
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BÉRARD

Deuxième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 259-264

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__259_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Deuxième solution ;

Par M. BÉRARD , principal et professeur de mathématiques
au collège de Briançon.

Ce problème n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général qui fait partie d'un petit traité sur les *anses de paniers* que

j'ai placé à la suite de ma *statique des voûtes* (page 149) (*). Je pourrais donc me contenter de renvoyer à cet ouvrage ; mais, en faveur de ceux qui ne l'ont pas, je vais entrer dans quelques détails sur ce sujet.

Une *anse de panier* est l'assemblage de plusieurs arcs de cercles de rayons différens, qui se touchent consécutivement : autrement, c'est une des développantes d'un polygone ou d'une portion de polygone convexe.

Soient

A , la demi-base de l'anse de panier ;

B , sa montée ;

n , le nombre des arcs ou centres de la demi-anse ;

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, les rayons successifs, de la naissance à la cliaie ;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, le nombre des degrés des arcs, en allant toujours de la naissance à la cliaie ;

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, les côtés consécutifs du polygone formé par la rencontre successive des rayons $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$;

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, les projections de ces côtés sur la demi-base A ;

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, les projections des mêmes côtés sur la montée B ;

D'après quoi on aura $a_1 = c_1 = r_1$, $b_1 = 0$.

Il est aisé de voir qu'alors on aura cette suite d'équations

$$\begin{aligned} A &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \\ r_1 - B &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n &= \frac{1}{2} \pi, \end{aligned}$$

$$a_1 = c_1,$$

$$b_1 = 0,$$

$$a_2 = c_2 \cos \alpha_1 ;$$

$$b_2 = c_2 \sin \alpha_1 ;$$

$$a_3 = c_3 \cos (\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$b_3 = c_3 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) ;$$

$$\dots \dots \dots ;$$

$$\dots \dots \dots ;$$

$$a_n = c_n \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) ; \quad b_n = c_n \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) ;$$

(*) In-4.^o de 160 pages ; chez Firmin Didot, Paris 1810.

$$\begin{aligned} r_1 &= c_1 \\ r_2 &= r_1 + c_2 \\ r_3 &= r_2 + c_3 \\ &\dots \\ r_n &= r_{n-1} + c_n. \end{aligned}$$

lesquelles seraient insuffisantes pour déterminer les inconnues du problème.

Mais, si l'on veut que les arcs soient égaux, et qu'on désigne l'un d'eux par $\alpha = \frac{\pi}{2n}$, et si l'on veut de plus que les rayons forment une progression géométrique dont le premier terme soit r et la raison λ , on aura en outre

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\pi}{2n}, & r_1 &= r, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{2\pi}{2n}, & r_2 &= \lambda r, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \frac{3\pi}{2n}, & r_3 &= \lambda^2 r, \\ &\dots, & &\dots, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n &= \frac{n\pi}{2n}, & r_n &= \lambda^{n-1} r; \end{aligned}$$

au moyen de quoi on aura d'abord

$$\begin{aligned} c_1 &= r, \\ c_2 &= (\lambda - 1)r, \\ c_3 &= \lambda(\lambda - 1)r, \\ &\dots \\ c_n &= \lambda^{n-1}(\lambda - 1)r; \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} a_1 &= r; & b_1 &= 0, \\ a_2 &= (\lambda - 1)r \cos. \frac{\pi}{2n}; & b_2 &= (\lambda - 1)r \sin. \frac{\pi}{2n}; \\ a_3 &= \lambda(\lambda - 1)r \cos. \frac{2\pi}{2n}, & b_3 &= \lambda(\lambda - 1)r \sin. \frac{2\pi}{2n}, \\ &\dots, & &\dots, \end{aligned}$$

$$a_n = \lambda^{n-1}(\lambda-1)r \operatorname{Cos.} \frac{(n-1)\pi}{2n} ; \quad b_n = \lambda^{n-2}(\lambda-1)r \operatorname{Cos.} \frac{(n-1)\pi}{2n} ;$$

d'où on conclura

$$A-r = r(\lambda-1) \left\{ \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{2n} + \lambda \operatorname{Cos.} \frac{2\pi}{2n} + \lambda^2 \operatorname{Cos.} \frac{3\pi}{2n} + \dots + \lambda^{n-2} \operatorname{Cos.} \frac{(n-1)\pi}{2n} \right\},$$

$$\lambda^{n-1}r-B = r(\lambda-1) \left\{ \operatorname{Sin.} \frac{\pi}{2n} + \lambda \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{2n} + \lambda^2 \operatorname{Sin.} \frac{3\pi}{2n} + \dots + \lambda^{n-2} \operatorname{Sin.} \frac{(n-1)\pi}{2n} \right\};$$

et telles sont les équations qui doivent déterminer les deux inconnues λ et r du problème.

Si l'on prend la somme de leurs produits respectifs par A et B , cette somme deviendra divisible par r , et en observant qu'en général $\operatorname{Sin.} \frac{(n-k)\pi}{2n} = \operatorname{Cos.} \frac{k\pi}{2n}$ on aura

$$\lambda^{n-1}A-B = (\lambda-1) \left\{ \begin{aligned} &A \left[\operatorname{Cos.} \frac{(n-1)\pi}{2n} + \lambda \operatorname{Cos.} \frac{(n-2)\pi}{2n} + \dots + \lambda^{n-2} \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{2n} \right] \\ &+ B \left[\operatorname{Cos.} \frac{\pi}{2n} + \lambda \operatorname{Cos.} \frac{2\pi}{2n} + \dots + \lambda^{n-2} \operatorname{Cos.} \frac{(n-1)\pi}{2n} \right] \end{aligned} \right\}$$

équation qui ne renferme plus que la seule inconnue λ .

Dans le cas de l'anse de panier à cinq centres, en posant, pour abrégé

$$A \operatorname{Cos.} \frac{1}{6}\pi + B \operatorname{Cos.} \frac{1}{3}\pi = M,$$

$$A \operatorname{Cos.} \frac{1}{3}\pi + B \operatorname{Cos.} \frac{1}{6}\pi = N,$$

$$\text{il viendra} \quad (A-M)\lambda^2 + (M-N)\lambda - (B-N) = 0,$$

$$\text{d'où} \quad \lambda = \frac{-(M-N) \pm \sqrt{(M-N)^2 + 4(A-M)(B-N)}}{A-M};$$

la première des deux équations en λ et r donnera ensuite

$$r = \frac{A}{1 + (\lambda-1) \left[\operatorname{Cos.} \frac{1}{6}\pi + \lambda \operatorname{Cos.} \frac{1}{3}\pi \right]}.$$

Si, par exemple on suppose $A=200$, $B=100$, on trouvera $\lambda=2,6$, $r_1=44$, $r_2=115$, $r_3=300$.

Remarques. L'auteur du problème proposé a eu raison de demander que les rayons forment une progression géométrique, parce qu'alors les changemens de courbure, d'un arc à l'autre, suivent le même rapport; mais il n'a pas été aussi bien fondé à exiger que les arcs soient semblables; en effet, dans ce cas, les longueurs des arcs

sont en progression géométrique, et ce système n'est pas celui qui présente le plus d'avantages ; il paraît plus convenable que tous les arcs soient de même longueur et que l'anse ait beaucoup de centres, à moins qu'on n'ait intérêt à augmenter l'espace renfermé par l'anse, ou le volume d'eau qu'elle doit laisser passer. On peut voir toutes ces questions dans l'ouvrage cité : on y trouve (pag. 153, prob. 6), l'équation d'une courbe dans laquelle les changements de courbure se font par des degrés égaux.

Par analogie, on peut demander l'équation d'une courbe telle que les rayons de courbure, infiniment proches et également inclinés entre eux, forment une progression géométrique.

Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, r le rayon vecteur de ce point et s la longueur de l'arc comptée depuis un certain point fixe ; on voit que l'angle formé par l'axe des x avec la normale est le logarithme du rayon de courbure ; c'est-à-dire, qu'on a

$$\text{Arc.} \left(\text{Tang.} = \frac{dx}{dy} \right) = c \text{Log.} r ,$$

c étant une constante. En différentiant, il vient

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{cdr}{r^2} .$$

Substituant pour r sa valeur $\frac{ds^3}{dy^2 \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$, il vient

$$ds = cdr , \text{ d'où } s + c' = cr ; \quad (1)$$

c' étant une nouvelle constante.

Pour intégrer de nouveau l'équation (1), j'y mets pour r sa valeur qui, en supposant ds constant, est $-\frac{dx ds}{d^2y}$, et j'ai

$$s + c' = -c \frac{dx ds}{d^2y} = -c \frac{ds \sqrt{ds^2 - dy^2}}{d^2y} ;$$

d'où, en faisant $dy = p ds$, il vient

$$-\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{cds}{s+c'},$$

dont l'intégrale est

$$\text{Arc.}(\text{Cos.}=p) = c \text{Log.}(s+c') + \text{Log.}c';$$

ou

$$p = \text{Cos} \{ \text{Log.}c''(s+c')^c \}. \quad (2)$$

Remettant dans (2) pour p sa valeur $\frac{dy}{ds}$, et intégrant de nouveau; il vient

$$y = c''' + f ds \text{Cos.} \{ \text{Log.}c''(s+c')^c \}. \quad (3)$$

Mettant enfin pour p cette même valeur dans $dx = ds\sqrt{1-p^2}$ et intégrant, on aura

$$x = c'''' + f ds \text{Sin.} \{ \text{Log.}c''(s+c')^c \}. \quad (4)$$

On déterminera les cinq constantes par les conditions suivantes : 1.° qu'à l'origine on a $p=1$ et $s=0$; 2.° qu'à au sommet de la courbe on a $p=0$, $x=b$, $y=a$; 3.° que, quand $x=A$, on doit avoir $y=B$; 4.° que, quand $s=0$, on doit avoir $x=0$; 5.° enfin que, quand $s=0$, on doit avoir $y=0$.

La courbe donnée par les équations (3) et (4) est celle dans laquelle (suivant le langage de M. Français) les rayons de courbure sont en progression de grandeur et de position. (*)

(*) La recherche de cette courbe se rattache bien simplement à la théorie développée à la page 42 de ce volume. On a ici $a^\theta = R$, a étant une constante; d'où $dR = ARd\theta$, A étant une nouvelle constante. D'un autre côté on a (pag. 49) $dR = R'd\theta$; donc $R' = AR$, et par suite (pag. 51)

$$\frac{3pq^2 - r(1+p^2)}{q^2} = A.$$

En traitant cette équation comme son analogue de la page 53, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax+y}{Ax-y},$$

ce qui donne, en intégrant, et posant, pour abrégér,

$$\sqrt{(A-1)^2 - 4A^2} = C,$$

$$Bx \left\{ \frac{y}{x} - \frac{A-1-C}{2} \right\}^{\frac{A+1+C}{2C}} = \left\{ \frac{y}{x} - \frac{A-1+C}{2} \right\}^{\frac{A+1-C}{2C}}.$$

J. D. G.