, au contraire, l'autre valeur de z est *réelle*.

Si ensuite on pose

$$z=\sqrt{(2a-\sqrt{a^2+c^2})\sqrt{a^2+c^2}}\;,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(z^2+a^2+c^2)^2=4a^2(a^2+c^2)\;;$$

c'est au contraire, la première fraction qui s'évanouit, tandis que la seconde devient

$$-\frac{1}{2a^3}\,.\,\frac{2a-\sqrt{a^2+c^2}}{\{\sqrt{a^2+c^2}-a\}^2}\;;$$

quantité *négative* ou *positive*, suivant que $2a$ sera plus grand ou plus petit que $\sqrt{a^2+c^2}$; et comme, dans le dernier de ces deux cas, la valeur de z devient imaginaire, il s'ensuit que, lorsque cette valeur

$$z=\sqrt{(2a-\sqrt{a^2+c^2})\sqrt{a^2+c^2}}$$

est possible, elle répond toujours à un *maximum*.

Voici

Voici donc de quelle manière variera l'illumination du milieu de l'un des petits côtés de la table, et conséquemment de tous les points de ce petit côté, par suite des variations de la distance commune z des projections des deux lumières au centre de cette table. Si l'on a $2a<\sqrt{a^2+c^2}$; ce milieu sera infiniment peu éclairé lorsqu'on aura $z=\infty$; la clarté qu'il recevra augmentera ensuite de plus en plus, à mesure que z deviendra plus petit ; de manière qu'elle sera à son *maximum* lorsqu'on aura $z=0$; z prenant ensuite des valeurs négatives de plus en plus grandes, cette clarté diminuera de nouveau jusqu'à ce qu'enfin elle deviendra encore infiniment petite lorsqu'on aura $z=-\infty$.

Si, au contraire, on a $2a>\sqrt{a^2+c^2}$; la clarté reçue par le milieu du petit côté de la table sera toujours la moindre possible ou nulle, lorsqu'on aura $z=\infty$; elle croîtra ensuite de plus en plus à mesure que z diminuera, mais de manière qu'elle aura atteint son *maximum* lorsqu'on aura

$$z=\sqrt{(2a-\sqrt{a^2+c^2})\sqrt{a^2+c^2}}\;;$$

elle décroîtra ensuite à mesure que z diminuera et parviendra à son *minimum* pour $z=0$; croissant ensuite de nouveau, pour z négatif ; elle parviendra à un nouveau *maximum*, égal au premier, lorsqu'on aura

$$z=-\sqrt{(2a-\sqrt{a^2+c^2})\sqrt{a^2+c^2}}\;;$$

après quoi elle diminuera de nouveau continuellement pour devenir encore nulle, lorsqu'on aura $z=-\infty$.

Dans le cas particulier où l'on aurait $2a=\sqrt{a^2+c^2}$, les deux *maxima* se confondraient avec le *minimum* de part et d'autre duquel ils se trouvent en général symétriquement situés ; ils répondraient ainsi tous trois à la valeur $z=0$; mais il est clair que, dans la question qui nous occupe, cette valeur devrait être réputée donner un *maximum*.

D'après les formules (1) et (2), on voit que, lorsque $z=0$, la lumière que reçoit le milieu de l'un des petits côtés de la table est

$$\frac{2}{a^2+c^2}\,; \qquad (3)$$

tandis que la lumière reçue par l'une des extrémités de ce petit côté est

$$\frac{2}{a^2+b^2+c^2}\,. \qquad (4)$$

Si au contraire on fait

$$z=\sqrt{(2a-\sqrt{a^2+c^2})\sqrt{a^2+c^2}}\,, \qquad (5)$$

valeur extrêmement facile à construire ; la lumière reçue par le milieu de l'un des petits côtés de la table sera

$$\frac{1}{2a(\sqrt{a^2+c^2}-a)}\,, \qquad (6)$$

tandis que la lumière reçue par l'une des extrémités de ce petit côté sera

$$\frac{2(b^2+2a\sqrt{a^2+c^2})}{\{b^2+2a\sqrt{a^2+c^2}\}^2-8a^3\sqrt{a^2+b^2}}\,. \qquad (7)$$

On voit donc que, si l'on ne voulait avoir égard qu'à l'éclairage des petits côtés de la table, on pourrait établir en principe que plus cette table sera longue relativement à la hauteur commune des deux lumières au-dessus de son plan, et plus aussi il faudra retirer ces lumières vers ses extrémités ; tandis qu'au contraire plus elles seront élevées au-dessus de son plan relativement à sa longueur, et plus aussi il sera nécessaire de les ramener vers son centre.

Mais considérons présentement ce qui se passera sur chacun des longs côtés de la table ; et remarquons d'abord que, si l'on avait $z=0$, c'est-à-dire, si les deux lumières se confondaient, de manière à répondre au milieu de la table, le milieu de chacun de ces longs côtés en serait le point le plus éclairé ; tandis que ses autres points le seraient de moins en moins, à mesure qu'ils en seraient plus distans. Dans cette hypothèse, l'illumination du milieu de l'un des longs côtés serait

$$\frac{2}{b^2+c^2}; \qquad (8)$$

et quant à celle de l'une des extrémités de ce long côté elle serait la même que ci-dessus (4). On sent par là que, tant que les deux lumières demeureront à une certaine proximité l'une de l'autre, ce sera toujours le milieu de chacun des longs côtés qui en sera le point le plus éclairé ; tandis que l'illumination sera la plus faible pour ses extrémités.

Supposons au contraire que b étant toujours fini on ait $z=\infty$; il est clair qu'alors l'illumination du milieu de l'un des longs côtés sera nulle, tandis qu'il se trouvera, de part et d'autre de ce milieu, deux *maxima* d'illumination qui répondront directement vis-à-vis de chaque lumière, et auront l'un et l'autre pour expression

$$\frac{1}{b^2+c^2};$$

et l'on peut inférer de là que tant que les deux lumières se trouveront à une certaine distance l'une de l'autre, il y aura au milieu de chaque long côté un *minimum* d'illumination, compris entre deux *maxima* symétriquement situés par rapport à lui, et moins distans de ce milieu que les points du long bord qui répond directement à chaque lumière. Au delà de ces *maxima* l'illumination décroîtra continuellement, et pourra même devenir moindre que celle du milieu, si la table est suffisamment longue.

Confirmons présentement ces aperçus par le calcul. Considérons un point de l'un des longs côtés dont la distance au milieu de ce long côté soit égale à x; la lumière reçue par ce point sera

$$\frac{1}{b^2+c^2+(x-z)^2}+\frac{1}{b^2+c^2+(x+z)^2}=\frac{2(x^2+z^2+b^2+c^2)}{(x^2+z^2+b^2+c^2)^2-4z^2x^2}. \qquad (9)$$

Supposons z donné et constant; la différentielle de cette expression prise par rapport à x et divisée par dx sera

$$4x\,.\,\frac{4z^2(z^2+b^2+c^2)-(x^2+z^2+b^2+c^2)^2}{\{(x^2+z^2+b^2+c^2)^2-4z^2x^2\}^2}\,.$$

d'où, en égalant à zéro,

$$x=0\,, \quad \text{ou} \quad (x^2+z^2+b^2+c^2)^2=4z^2(z^2+b^2+c^2)\,.$$

En rejetant tout emploi de signes qui rendrait inévitablement x imaginaire, ainsi que le double signe de x, la seconde équation donne simplement

$$x=\sqrt{(2z-\sqrt{z^2+b^2+c^2})\sqrt{z^2+b^2+e^2}}\;;$$

et encore faut-il, pour que cette valeur puisse être admise, que $\sqrt{z^2+b^2+c^2}$ ne soit pas plus grand que $2z$; c'est-à-dire, en d'autres termes, que la distance de l'une des lumières au milieu de l'un des longs côtés n'excède pas sa distance à l'autre lumière.

Pour savoir présentement laquelle de cette valeur ou de la valeur $x=0$ répond au *maximum* ou au *minimum*, passons à la différentielle seconde qui, divisée par dx^2, est

$$4\cdot\frac{4z^2(z^2+b^2+c^2)-(x^2+z^2+b^2+c^2)^2}{\{(x^2+z^2+b^2+c^2)^2-4z^2x^2\}^2}$$

$$-16z^2\cdot\frac{(x^2+z^2+b^2+c^2)\{(x^2+z^2+b^2+c^2)^2-4z^2x^2\}-2\{(x^2+z^2+b^2+c^2)-2z^2\}\{4z^2(z^2+b^2+c^2)-(x^2+z^2+b^2+c^2)^2\}}{\{(x^2+z^2+b^2+c^2)^2-4z^2x^2\}^3};$$

En posant $x=0$, la seconde fraction s'évanouit, et la première devient

$$4\cdot\frac{4z^2-(z^2+b^2+c^2)}{(z^2+b^2+c^2)^3};$$

quantité négative ou positive, suivant que $2z$ sera moindre ou plus grand que $\sqrt{z^2+b^2+c^2}$; ainsi, la valeur $x=0$ répondra à un *maximum*, si la valeur

$$x=\sqrt{(2z-\sqrt{z^2+b^2+c^2})\sqrt{z^2+b^2+c^2}}$$

est *imaginaire*; et cette valeur $x=0$ répondra à un *minimum*, si au contraire l'autre valeur de x est *réelle*.

Si ensuite on pose

$$z=\sqrt{(2z-\sqrt{z^2+b^2+c^2})\sqrt{z^2+b^2+c^2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(x^2+z^2+b^2+c^2)^2=4z^2(z^2+b^2+c^2),$$

c'est au contraire la première fraction qui s'évanouit, tandis que la seconde devient

$$-\frac{1}{2z^3}\cdot\frac{2z-\sqrt{z^2+b^2+c^2}}{\{\sqrt{z^2+b^2+c^2}-z\}^2};$$

quantité *négative* ou *positive*, suivant que $2z$ sera plus grand ou plus petit que $\sqrt{z^2+b^2+c^2}$; et comme, dans le dernier de ces deux cas, la valeur de x devient imaginaire, il s'ensuit que, lorsque cette valeur

$$z=\sqrt{(2z-\sqrt{z^2+b^2+c^2})\sqrt{z^2+b^2+c^2}}$$

est possible, elle répond toujours à un *maximum*.

Voici donc quel sera l'état de l'un des longs côtés, suivant la situation des deux lumières. Si d'abord la distance de l'une de ces lumières à l'autre est moindre que la distance de cette même lumière au milieu du long côté, ou, ce qui revient au même, si les droites menées de ce milieu aux deux lumières forment entre elles un angle moindre que 60°, ce même milieu sera le point le plus éclairé du long côté, dont l'illumination diminuera ensuite de plus en plus à droite et à gauche, en allant vers ses extrémités.

Mais si, au contraire, l'angle formé par ces deux droites est plus grand que 60 degrés, le milieu du long côté présentera un *minimum* d'illumination ; ce *minimum* se trouvera situé entre deux *maxima* qui en seront distans de part et d'autre d'une quantité

$$x=\sqrt{(2z-\sqrt{z^2+b^2+c^2})\sqrt{z^2+b^2+c^2}}\ ;$$

et à droite et à gauche de ces *minima* la lumière ne cessera plus de décroître.

Dans le cas particulier où l'on aurait

$$2z=\sqrt{z^2+b^2+c^2}\ ,$$

c'est-à-dire, dans le cas où le triangle des deux lumières et du milieu du long côté serait équilatéral, le *maximum* et les deux *minima* se confondraient en ce milieu ; mais il est clair que, dans la question qui nous occupe, ce milieu doit alors être considéré comme recevant un *maximum* de lumière.

Si dans la formule (9) on fait

$$x=\sqrt{(2z-\sqrt{z^2+b^2+c^2})\sqrt{z^2+b^2+c^2}}\,,$$

quantité très-facile à construire, lorsque z est donné, elle deviendra

$$\frac{1}{2z(\sqrt{z^2+b^2+c^2}-z)}\,; \qquad (10)$$

telle est donc l'expression de la lumière reçue par le point le plus éclairé du long côté de la table.

Si l'on veut profiter de l'indétermination de z pour rendre cette quantité de lumière *maximum* ou *minimum*, il faudra recourir à sa différentielle prise par rapport à z, laquelle, en la divisant par dz, est

$$-\frac{1}{2z^2\sqrt{z^2+b^2+c^2}}\,;$$

et ne peut conséquemment devenir nulle. Ainsi, la fonction (10) n'est proprement susceptible ni de *maximum* ni de *minimum*.

Mais il est aisé de voir que, z étant indéterminé, plus on le prendra petit et plus aussi le point le plus éclairé du plus long bord de la table recevra de lumière : cette lumière étant d'ailleurs toujours comprise entre

$$\frac{1}{b^2+c^2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{b^2+c^2}\,;$$

et il en sera de même de son point du milieu.

Voyons enfin, si, à raison de l'indétermination de z, la quantité de lumière reçue par les angles, qui sont en général les points les moins éclairés, ne serait point susceptible de devenir un *maximum*. Cette quantité de lumière est

$$\frac{1}{(a-z)^2+b^2+c^2}+\frac{1}{(a+z)^2+b^2+c^2}=\frac{2(z^2+a^2+b^2+c^2)}{(z^2+a^2+b^2+c^2)^2-4a^2z^2};$$

Sa différentielle, prise par rapport à z et divisée par $\mathrm{d}z$ est

$$4z\,.\frac{4a^2(a^2+b^2+c^2)-(z^2+a^2+b^2+c^2)^2}{(z^2+a^2+b^2+c^2)^2-4a^2z^2}\,.$$

d'où l'on tire, en égalant à zéro,

$$z=0\;,\quad z=\sqrt{\left(2a-\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,.$$

L'analogie de ces résultats avec ceux que nous avons obtenus précédemment, nous autorise à poser sur-le-champs les maximes que voici :

Soit portée une des lumières au centre de la table ; si alors la distance de cette lumière à l'un quelconque des angles n'est pas moindre que la longueur de cette table, ce sera en cet endroit que les deux lumières devront être placées pour que les angles soient autant éclairés qu'ils peuvent l'être.

Mais si, comme il arrivera le plus souvent, la distance de cette lumière à l'un des angles est moindre que la longueur de la table ; alors, pour que les angles reçoivent le plus de lumière possible, les deux lumières devront être placées sur la droite qui joint les milieux des petits côtés, de part et d'autre du centre, de manière que les distances de leurs projections à ce centre soient

$$\sqrt{\left(2a-\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\;;$$

quantité très-facile à construire.

PROBLÈME II. Résoudre le même problème pour une table elliptique ; les deux lumières devant être placées de telle manière que

que leurs projections tombent sur le grand axe, à une même distance de part et d'autre du centre de la table.

Solution. Soient $2a$ le grand axe et $2b$ le petit axe de l'ellipse, en sorte que son équation soit

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2\ . \qquad (1)$$

Soit toujours c la hauteur commune des deux lumières au-dessus du plan de la table, et soit enfin z la distance de la projection de chacune d'elles au centre de cette table.

D'après cela, la lumière reçue par un point du périmètre de l'ellipse dont les coordonnées sont x, y, sera

$$\frac{1}{c^2+y^2+(x-z)^2}+\frac{1}{c^2+y^2+(x+z)^2}=\frac{2(x^2+y^2+z^2+c^2)}{(x^2+y^2+z^2+c^2)^2-4z^2x^2}\ . \qquad (2)$$

En y mettant pour y sa valeur tirée de l'équation (1) et posant, pour abréger, $a^2-b^2=e^2$, il vient

$$\frac{2a^2\{e^2x^2+a^2(z^2+b^2+c^2)\}}{\{e^2x^2+a^2(z^2+b^2+c^2)\}^2-4a^4z^2x^2}\ . \qquad (3)$$

Supposons z déterminé, et voyons quelle valeur il faudrait donner à x pour que le point que nous considérons fût plus ou moins éclairé que tous les autres. La différentielle de cette expression, prise par rapport à x est divisée par dx est

$$4a^2x\ .\frac{4a^6z^2(z^2+b^2+c^2)-e^2[e^2x^2+a^2(z^2+b^2+c^2)]^2}{\{[e^2x^2+a^2(z^2+b^2+c^2)]^2-4a^4z^2x^2}\ ;$$

en l'égalant à zéro, on a

$$x=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{a}{e^2}\sqrt{e(2az-e\sqrt{z^2+b^2+c^2})\sqrt{z^2+b^2+c^2}}\ .$$

On prouvera, comme ci-dessus, que la valeur $x=0$ est *minimum* ou *maximum* suivant que l'autre est *réelle* ou *imaginaire*, et que, dans tout le cas où cette dernière est *réelle*, elle répond à un *maximum*. En particulier, si l'on a

$$z=\frac{e}{2a}\sqrt{z^2+b^2+c^2}\,;$$

ou, ce qui revient au même,

$$z=e\sqrt{\frac{b^2+c^2}{4a^2-e^2}}\,;$$

le *maximum* et le *minimnm* se trouvent réunis en un même point qui n'est autre chose que l'extrémité du petit axe, et qui doit être considéré comme présentant un *maximum*.

Pour la première valeur $x=0$, l'expression (3) devient

$$\frac{2}{z^2+b^2+c^2}\,;$$

c'est donc là la lumière reçue par l'extrémité du petit axe ; si c'est un *minimum* qui y a lieu, il faudra, suivant les conditions du problème, rendre ce *minimum* le plus grand possible, ce à quoi on parviendra, en posant $z=0$, si c'est au contraire un *maximum*, il faudra le rendre le plus petit possible; en prenant z aussi grand qu'il se pourra, sans faire devenir ce point *minimum*.

Mettons dans la formule (3) la valeur

$$x=\frac{a}{e^2}\sqrt{e(2az-e\sqrt{z^2+b^2+c^2})\sqrt{z^2+b^2+c^2}}\,;$$

elle deviendra

$$\frac{e^2}{2az(e\sqrt{z^2+b^2+c^2}-az)}\,;$$

Si l'on veut profiter de l'indétermination de z pour rendre cette fonction la plus grande ou la moindre possible, il faudra passer à sa différentielle qui, divisée par dz, sera

$$\frac{e^2}{2a}\cdot\frac{2az\sqrt{z^2+b^2+c^2}-e(2z^2+b^2+c^2)}{z^2(e\sqrt{z^2+b^2+c^2}-az)^2\sqrt{z^2+b^2+c^2}}\,.$$

En égalant cette différentielle à zéro, chassant le radical, et remettant pour e^2 sa valeur a^2-b^2, on obtient l'équation

$$4b^2z^4+4b^2(b^2+c^2)z^2-(a^2-b^2)(b^2+c^2)^2=0\,,$$

d'où, en n'admettant que la racine réelle positive, on tirera

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(a-b)(b^2+c^2)}{b}}\,,$$

valeur que l'on trouvera résoudre complètement la question et qu'il sera facile de construire.

Remarques. I. On résoudrait, par des principes et des méthodes analogues, le cas où il s'agirait de quatre ou même d'un plus grand nombre de lumières à distribuer de la manière la plus convenable sur une table, soit rectangulaire soit elliptique; mais il paraît qu'alors les calculs se compliqueraient d'une manière notable.

II. Au lieu de demauder que l'éclairage du bord de la table soit aussi uniforme que possible, on peut demander que le point le moins éclairé de sa surface soit autant éclairé que faire se pourra.

III. On peut transporter ces sortes de recherches dans l'espace et en faire la base d'une théorie de l'éclairage des galeries ou appartemens rectangulaires ou elliptiques, surmontés d'un plafond, d'une voûte en berceau ou d'un dôme, et éclairés par des lustres ou plaques; ou même de jour, par des fenêtres ou vitrages supérieurs, dont il s'agirait alors de régler la distribution de la manière la plus avantageuse.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de probabilité.

Deux urnes contiennent l'une b boules blanches et n noires, et l'autre b' boules blanches et n'. On doit prendre à la fois et au hasard avec les deux mains dans les deux urnes un même nombre x de boules, et porter ensuite dans chacune d'elles les boules extraites de l'autre. Quel doit être ce nombre x, pour que la probabilité qu'alors les boules blanches et les boules noires seront uniformément réparties dans les deux urnes soit un *maximum* ?

Problème de Géométrie.

Décrire l'ellipse du moindre périmètre, entre toutes celles qui passent par les quatre mêmes points donnés ?

Théorèmes de Géométrie.

Tout quadrilatère, plan ou gauche, rectiligne ou sphérique, dans lequel la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés est circonscriptible au cercle.

FIN DU TOME CINQUIÈME.

TABLE

Des matières contenues dans le V.e volume des Annales.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

ARITHMÉTIQUE.

ASTRONOMIE.

COMBINAISONS.

CORRESPONDANCE.

DYNAMIQUE.

GEOMETRIE ANALITIQUE.

GEOMETRIE DES COURBES.

GEOMÉTRIE ÉLEMENTAIRE.

HYDROSTATIQUE.

MATHEMATIQUES APPLIQUÉES.

OPTIQUE.

PHILOSOPHIE MATHEMATIQUE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

CORRECTIONS ET ADDITIONS

Pour le tome cinquième des Annales.

PAGE 3, lignes 21 et 28 — μ; *lisez* : η.
Page 4, ligne 6 — μ; *lisez* : η.
Page 6, ligne 16 — $\frac{r}{q}$; *lisez* : $\frac{p}{q}$.
Page 8, ligne 2 — $\frac{\psi 5}{180}$; *lisez* : $\frac{\psi s}{180}$.
Page 12, ligne 16 — B; *lisez* : B'.
Pag. 14, ligne 7, — $\mathrm{Sin}.\theta'$; *lisez* : $\mathrm{Sin}.\theta$.
ligne 8, — $\mathrm{Sin}.\theta$, *lisez* : $\mathrm{Sin}.\theta'$.
Pages 18, 19, 20, 21 — *changez tous les* φ *en* χ.
Page 23, ligne 14 — o''; *lisez* : θ''.
Page 24, ligne 6, en remontant — 9,1430240; *lisez* : 0,1430240.
Page 31, ligne 4, en remontant — abc; *lisez* : $a'b'c'$.
Page 32, problème d'architecture — donnés; *lisez* : données.
Page 69, ligne 1 — de la relation; *lisez* : de relation.
(13); *lisez* : (15)
Page 99, ligne 8 — *Avant* on aura évidemment; *écrivez* :
en posant $\psi x=t$, $\psi y=u$.
Pag. 100, ligne 13 — la fonction composée; *ajoutez* : f....f.
Page 113, équation (60) première ligne — *après* $(\mathrm{L}f)^2$; *écrivez* : z.
Page 129, équations (104) 1.re ligne — $\frac{C}{1.2}(x-\theta)dy$; *lisez* : $\frac{C}{1.2}(x-\theta)(y-p)dy$.
2.e ligne — $A(x-\theta)$; *lisez* : $A(x-\theta)^2$.
3.e ligne $\frac{A}{2}(x-\theta)$; *lisez* : $\frac{A}{2}(x-\theta)^3$.
$B(x-\theta)$; *lisez* : $B(x-\theta)^3$.
Page 132, équation (112), dernier terme — *après* $\frac{(\varphi x-\varphi\theta)^3}{1.2.3}$; *mettez* : d^2,
Page 143, ligne 9, en remontant — *Archimede*; lisez : *Archimedes.*
Page 144, ligne 11 — Karoten; *lisez* : Karsten.
Kœstner; *lisez* : Kaestner.

Page 145, ligne 10 — implique; *lisez* : impliquent.

Page 148, ligne 4 — *après* théorie ; *mettez* (;).

après pratique ; *supprimez* (;).

Page 156, à la note, équation (1) — $(m-1)$; *lisez* : $(m+1)$.

Page 162, ligne 7, en remontant — *changez tous les* ξ *en* ζ.

ligne 2, en remontant — $z+\xi$; *lisez* : $z+\zeta$.

Page 168, ligne 8 — ce qu'on fait ; *lisez* : ce qu'on a fait.

ligne 20 — Hertinus ; *lisez* : Herlinus.

Page 184, ligne 4 — qui ne voit ; *lisez* : qui ne voit pas.

Page 187, ligne 4 — *supprimez* : au moins.

Page 208, ligne 12 — de l'analise ? *lisez* : de l'analise ? (*) ; *et mettez en note ce qui suit* :

(*) Cela a été exécuté par M. Legendre, dans la seconde édition de sa *théorie des nombres*, pag. 151, n.° 119.

J. D. G.

Page 247, après la ligne 13, *ajoutez cet alinéa.*

Cette série pourrait sembler en contradiction avec la série connue

$$\mathrm{Log.}n=\left(n-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(n^2-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{3}\left(n^3-\frac{1}{n^3}\right)-\ldots\ldots ;$$

mais, outre que, dans les applications aux nombres, elles donnent les mêmes résultats, leur coexistence se trouve justifiée par la légitimité des procédés qui conduisent à l'une et à l'autre. Elles admettent toutes deux un complément qui tend sans cesse à devenir le même, à mesure que l'on prend un plus grand nombre de termes.

Page 261, ligne 16 — algarithmiques ; *lisez* : algorithmiques.

Page 276, ligne 2, en remontant. — *avant* $5\mathrm{Cos.}^2\varphi$: *mettez* : —

*Supplément à l'*Errata *du tome IV.e*

Pages 151, 153, 155, au titre — ORDRE ; *lisez* : DEGRÉ.

Page 247, ligne 13 — $x'-x=2\chi$; *lisez* : $x'-x=2\psi$.