BÉRARD

Questions résolues. Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 92 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 253-259
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__253_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 92 de ce volume ;

Par MM. Bérard, principal et professeur de mathématiques au collége de Briançon, et Gobert, élève du lycée d'Angers.

THÉORÈME. *Les rectangles qui ont respectivement pour diagonales deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole, et dont les côtés sont parallèles aux deux axes de la courbe, sont équivalens.* (**)

Démonstrations. Les démonstrations données par MM. Bérard et Gobert reviennent, en substance, à ce qui suit.

Soient $2a$ et $2b$ les deux axes de la courbe. Si x' et y' sont

(**) L'énoncé de ce théorème a été indiqué par M. Bérard.

J. D. G.

les deux coordonnées, par rapport à ces axes, de l'une des extrémités d'un diamètre, ce diamètre fera avec l'axe $2a$ un angle dont la tangente tabulaire sera $\frac{y'}{x'}$; désignant donc par x'', y'' les coordonnées de l'une des extrémités du conjugué de ce diamètre, ce qui donnera $\frac{y''}{x''}$ pour la tangente tabulaire de l'angle que formera sa direction avec le même axe, on aura les trois équations

$$b^2x'^2 \pm a^2y'^2 = a^2b^2\ , \qquad (1)$$

$$b^2x''^2 \pm a^2y''^2 = a^2b^2\ , \qquad (2)$$

$$b^2x'x'' \pm a^2y'y'' = 0\ ; \quad (*) \qquad (3)$$

les signes supérieurs répondant à l'ellipse, et les inférieurs à l'hyperbole.

Si, entre ces trois équations, on élimine a^2 et b^2, comme deux inconnues au premier degré, l'équation résultante pourra être mise sous cette forme

$$\left(\frac{y'}{x'} - \frac{y''}{x''}\right)(x'y' + x''y'') = 0\ .$$

Or, il est aisé de voir que, ni pour l'ellipse ni pour l'hyperbole, le premier des deux facteurs du premier membre de cette équation ne saurait être nul; d'où il résulte qu'on doit avoir, pour l'une et pour l'autre courbes,

---

(*) La tangente à l'extrémité du premier des deux diamètres ayant pour équation

$$y - y' = \mp \frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')\ ,$$

et l'équation du second diamètre étant $y = \frac{y''}{x''}x$, pour que ces diamètres soient conjugués l'un à l'autre, il faut que les deux droites soient parallèles; ce qui donne, en effet,

$$\mp \frac{b^2x'}{a^2y'} = \frac{y''}{x''}\ , \qquad \text{ou} \qquad b^2x'x'' \pm a^2y'y'' = 0.$$

J. D. G.

$$x'y'+x''y''=0 \ , \quad (4) \quad \text{ou} \quad 2x''.2y''=-2x'.2y' \ ;$$

ce qui fait voir que les deux rectangles dont il s'agit ne diffèrent que par le signe et sont conséquemment équivalens.

M. Berard a remarqué qu'en transposant, dans les équations (3) et (4), et en les multipliant et les divisant ensuite l'une par l'autre, on en conclut les deux suivantes

$$\pm a^2y'^2=b^2x''^2 \ , \quad (5) \qquad \pm a^2y''^2=b^2x'^2 \ ; \quad (6)$$

équations en vertu desquelles les équations (1) et (2) deviennent

$$x'^2+x''^2=a^2 \ , \quad (7) \qquad y'^2+y''^2=\pm b^2 \ . \quad (8)$$

Or, en ajoutant ensemble les équations (7) et (8), il vient

$$(x'^2+y'^2)+(x''^2+y''^2)=a^2\pm b^2 \ ;$$

équation qui exprime la relation connue entre les longueurs des axes d'une ellipse ou d'une hyperbole et celles de deux diamètres conjugués.

Si, ensuite, du produit des deux mêmes équations (7) et (8), on retranche le quarré de l'équation (4) on aura

$$(xy'-x'y)^2=\pm a^2b^2 \ ;$$

autre équation qui exprime la propriété connue des parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués. (*)

Remarquant aussi que les équations (1), (2), (3), desquelles résulte l'équation (4), ont lieu également lorsque $2a$ et $2b$, au lieu d'être les deux axes de la courbe, sont deux diamètres conjugués auxquels on la rapporte ; M. Bérard en conclut cet autre théorème, plus général que le premier :

THÉORÈME. Les parallélogrammes qui ont respectivement pour diagonales deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hy-

---

(*) C'est là, bien certainement, le moyen le plus simple d'arriver à ces deux relations auxquelles la plupart des auteurs d'élémens ne parviennent qu'à travers des calculs assez compliqués.

J. D. G.

perbole, et dont les côtés sont parallèles à deux autres diamètres conjugués, sont équivalens.

Nous observerons, à notre tour, que la vérité de ce théorème s'aperçoit sur-le-champ, pour l'ellipse, en considérant sa projection circulaire, dans laquelle les projections des deux parallelogrammes, dont les aires sont proportionnelles à celles de ces deux figures elles-mêmes, sont des rectangles, non seulement équivalens, mais même superposables. Et, comme on passe de l'ellipse à l'hyperbole en changeant respectivement y' et y'' en $y'\sqrt{-1}$ et $y''\sqrt{-1}$, ce qui ne change rien au theorème, il s'ensuit qu'il a également lieu pour cette dernière courbe.

Solutions du problème d'architecture proposé à la page 92 de ce volume.

ENONCÉ. *La base et la montée d'une* anse de panier, *dont le nombre des centres est* $2n+1$, *étant données; construire la* demi-anse, *dont par conséquent le nombre des centres sera* $n+1$, *avec la condition que tous les arcs de cette* demi-anse *soient semblables, et que leurs rayons forment une progression géométrique?*

Faire une application de la solution générale au cas particulier où $n=2$, *et où, par conséquent, chacun des arcs de la* demi-anse *serait de* 30.° ?

Première solution;

Par M. ARGAND.

Soient M la montée Ue de l'*anse de panier* (fig. 3), B la demi-base eP, n le nombre des centres, x le premier rayon AP, z le quotient $\frac{BQ}{AP}=\frac{CR}{BQ}=\ldots\ldots=\frac{EU}{DT}$, α l'angle PAQ=QBR= ..... =TEU $=\frac{\pi}{2n}$. On aura d'abord les équations

$$\begin{array}{lll}
AP=AQ=x\ , & AB=x\,(z-1)\ , & bC=bB+BC\ , \\
BQ=BR=xz\ , & BC=xz(z-1)\ , & cD=cC+CD\ , \\
\ldots\ldots\ldots\ , & \ldots\ldots\ldots\ , & \ldots\ldots\ldots\ , \\
ET=EU=xz^{n-1}\,; & DE=xz^{n-2}(z-1); & dE=dD+DE\ .
\end{array}$$

Tous les angles des triangles ABb, bCc, ... dEe sont connus; ainsi, en partant du côté AB, on déterminera successivement les côtés Ab, bc, ..., de, et cE, au moyen des équations précédentes et de la proportionnalité entre les sinus et les côtés.

On aura ensuite

$$M=xz^{n-1}-eE\ , \qquad B=x+Ab+bc+\ldots\ldots+de.$$

En faisant, pour abréger,

$$\begin{array}{c}
\text{Sin}.n\alpha-\text{Sin}.(n-1)\alpha=P_n\ , \\
\text{Sin}.(n-1)\alpha-\text{Sin}.(n-2)\alpha=P_{n-1}\ ; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\
\text{Sin}.\alpha-\text{Sin}.0=P_1\ ,
\end{array}$$

on trouvera, réductions faites,

$$\left.\begin{array}{l}
M=x(P_nz^{n-1}+P_{n-1}z^{n-2}+\ldots\ldots+P_2z+P_1)\ , \\
B=x(P_1z^{n-1}+P_2\ \ z^{n-2}+\ldots\ldots+P_{n-1}z+P_n)\ .
\end{array}\right\}\quad(1)$$

En éliminant x, entre ces deux équations, on a, pour la détermination de z, l'équation du $(n-1)^{me}$ degré

$$(BP_n-MP_1)z^{n-1}+(BP_{n-1}-MP_2)z^{n-2}+\ldots\ldots$$
$$+(BP_2-MP^{n-1})z+(BP_1-MP_n)=0.$$

Les équations (1) peuvent se mettre sous la forme définie

$$M=\frac{2x[z^n(z+1)\text{Sin.}\frac{1}{2}\alpha-(z-1)\text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha]\text{Sin.}\frac{1}{2}\alpha}{z^2-2z\text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha+1}\ ,$$

$$N=\frac{2x[z^n(z-1)\text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha+(z+1)\text{Sin.}\frac{1}{2}\alpha]\text{Sin.}\frac{1}{2}\alpha}{z^2-2z\text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha+1}\ .$$

Lorsque n est un grand nombre, ces dernières formules sont plus commodes que les précédentes, pour appliquer la règle de fausse position à la détermination des inconnues.

Pour le cas de $n=3$, en posant, pour abréger

$$B+M=S\ ,\quad B-M=D\ ,$$

on trouve d'abord

$$z=\frac{D\pm\sqrt{S^2-2D^2}}{S-D\sqrt{3}}\ ,$$

et ensuite

$$x=\frac{2M}{(2-\sqrt{3})z^2+(\sqrt{3}-1)z+1}\ :$$

Soient, par exemple, $B=3$, $M=2$; d'où $S=5$, $D=1$; il viendra

$$z=\frac{1\pm\sqrt{23}}{5-\sqrt{3}}\ .$$

L'adoption des signes supérieur et inférieur donne respectivement

$$z=+1,78\ ,\quad z=-1,16\ ,$$

d'où on conclut

$$x=+1,27\ ;\quad x=+7,81\ ;$$

on trouve ensuite, pour les autres rayons

$$xz\ =+2,26\ ,\quad xz\ =-\ 9,08\ ,$$

$$xz^2=+4,01\ ;\quad xz^2=+10,55\ ;$$

le tout, en se bornant aux centièmes. Le signe négatif qui affecte le deuxième rayon dans le second cas, indique que ce rayon doit être pris en sens inverse des deux autres. Les figures 4 et 5 indiquent de quelle manière les arcs s'assemblent dans les deux cas.

Soient encore

$$B=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,,\quad M=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,.$$

Il vient

$$z=\frac{1\pm1}{\sqrt{3}-\sqrt{3}}\,.$$

En prenant les signes supérieurs, z devient infini. Alors x et xz sont nuls; mais $xz^2=\frac{2Mz^2}{(2-\sqrt{3})z^2+(\sqrt{3}-1)z+1}=\frac{2M}{2-\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$. La demi-anse se réduit donc ainsi au troisième arc ; le premier et le second se confondant alors avec l'origine du troisième.

Le signe inférieur donne à z une valeur indéterminée $\frac{0}{0}$; mais on trouve par les règles connues que cette valeur est $z=-\sqrt{3}$; d'où resulte une construction analogue à celle de la figure 5.

Si l'on supposait, au contraire,

$$B=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,,\quad M=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,;$$

on trouverait pareillement que la demi-anse doit se réduire à un seul arc, lequel devrait alors être le premier, avec l'extrémité duquel se confondraient le second et le troisième, ainsi que cela doit être d'ailleurs; car il est évident que les suppositions $B=g$, $M=h$ et $B=h$, $M=g$ conduisent à deux constructions qui ne diffèrent que par la situation de la courbe.