
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

**Géométrie. Recherche de la surface plane de moindre contour,
entre toutes celles de même étendue, et du corps de moindre
surface, entre tous ceux de même volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 338-343

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__338_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE.

*Recherche de la surface plane de moindre contour ,
entre toutes celles de même étendue , et du corps
de moindre surface , entre tous ceux de même vo-
lume ;*

Par un A B O N N É.

G E R G O N N E



DANS ce qui va suivre , j'admettrai , comme propositions faciles à établir , les deux lemmes suivans :

LEMME I. Entre tous les trapèzes qui ont les deux mêmes côtés parallèles et la même section perpendiculaire à ces côtés , celui dans lequel la somme des côtés non parallèles est un mi-

nimum, est le trapèze dans lequel la droite qui joint les milieux des côtés parallèles est perpendiculaire à la direction commune de ces côtés.

LEMME II. Entre tous les troncs de parallépipèdes qui ont les quatre mêmes arêtes latérales et la même section perpendiculaire à ces arêtes, celui dans lequel la somme des aires des faces non parallèles est un minimum, est le tronc de parallépipède dans lequel les milieux des arêtes latérales se trouvent situés dans un même plan perpendiculaire à la direction commune de ces arêtes. (*)

PROBLÈME I. Entre toutes les surfaces planes d'une même étendue donnée, quelle est celle qui a le moindre périmètre ?

Solution. Le caractère de la surface cherchée est qu'en conservant la même étendue, elle ne puisse changer de figure, sans augmenter de contour.

Concevons qu'on nous donne une surface plane comme étant celle de moindre contour, parmi toutes celles d'une étendue égale à la sienne.

Menons, dans cette surface, une corde quelconque C , et une perpendiculaire P sur le milieu de cette corde. Concevons ensuite une infinité d'autres cordes infiniment voisines les unes des autres, et toutes parallèles à C ; elles diviseront la surface donnée en éléments que l'on pourra considérer comme des trapèzes, dont les côtés non parallèles formeront, par leur réunion, le périmètre de la surface dont il s'agit.

Supposons que quelques-uns de ces trapèzes n'aient pas les milieux de leurs côtés parallèles sur la droite P , nous pourrions, dans l'un quelconque de ceux-ci, faire glisser les côtés parallèles perpendiculairement à P , jusqu'à ce qu'ils soient parvenus à cette situation; nous pourrions en faire ensuite de même pour les deux trapèzes élémentaires entre lesquels celui-là se trouve situé, et continuer ainsi, de proche en proche, jusqu'à ce que nous ayons amené toutes les cordes parallèles à C à avoir leur milieu sur P .

(*) Voyez, pour la démonstration de ces propositions, l'article des *Questions résolues*, qui suit immédiatement celui-ci. J. D. G.

Par cette transformation, nous n'aurons rien changé à l'étendue de la surface proposée, et nous aurons (*Lemme I*) diminué son contour; d'où nous devons conclure que ce contour n'était pas d'abord un *minimum*.

Le caractère de la surface de moindre contour est donc que toutes les cordes perpendiculaires à P aient leur milieu sur cette droite ou, en d'autres termes, que P en soit un diamètre principal; et, puisque la direction de P est arbitraire, il en faut conclure que tous les diamètres de la surface de moindre contour doivent être des diamètres principaux: propriété qui appartient exclusivement au cercle.

Corollaire I. Il résulte de là que, de toutes les surfaces planes de même contour, le cercle est celle qui a le plus d'étendue.

Soient en effet C un cercle et S une autre surface plane quelconque de même périmètre p . Concevons un cercle C' équivalent à S , et soit p' son périmètre. D'après ce qui précède, on aura $p' < p$, d'où on devra conclure $C' < C$; puis donc qu'on a $C' = S$, on aura aussi $S < C$.

Corollaire II. De toutes les surfaces planes de même étendue, terminées par une droite donnée a et par une ligne se terminant aux extrémités de cette droite, celle de moindre contour est le segment de cercle dont a est la corde.

Soient en effet S le segment et T une autre surface équivalente construite aussi sur a , et soient respectivement s et t les longueurs des deux lignes qui, avec a , terminent ces surfaces. Soit achevée la circonférence dont s fait partie; soient s' l'arc et S' le segment supplémentaires; on aura, par l'hypothèse $S + S = S' + T$; si donc on pouvait avoir $s > t$, on aurait aussi $s' + s > s' + t$, d'où il résulterait cette conséquence absurde que le cercle n'est point la surface du moindre contour, parmi toutes celles de même étendue.

Corollaire III. De toutes les surfaces planes de même contour, terminées par une droite donnée a , et par une ligne se terminant aux deux extrémités de cette droite, celle de plus grande étendue est le segment de cercle dont a est la corde.

Soient en effet S ce segment et T une autre surface construite également sur a , et ayant même périmètre p que S . Soit construit sur a un segment S' équivalent à T et dont le périmètre soit p' ; nous aurons (Coroll. II) $p' < p$, d'où nous conclurons $S' < S$; puis donc que nous avons $S' = T$, nous aurons aussi $T < S$.

PROBLÈME II. Entre tous les corps d'un même volume donné, quel est celui qui est terminé par la moindre surface ?

Solution. Le caractère du corps cherché est qu'en conservant le même volume, il ne puisse changer de figure sans augmenter de surface.

Concevons qu'on nous donne un corps comme étant celui de moindre surface, entre tous ceux d'un volume égal au sien.

Menons, dans l'intérieur de ce corps, une corde quelconque C , et, par le milieu de cette corde, conduisons un plan P qui lui soit perpendiculaire. Par l'intersection de C et P , faisons passer arbitrairement, dans le plan P , deux droites M , N perpendiculaires entre elles. Menons, dans le même plan, une infinité de parallèles à M et une infinité de parallèles à N , et enfin par les unes et les autres conduisons des plans perpendiculaires à P . Ces plans diviseront le corps proposé en une infinité d'éléments, lesquels pourront être considérés comme des troncs de parallélipèdes dont les faces non parallèles formeront, par leur réunion, la surface du corps dont il s'agit.

Supposons que quelques-uns de ces troncs de parallélipèdes n'aient pas les milieux de leurs arêtes latérales sur le plan P ; nous pourrions, dans l'un quelconque de ceux-ci, faire glisser les arêtes latérales, perpendiculairement au plan P , jusqu'à ce qu'elles soient parvenues à cette situation; nous pourrions ensuite en faire de même pour les huit troncs de parallélipèdes élémentaires entre lesquels celui-là se trouve situé, et continuer ainsi, de proche en proche, jusqu'à ce que nous ayons amené toutes les cordes parallèles à C à avoir leur milieu sur le plan P .

Par cette transformation, nous n'aurons rien changé au volume du corps proposé, et nous aurons (*Lemme II*) diminué sa surface; d'où nous devons conclure que cette surface n'était pas d'abord un *minimum*.

Le caractère du corps de moindre surface est donc que toutes les cordes perpendiculaires au plan P aient leur milieu sur ce plan ou, en d'autres termes, que le plan P soit un plan-diamètre principal; et, puisque la direction de P est arbitraire, il en faut conclure que tous les plans-diamètres du corps de moindre surface doivent être des plans principaux: propriété qui appartient exclusivement à la sphère.

Par un raisonnement tout à fait semblable à celui qui a été employé ci-dessus, on conclura facilement de ce résultat les trois corollaires suivans:

Corollaire I. Entre tous les corps de même surface, la sphère est celui qui a le plus grand volume.

Corollaire II. De tous les corps de même volume, terminés d'une part par un cercle donné et de l'autre par une surface se terminant à la circonférence de ce cercle, celui de moindre surface est le segment sphérique dont ce cercle est la base.

Corollaire III. De tous les corps de même surface, terminés d'une part par un cercle donné et de l'autre par une surface se terminant à la circonférence de ce cercle, celui du plus grand volume est le segment sphérique qui a ce même cercle pour base.

Remarque. J'ai cru d'autant plus utile de ramener la démonstration des propriétés de *minimum* dont jouissent le cercle et la sphère à des notions élémentaires que ces propriétés ne sont pas moins remarquables qu'elles sont importantes, et que les démonstrations qu'on en a données par la méthode des variations, outre qu'elles reposent sur des considérations trop élevées pour être à la portée du vulgaire des géomètres, ne me paraissent point assez développées pour ne laisser aucun nuage dans l'esprit.

Par exemple, Bossut, à la page 474 du second volume de son *Calcul intégral*, ramène le problème à l'intégration des équations

$$dz = p dx + q dy ,$$

$$P dy + Q dx = 0 ,$$

$$a \left\{ \left(\frac{dp}{dx} \right) + \left(\frac{dq}{dy} \right) \right\} = 1 ;$$

dans lesquelles on a

$$P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} ;$$

mais, au lieu d'intégrer ces équations, il se contente de faire voir qu'elles sont satisfaites par l'équation de la sphère, ce qui paraît prouver seulement que la sphère est un cas particulier de la surface plus générale qui résout le problème, et n'exclut pas conséquemment toute autre surface qui pourrait également, comme cas particulier, être déduite de celle-là.

L'élimination de P et Q donne l'équation du second ordre

$$(1+q^2)r - 2pqz + (1+p^2)t = C(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}$$

et c'est sous cette forme que la présente M. Lacroix à la page (717) de la première édition de son *Traité de calcul intégral*; mais M. Lacroix observe lui-même que cette équation n'est pas seulement satisfaite par l'équation d'une sphère, mais encore par celle d'un cylindre. Voilà donc une difficulté qui me paraîtrait digne d'occuper les analystes, et dont l'éclaircissement semblerait propre à jeter quelque lumière sur les applications de la méthode des variations; applications communément trop peu développées dans les traités relatifs à cette branche d'analyse.