ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRANÇAIS

Dynamique. Véritable solution du problème de la tractoire

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 305-310
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__305_0>

DYNAMIQUE.

Véritable solution du problème de la tractoire;

Par feu FRANÇAIS, professeur aux écoles d'artillerie. (*)

PROBLÈME. *Sur un plan horisontal, on a pratiqué une rainure rectiligne, dans laquelle un corps* P *est assujetti à se mouvoir uniformément. Ce corps est lié, par une verge inflexible et inextensible, avec le corps* M, *qui pose sur le plan, et qui est supposé avoir reçu une impulsion primitive quelconque, dans le sens de ce plan. On demande la nature de la courbe décrite par le corps* M, *et les autres circonstances du mouvement, en faisant d'ailleurs abstraction du frottement?*

Solution. Soit prise pour axe des x la droite que le corps P est assujetti à parcourir, et pour axe des y une perpendiculaire quelconque à cette droite.

Soient à l'époque t, x et y les coordonnées du point M, et x' l'abscisse du point P; le mouvement rectiligne de ce dernier point ne pourra être que l'effet d'une force accélératrice, dirigée suivant l'axe des x et troublée par la réaction de M sur P. Soit p cette force accélératrice.

L'équation générale du mouvement sera donc, en supposant t la variable indépendante,

(*) Cette solution a été communiquée au Rédacteur des *Annales* par M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie, frère de l'auteur.

$$M\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+M\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+P\left\{\frac{d^2x'}{dt^2}-p\right\}\delta x'=0\ ; \qquad (*)$$

ou simplement, à cause de $\frac{dx'}{dt}$ constant,

$$M\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+M\frac{d^2y}{dt^2}\delta y-Pp\delta x'=0. \qquad (1)$$

En désignant par a la longueur de la verge, la liaison des parties du système sera exprimée par l'équation unique

$$(x-x')^2+y^2=a^2\ , \qquad (2)$$

laquelle donnera

$$(x-x')(\delta x-\delta x')+y\delta y=0\ ;$$

d'où

$$\delta x'=\delta x+\frac{y}{x-x'}\delta y\ ; \qquad (3)$$

substituant donc cette valeur dans l'équation (1), elle deviendra

$$\left\{M\frac{d^2x}{dt^2}-Pp\right\}\delta x+\left\{M\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{Ppy}{x-x'}\right\}\delta y=0\ ; \qquad (4)$$

δx et δy devant alors être indépendans, on aura séparément

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=Pp\ , \qquad M\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{Ppy}{x-x'}\ , \qquad (5)$$

d'où, l'élimination de p, on conclura

$$yd^2x=(x-x')d^2y. \qquad (6)$$

Puisque dx' est constant, cherchons à obtenir une équation en x' et y. Pour cela, différentions deux fois consécutivement l'équation (2); il viendra ainsi

$$dx=dx'-\frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}\ ,$$

(*) Voyez la *Mécanique céleste*, tome 1.er, page 51.

$$d^2x = -\frac{yd^2y}{\sqrt{a^2-y^2}} - \frac{a^2dy^2}{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

or, l'équation (6) donne

$$d^2x = \frac{d^2y\sqrt{a^2-y^2}}{y};$$

égalant donc ces deux valeurs, il viendra, toutes réductions faites,

$$\frac{d^2y}{\sqrt{a^2-y^2}} + \frac{ydy^2}{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \qquad (7)$$

équation qui a pour intégrale

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} + Cdx' = 0. \qquad (8)$$

Cette dernière équation, intégrée de nouveau, donne

$$\text{Arc.}\left(\text{Cos.} = \frac{y}{a}\right) = Cx' + C';$$

ou bien, en remettant pour x' sa valeur donnée par l'équation (2)

$$\text{Arc.}\left(\text{Cos.} = \frac{y}{a}\right) = C(x - \sqrt{a^2-y^2}) - C'. \qquad (9)$$

Pour déterminer les constantes C et C', supposons d'abord que la vitesse constante de P soit b; de manière qu'on ait $\frac{dx'}{dt} = b$. En mettant cette valeur dans l'équation (8), elle deviendra

$$\frac{dy}{dt} + bC\sqrt{a^2-y^2} = 0. \qquad (10)$$

Supposons ensuite qu'à l'origine des temps le point P soit à l'origine des coordonnées, et que la verge a forme alors un angle α avec l'axe des x. Supposons de plus que la vitesse initiale de M parallèlement à l'axe des y soit c, en sorte que pour $t=0$ et $y = a\text{Sin.}\alpha$ on ait $\frac{dy}{dt} = c$; l'équation (10) deviendra ainsi

$$c+abC\text{Cos.}\alpha=0\ ,\quad \text{d'où}\quad C=-\frac{c}{ab\text{Cos.}\alpha}.$$

L'intégrale seconde (9), rapportée au même état initial, devient

$$\text{Arc.}(\text{Cos.}=\text{Sin.}\alpha)=C'\ ,\quad \text{d'où}\quad C'=\tfrac{1}{2}\varpi-\alpha.$$

On a ainsi

$$x=\sqrt{a^2-y^2}+\frac{ab\text{Cos.}\alpha}{c}\left\{\text{Arc.}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{a}\right)-\alpha\right\}. \qquad (11)$$

C'est l'équation demandée de la courbe décrite par les corps M. On voit que cette courbe est une cycloïde générale, rapportée à la droite parcourue par le centre du cercle générateur ; ce cercle a pour rayon la longueur a de la verge ; son centre est l'extrémité P de cette verge ; et le rapport des vitesses de translation du centre et de rotation des points de la circonférence autour de ce centre est celui de $b\text{Cos.}\alpha$ à c ; de manière que la cycloïde sera allongée ordinaire ou raccourcie, suivant qu'on aura $b\text{Cos.}\alpha>c$, $b\text{Cos.}\alpha=c$ ou $b\text{Cos.}\alpha<c$.

L'équation (11) contient, comme une des données, la vitesse initiale de M dans le sens des y ; on aurait pu y introduire sa vitesse dans le sens des x. Si, en effet, l'on met dans l'intégrale première (8) pour $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-y^2}}$, sa valeur $\frac{\mathrm{d}x'-\mathrm{d}x}{y}$, on aura

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}+Cy\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0.$$

Soit ensuite c' la vitesse initiale de M dans le sens de x, en sorte qu'on ait $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c'$, cette équation deviendra $b+abC\text{Sin.}\alpha-c'=0$, d'où

$$C=\frac{c'-b}{ab\text{Sin.}\alpha}\ ;$$

introduisant donc cette valeur dans l'équation de la courbe, elle deviendra

$$x=\sqrt{a^2-y^2}+\frac{ab\,\text{Sin.}\alpha}{c'-b}\left\{\text{Arc.}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{a}\right)-\alpha\right\}\,; \qquad (12)$$

de sorte qu'il y a entre les vitesses initiales c et c' la relation $c'\text{Cos.}\alpha+c\,\text{Sin.}\alpha=b\,\text{Cos.}\alpha$.

L'équation (11) est en défaut, lorsqu'on a $\alpha=\frac{1}{2}\varpi$; mais alors on emploie l'équation (12) qui devient

$$x=\sqrt{a^2-y^2}-\frac{ab}{c'-b}\,\text{Arc.}\left(\text{Cos.}=\frac{y}{a}\right).$$

De même, si $\alpha=0$, l'équation (12) est en défaut ; mais alors l'équation (11) devient

$$x=\sqrt{a^2-y^2}+\frac{ab}{c}\,\text{Arc.}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{a}\right).$$

Pour déterminer la vitesse de M, en un point quelconque de la courbe, nous avons les équations

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{ab\,\text{Cos.}\alpha-cy}{a\,\text{Cos.}\alpha}\;, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{c\sqrt{a^2-y^2}}{a\,\text{Cos.}\alpha}\;;$$

donc

$$v^2=\frac{ac^2-2bcy\,\text{Cos.}\alpha+ab^2\,\text{Cos.}^2\alpha}{a\,\text{Cos.}^2\alpha}.$$

Ainsi, suivant qu'on aura $y=a$ ou $y=-a$, on aura aussi

$$v=b-\frac{c}{\text{Cos.}\alpha}\;, \qquad \text{ou} \qquad v=b+\frac{c}{\text{Cos.}\alpha}.$$

Il est aisé de voir que ce sont là la plus petite et la plus grande vitesses du point M ; la première a lieu au point le plus haut et la seconde au point le plus bas de chaque cycloïde. donc, dans la cycloïde ordinaire, pour laquelle on a $c=b\,\text{Cos.}\alpha$, la vitesse du point M est nulle, chaque fois qu'il parvient à son *maximum* d'élévation, et elle est double de celle du point P, chaque fois qu'il parvient à son *maximum* d'abaissement. (*)

Le temps se trouve par la formule $\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\frac{cdt}{a\text{Cos.}\alpha}$, laquelle donne

$$\text{Arc.}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{a}\right)=\frac{ct}{a\text{Cos.}\alpha}+C'' \ ;$$

et, comme on a en même temps $y=a\text{Sin.}\alpha$ et $t=0$, il s'ensuit que $C''=\alpha$, ce qui donne

$$t=\frac{a\text{Cos.}\alpha}{c}\left\{\text{Arc.}\left(\text{Sin.}=\frac{y}{a}\right)-\alpha\right\}. \qquad (13)$$

Ainsi, lorsque $y=a$, on a

$$t=\frac{a\text{Cos.}\alpha}{c}\left\{\frac{2n+1}{2}\pi-\alpha\right\},$$

n étant un nombre entier positif quelconque ; d'où il suit que le temps employé à parcourir une cycloïde entière est $=\frac{\pi a\text{Cos}\,\alpha}{c}$.

La force accélératrice $p=\frac{M}{P}\,\frac{d^2x}{dt^2}$; mais

$$\frac{dx}{dt}=b-\frac{cy}{a\text{Cos.}\alpha}\,, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{cdy}{adt\text{Cos.}\alpha}\ ;$$

et, comme on a d'ailleurs

$$\frac{dy}{dt}=\frac{c\sqrt{a^2-y^2}}{a\text{Cos.}\alpha}\ ;$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$p=-\frac{M}{P}\cdot\frac{c^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^2\text{Cos.}^2\alpha}\,,$$

ce qui donne, pour la valeur initiale de p, $p=-\frac{M}{P}\cdot\frac{c^2}{a\text{Cos.}\alpha}$;

(*) Voyez la page 98 du deuxième volume de ce recueil.