
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

**Astronomie. Recherche des élémens d'une ellipse, dont
le foyer et trois points sont connus**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 197-201

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__197_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1813-1814, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ASTRONOMIE.

Recherche des élémens d'une ellipse, dont le foyer et trois points sont connus ;

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.



SOIENT F le foyer et P, Q, R trois points donnés sur le périmètre d'une ellipse, et soit EF une droite fixe, dirigée d'une manière quelconque, dans le plan de ces quatre points. Il s'agit de déterminer les élémens de la courbe.

Les données du problème sont au nombre de six ; savoir : les trois angles EFP, EFQ, EFR, et les trois rayons vecteurs FP, FQ, FR. Soient donc

$$\begin{aligned} P &= \text{Ang. EFP}, & p &= \text{ray. vec. FP}, \\ Q &= \text{Ang. EFQ}, & q &= \text{ray. vec. FQ}, \\ R &= \text{Ang. EFR}; & r &= \text{ray. vec. FR}. \end{aligned}$$

Les inconnues du problème sont au nombre de trois ; savoir : l'angle EFA que fait la direction FA du grand axe de l'ellipse avec la droite fixe EF, le demi-grand axe de l'orbite et son excentricité. Soient donc

$$\varphi = \text{Ang. EFA},$$

$$a = \text{le demi-grand axe},$$

$\text{Sin. } \lambda = \text{l'excentricité, divisée par le demi-grand axe.}$

En supposant que le point A est l'aphélie, on aura.

Tom. IV, n.º VII, 1.ºr janvier 1814.

É L É M É N S

$$AF = a(1 + \text{Sin.}\lambda)$$

$$\text{Ang. AFP} = P - \varphi ,$$

$$\text{Ang. AFQ} = Q - \varphi ,$$

$$\text{Ang. AFR} = R - \varphi .$$

Et, par les propriétés connues de l'ellipse, on trouvera

$$p = \frac{a \text{Cos.}^2 \lambda}{1 - \text{Sin.}\lambda \text{Cos.}(P - \varphi)} ,$$

$$q = \frac{a \text{Cos.}^2 \lambda}{1 - \text{Sin.}\lambda \text{Cos.}(Q - \varphi)} ,$$

$$r = \frac{a \text{Cos.}^2 \lambda}{1 - \text{Sin.}\lambda \text{Cos.}(R - \varphi)} .$$

Divisant successivement la première de ces deux équations par les deux autres, il vient

$$\frac{p}{q} = \frac{1 - \text{Sin.}\lambda \text{Cos.}(Q - \varphi)}{1 - \text{Sin.}\lambda \text{Cos.}(P - \varphi)} ,$$

$$\frac{p}{r} = \frac{1 - \text{Sin.}\lambda \text{Cos.}(R - \varphi)}{1 - \text{Sin.}\lambda \text{Cos.}(P - \varphi)} .$$

Il en résulte les deux équations qui suivent

$$p - q = \{p \text{Cos.}(P - \varphi) - q \text{Cos.}(Q - \varphi)\} \text{Sin.}\lambda ,$$

$$p - r = \{p \text{Cos.}(P - \varphi) - r \text{Cos.}(R - \varphi)\} \text{Sin.}\lambda .$$

En égalant entre elles les valeurs de $\text{Sin.}\lambda$ tirées de ces deux équations, il vient

$$\text{Sin.}\lambda = \frac{p - q}{p \text{Cos.}(P - \varphi) - q \text{Cos.}(Q - \varphi)} = \frac{p - r}{p \text{Cos.}(P - \varphi) - r \text{Cos.}(R - \varphi)} ,$$

et par conséquent

$$(p - q) \{p \text{Cos.}(P - \varphi) - r \text{Cos.}(R - \varphi)\} = (p - r) \{p \text{Cos.}(P - \varphi) - q \text{Cos.}(Q - \varphi)\}$$

en développant $\text{Cos.}(P - \varphi)$, $\text{Cos.}(Q - \varphi)$, $\text{Cos.}(R - \varphi)$, et divisant ensuite par $\text{Cos.}\varphi$, on tire de cette équation

$$\text{Tang.}\varphi = - \frac{p(r - q) \text{Cos.}P + q(p - r) \text{Cos.}Q + r(q - p) \text{Cos.}R}{p(r - q) \text{Sin.}P + q(p - r) \text{Sin.}Q + r(q - p) \text{Sin.}R} .$$

On déduit de là , après les réductions

$$\begin{aligned} \text{Tang.}(P-\phi) &= \frac{p(r-q)+q(p-r)\text{Cos.}(Q-P)+r(q-p)\text{Cos.}(R-P)}{q(p-r)\text{Sin.}(Q-P)+r(q-p)\text{Sin.}(R-P)} , \\ \text{Tang.}(Q-\phi) &= \frac{p(r-q)\text{Cos.}(P-Q)+q(p-r)+r(q-p)\text{Cos.}(R-Q)}{p(r-q)\text{Sin.}(P-Q)+r(q-p)\text{Sin.}(R-Q)} , \\ \text{Tang.}(R-\phi) &= \frac{p(r-q)\text{Cos.}(P-R)+q(p-r)\text{Cos.}(Q-R)+r(q-p)}{p(r-q)\text{Sin.}(P-R)+q(p-r)\text{Sin.}(Q-R)} . \end{aligned}$$

La nature du problème exige que des tangentes on passe aux cosinus. On y parvient moyennant une certaine fonction , qu'en attendant nous représenterons par F^2 , et dont la valeur , que nous nous réservons de simplifier plus loin , peut être exprimée ainsi qu'il suit :

$$F^2 = \begin{cases} (r-q)^2 p^2 + 2rq(p-r)(q-p)\text{Cos.}(R-Q) \\ + (p-q)^2 r^2 + 2pr(q-p)(r-q)\text{Cos.}(P-R) \\ + (q-p)^2 r^2 + 2qp(r-q)(p-r)\text{Cos.}(Q-P). \end{cases}$$

On trouve alors

$$\text{Sin.}\lambda = \frac{F}{pq\text{Sin.}(Q-P)+qr\text{Sin.}(R-Q)+rp\text{Sin.}(P-R)} ;$$

et ensuite

$$\begin{aligned} F\text{Cos.}(P-\phi) &= q(p-r)\text{Sin.}(Q-P)+r(q-p)\text{Sin.}(R-P) , \\ F\text{Cos.}(Q-\phi) &= r(q-p)\text{Sin.}(R-Q)+p(r-q)\text{Sin.}(P-Q) , \\ F\text{Cos.}(R-\phi) &= p(r-q)\text{Sin.}(P-R)+q(p-r)\text{Sin.}(Q-R) ; \end{aligned}$$

d'où encore

$$\begin{aligned} \text{Sin.}\lambda\text{Cos.}(P-\phi) &= \frac{q(p-r)\text{Sin.}(Q-P)+r(q-p)\text{Sin.}(R-P)}{pq\text{Sin.}(Q-P)+qr\text{Sin.}(R-Q)+rp\text{Sin.}(P-R)} , \\ \text{Sin.}\lambda\text{Cos.}(Q-\phi) &= \frac{r(q-p)\text{Sin.}(R-Q)+p(r-q)\text{Sin.}(P-Q)}{pq\text{Sin.}(Q-P)+qr\text{Sin.}(R-Q)+rp\text{Sin.}(P-R)} , \\ \text{Sin.}\lambda\text{Cos.}(R-\phi) &= \frac{p(r-q)\text{Sin.}(P-R)+q(p-r)\text{Sin.}(Q-R)}{pq\text{Sin.}(Q-P)+qr\text{Sin.}(R-Q)+rp\text{Sin.}(P-R)} . \end{aligned}$$

De là résulte l'égalité suivante

$$\frac{1 - \text{Sin.} \lambda \text{Cos.}(P - \phi)}{qr} = \frac{1 - \text{Sin.} \lambda \text{Cos.}(Q - \phi)}{rp} = \frac{1 - \text{Sin.} \lambda \text{Cos.}(R - \phi)}{pq} ;$$

attendu que ces trois expressions se réduisent également à

$$\frac{\text{Sin.}(Q - P) + \text{Sin.}(R - Q) + \text{Sin.}(P - R)}{pq \text{Sin.}(Q - P) + qr \text{Sin.}(R - Q) + rp \text{Sin.}(P - R)} .$$

Il ne reste plus à déterminer que le demi-grand axe de l'orbite.

On a

$$a = \frac{pqr}{\text{Cos.}^2 \lambda} \cdot \frac{\text{Sin.}(Q - P) + \text{Sin.}(R - Q) + \text{Sin.}(P - R)}{pq \text{Sin.}(Q - P) + qr \text{Sin.}(R - Q) + rp \text{Sin.}(P - R)} . \quad (*)$$

En remarquant que

$$\text{Cos.}(R - Q) = 1 - 2 \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} (R - Q) ;$$

$$\text{Cos.}(P - R) = 1 - 2 \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} (P - R) ,$$

$$\text{Cos.}(Q - P) = 1 - 2 \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} (Q - P) ;$$

l'expression de F^2 donnée ci-dessus peut être réduite à cette forme plus simple

$$\begin{aligned} F^2 = & 4qr(p - q)(p - r) \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} (R - Q) \\ & + 4rp(q - r)(q - p) \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} (P - R) \\ & + 4pq(r - p)(r - q) \text{Sin.}^2 \frac{1}{2} (Q - P). \end{aligned}$$

(*) Il convient de remarquer que le numérateur $\text{Sin.}(Q - P) + \text{Sin.}(R - Q) + \text{Sin.}(P - R)$ peut être réduit à la forme suivante, plus commode pour le calcul par logarithmes,

$$-4 \text{Sin.} \frac{1}{2} (Q - P) \text{Sin.} \frac{1}{2} (R - Q) \text{Sin.} \frac{1}{2} (P - R).$$

On peut remarquer aussi que le dénominateur $pq \text{Sin.}(Q - P) + qr \text{Sin.}(R - Q) + rp \text{Sin.}(P - R)$ n'est autre chose que le double de l'aire du triangle qui a ses sommets aux trois points donnés.

J. D. G.

on pourra aussi écrire

$$\text{Tang. } \phi = \frac{p(r-q)\text{Sin.}^2 \frac{1}{2} P + q(p-r)\text{Sin.}^2 \frac{1}{2} Q + r(q-p)\text{Sin.}^2 \frac{1}{2} R}{p(r-q)\text{Sin.} \frac{1}{2} P \text{Cos.} \frac{1}{2} P + q(p-r)\text{Sin.} \frac{1}{2} Q \text{Cos.} \frac{1}{2} Q + r(q-p)\text{Sin.} \frac{1}{2} R \text{Cos.} \frac{1}{2} R} \quad (*)$$

(*) Si, dans l'application à un cas particulier, on trouve $\text{Sin.} \lambda = 1$ ou, ce qui revient au même

$$F = pq \text{Sin.}(Q - P) + qr \text{Sin.}(R - Q) + rp \text{Sin.}(P - R),$$

on en conclura que la courbe est une parabole. Il serait aisé de faire voir que cette équation de relation revient à celle qui a été donnée à la page 157 de ce volume. On pourrait en faire usage, pour simplifier, dans ce cas, la valeur de $\text{Tang. } \phi$.

J. D. G.