ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LE GRAND
ROCHAT

Questions résolues. Solutions du problème d'arithmétique proposé à la page 356 du deuxième volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 98-103
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__98_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du problème d'arithmétique proposé à la page 356 *du deuxième volume des* Annales ;

Par MM. Le Grand et Rochat, professeurs de mathématiques à St-Brieux, et Dubain, élève du lycée d'Angers.

Enoncé. *Deux suites, composées chacune de* n *nombres positifs et inégaux, étant données ; comment faut-il disposer entre eux les nombres de ces deux suites, pour que la somme des produits des termes de la première par les termes correspondans de la seconde, soit la plus grande ou la plus petite possible ?*

Comment faut-il disposer entre eux les nombres de ces deux suites, pour que la somme des quotiens des termes de la première par leurs correspondans dans la seconde, soit la plus grande ou la plus petite possible ?

Les solutions de ce problème, fournies par MM. Le Grand, Rochat et Dubain, étant les mêmes, quant au fond, et ne présentant que quelques légères différences de rédaction, il va en être rendu compte dans un même article.

Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_g, \ldots . A_h, \ldots . A_n$ les nombres de la première suite, rangés par ordre de grandeur, du plus grand au plus petit; et supposons que ceux de la seconde, rangés comme ils doivent l'être, pour donner lieu au $\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}$, soient $B_1, B_2, B_3, \ldots . B_g, \ldots . B_h, \ldots . B_n$.

I.er CAS. Pour la somme des produits.

Puisque

$$A_1B_1+A_2B_2+\ldots .+A_gB_g+\ldots .+A_hB_h+\ldots .+A_nB_n=P,$$

est un $\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}$, il faut que, les nombres de la première suite conservant toujours le même ordre, la permutation entre eux de deux quelconques des termes de la seconde suite donne un résultat $\left\{\begin{matrix}\text{moindre}\\ \text{plus grand}\end{matrix}\right\}$ que le précédent; c'est-à-dire, qu'en écrivant

$$A_1B_1+A_2B_2+\ldots .+A_gB_h+\ldots .+A_hB_g+\ldots .A_nB_n=Q,$$

on doit avoir

$$Q \lessgtr P$$

ou, en substituant, et supprimant, de part et d'autre, les termes communs,

$$A_gB_h+A_hB_g \lessgtr A_gB_g+A_hB_h,$$

ou, en transposant et décomposant,

$$(A_g-A_h)(B_h-B_g)\lessgtr 0\,,$$

ou, parce que, par l'hypothèse, A_g-A_h est positif,

$$B_h-B_g\lessgtr 0 \quad \text{ou} \quad B_h\lessgtr B_g\,.$$

Ainsi les termes de la première suite allant en décroissant, du premier au dernier, il faut pour le $\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}$ que les termes de la seconde aillent en $\left\{\begin{matrix}\text{décroissant}\\ \text{croissant}\end{matrix}\right\}$, du premier au dernier.

II.me CAS. Pour la somme des quotiens.

Tout étant d'ailleurs comme dans le cas précédent, soit posé

$$\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}+\ldots\ldots+\frac{A_g}{B_g}+\ldots\ldots+\frac{A_h}{B_h}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{B_n}=P'\,,$$

puisque cette quantité est supposée un $\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}$, si l'on pose

$$\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}+\ldots\ldots+\frac{A_g}{B_h}+\ldots\ldots+\frac{A_h}{B_g}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{B_n}=Q'\,,$$

on devra avoir

$$Q'\lessgtr P'\,,$$

ce qui donnera, en substituant et supprimant, de part et d'autre, les termes communs,

$$\frac{A_g}{B_h}+\frac{A_h}{B_g}\lessgtr\frac{A_g}{B_g}+\frac{A}{B_h}\,,$$

ou

A_g

$$A_gB_g+A_hB_h \lesseqgtr A_gB_h+A_hB_g \;,$$

ou, en transposant et décomposant

$$(A_g-A_h)(B_g-B_h) \lesseqgtr 0 \;;$$

ou, parce que A_g-A_h est supposé positif,

$$B_g-B_h \lesseqgtr 0 \quad \text{ou} \quad B_g \lesseqgtr B_h \;.$$

Ainsi, les termes de la première suite allant en décroissant, du premier au dernier, il faut pour le $\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}$ que ceux de la seconde aillent en $\left\{\begin{matrix}\text{croissant}\\ \text{décroissant}\end{matrix}\right\}$, du premier au dernier.

Ce qui précède renferme la solution complette du problème proposé; mais M. Le Grand s'est, en outre, occupé du problème indiqué dans la note, et qui consiste à savoir, dans le cas où l'on donnerait simplement les $2n$ nombres qui doivent composer les deux suites, comment on devrait les répartir dans ces deux suites pour obtenir le *maximum* ou le *minimum*, soit de la somme des produits soit de la somme des quotiens. Il observe 1.° que, pour avoir le *maximum* de la somme des produits ou le *minimum* de la somme des quotiens, il faut, après avoir disposé les $2n$ nombres, par ordre de grandeur, du plus petit au plus grand, placer le second sous le premier, le quatrième sous le troisième, le sixième sous le cinquième, et ainsi de suite; 2.° que, pour avoir, au contraire, le *minimum* de la somme des produits ou le *maximum* de la somme des quotiens, il faut, après avoir disposé les $2n$ nombres, par ordre de grandeur, du plus grand au plus petit, placer le dernier sous le premier, l'avant-dernier sous le second, le $(2n-2)^{me}$ sous le troisième, le $(2n-3)^{me}$ sous le quatrième, et ainsi de suite.

M. Le Grand remarque encore 1.° que, si l'on a m suites de n nombres chacune, et qu'il soit question de disposer les nombres qui composent chacune d'elles, de manière que la somme des produits des termes correspondans dans les m suites soit un *maximum*, il faudra encore, comme dans le cas de deux suites seulement, ranger les termes de chaque suite, par ordre de grandeur, du premier au dernier, de manière qu'ils aillent en croissant ou en décroissant, dans toutes les suites ; 2.° que, si l'on a seulement mn nombres qu'il soit question de partager en m suites de n termes chacune, de manière à ce que la somme des produits des termes correspondans de ces m suites soit un *maximum* ; il faudra, après avoir disposé ces mn nombres par ordre de grandeur, du plus petit au plus grand, former la première suite avec ces nombres, pris de n en n, à partir du premier, former la seconde avec ces nombres, pris de n en n, à partir du second, former la troisième avec ces nombres, pris de n en n, à partir du troisième, et ainsi de suite.

Les principes qui viennent d'être développés peuvent souvent être appliqués avec avantage ; nous allons le prouver par un exemple.

Soient c, c', c'', trois droites et β, β', β'' trois angles donnés, dont la somme soit deux angles droits, et tels conséquemment que la moitié d'aucun ne soit un angle obtus, et proposons-nous de déterminer de quelle manière on doit accoupler ces trois angles avec les trois droites, pour que la fonction

$$\frac{c^2\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c'^2\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta''}{2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''},$$

soit un *maximum* ?

En introduisant les demi-angles, au lieu des angles même, on transforme facilement cette fonction en celle-ci

$$\frac{1}{4}\left\{\left[\frac{c^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta}+\frac{c'^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta'}+\frac{c''^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta''}\right]-\left[c^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta+c^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta'+c''^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta''\right]\right\}$$

or, pour que cette quantité soit un *maximum*, il faut évidemment que

$$\frac{c^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta}+\frac{c'^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta'}+\frac{c''^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta''},$$

soit un *maximum*, et qu'en outre

$$c^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta+c'^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta'+c''^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta'',$$

soit un *minimum*.

Ces deux conditions se trouveront, à la fois, satisfaites, d'après ce qui précède, si c^2, c'^2, c''^2 allant en croissant, Tang.$\frac{1}{2}\beta$, Tang.$\frac{1}{2}\beta'$, Tang.$\frac{1}{2}\beta''$ vont au contraire en décroissant ; ou, plus simplement, si, c, c', c'' allant en croissant, β, β', β'' vont en décroissant. Ce serait le contraire si la fonction proposée devait être un *minimum*.

La question que nous venons de traiter est celle dont s'est occupé M. Bidone à la page 380 du deuxième volume de ce recueil. On voit que l'application des principes développés ci-dessus en fournit une solution à la fois directe et élégante.