Questions résolues. Solution du problème de gnomonique proposé à la page 40 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 372-376
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__372_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de gnomonique proposé à la page 40 de ce volume ;

Par M. J. M.

ÉNONCÉ 1.° *Tracer sur une colonne cylindrique et verticale, portant un chapiteau circulaire, un cadran dont l'heure soit indiquée par l'ombre du chapiteau sur le fust de la colonne?*

2.° *Décrire sur ce fust, les deux courbes qui terminent les lignes horaires, au solstice d'été et au solstice d'hiver?*

3.° *Faire une application spéciale des méthodes ou formules auxquelles on sera parvenu, en se donnant, en nombres, les diamètres du chapiteau et du fust de la colonne, ainsi que la latitude du lieu?*

Considérations préliminaires;

Par le Rédacteur des *Annales.*

La brièveté de la lettre suivante, qui renferme la solution du problème, nous a semblé nécessiter quelques développemens préliminaires, propres à mieux faire comprendre à quoi ce problème se réduit.

Si un cylindre vertical est exposé aux rayons du soleil, ces rayons pouvant sensiblement être considérés comme parallèles, on conçoit que toujours une moitié de la surface de ce cylindre sera éclairée, tandis que son autre moitié sera privée de lumière. On conçoit de plus, que la partie éclairée sera séparée de la partie non éclairée, par deux droites parallèles à l'axe du cylindre, situées avec cet axe dans un même plan perpendiculaire à celui que l'on conduirait par le même axe et par le centre du soleil.

On voit par là que, si, par l'axe du cylindre, on conçoit un plan perpendiculaire à celui du méridien, les intersections de ce plan avec la surface de ce cylindre seront, pour tous les jours à midi, les lignes qui sépareront sa partie éclairée de sa partie non éclairée. Mais comme, pour une même heure déterminée, autre que celle de midi, le vertical du soleil change tous les jours, avec la déclinaison de cet astre; il s'ensuit que chaque jour aussi les lignes qui, pour une même heure déterminée, autre que celle de midi, sépareront la partie éclairée du cylindre de sa partie non éclairée, varieront de situation avec la déclinaison du soleil.

Concevons présentement que le cylindre porte, à sa partie supérieure, un plateau circulaire horizontal, d'un rayon supérieur au sien, et ayant soncentre sur son axe. Ce plateau projetera sur la surface du cylindre une ombre dont la situation variera avec celle du vertical du soleil et dont la figure dépendra de la hauteur du soleil dans ce vertical. Cette même ombre coupera en un point chacune des droites limitatrices de la partie éclairée du cylindre ; et la situation de ce point dépendra aussi évidemment de la hauteur du soleil et de la déclinaison de son vertical, lesquelles dépendent à leur tour de la déclinaison du soleil et de l'angle horaire.

Ce point variant tous les jours de position sur la surface du cylindre, pour une même heure donnée ; la courbe qu'il tracera, sur cette surface, pourra être prise pour la ligne horaire répondant à cette heure donnée. En traçant ainsi toutes les lignes horaires, le lieu de leurs extrémités inférieures et celui de leurs extrémités supérieures seront respectivement les courbes qui terminent les lignes horaires au solstice d'été et au solstice d'hiver.

Soit C (fig. 6) le centre du plateau ; soit CM la ligne méridienne, tracée sur ce plateau ; soit ZCM le plan du méridien ; soit ZCA le plan du vertical du soleil, dont la déclinaison par rapport au plan du méridien soit l'angle MCA ; soit enfin, dans ce plan, CS la droite allant du point C au centre du soleil, en sorte que la hauteur de cet astre soit l'angle SCA qui, comme l'angle MCA, dépendra de l'heure et de la déclinaison du soleil.

Soit menée CB, perpendiculaire à CA, et se terminant en B, à la circonférence de la base supérieure du cylindre. Si l'on mène, sur la surface de ce cylindre, BD parallèle à son axe, cette droite sera, pour la déclinaison MCA du plan du vertical du soleil, la limite de la partie non éclairée de ce même cylindre.

Pour obtenir l'intersection de cette droite avec l'ombre du plateau, soit menée, par B, la parallèle EF à CA, se terminant en E à la circonférence du plateau ; menant alors EG parallèle à SC, le point G où cette droite coupera BD sera le point cherché.

En faisant *Ang*.MCA$=D$, *Ang*.ACS$=H$, désignant par r et r' respectivement les rayons du cylindre et du plateau, par x l'arc MAB, par y la droite BG, et prenant l'angle droit pour unité de mesure des angles, on trouve

$$x=\tfrac{1}{2}\varpi r(1+D)\,,\quad y=\sqrt{(r'+r)(r'-r)}\,\text{Tang.}H\,;$$

formules au moyen desquelles rien ne sera plus facile que de tracer par points les lignes horaires, sur le développement de la surface du cylindre.

A l'aide de ces préliminaires, il sera très-aisé de suivre la solution renfermée dans la lettre de M. J. M.

Au Rédacteur des *Annales*;

Monsieur,

Le problème de gnomonique proposé à la page 40 de ce volume peut être résolu comme il suit :

1.° *Par l'analise.* L'équation du cylindre oblique formé par l'ombre du chapiteau est

$$(a^2+b^2)z^2-2(ax+by)z=r'^2-r^2.$$

L'origine des coordonnées est placée au centre du chapiteau ; r et r' sont respectivement les rayons de la colonne et de ce chapiteau ; on a de plus $a=\text{Cos}.D\text{Cot}.H$, $b=\text{Sin}.D\text{Cot}.H$; D et H étant respectivement la déclinaison du vertical du soleil et sa hauteur dans ce vertical, et pouvant conséquemment être facilement déduits de la déclinaison du soleil et de l'heure du lieu, par la résolution d'un triangle sphérique.

Au moyen de l'équation ci-dessus, on peut avoir tous les points de l'ombre du chapiteau sur la colonne. On peut aussi se contenter d'avoir leurs projections sur le plan vertical des xz, ou sur celui des yz; mais l'on n'a besoin, pour la solution du problème, que des points extrêmes de l'ombre; car les lignes horaires sont ici les lignes qui, dans tous les temps, limitent l'ombre à une heure donnée. On se bornera donc à chercher ces points extrêmes, pour chaque heure du jour, et pour un assez grand nombre d'époques de l'année, afin de pouvoir tracer, avec quelque exactitude, les courbes que ces lignes horaires doivent affecter.

2.° *Par des procédés graphiques.* Par une première construction fort simple, on trouvera la hauteur du soleil, et la position du vertical qui passe par cet astre, à une heure et à une époque données. On prendra donc ces deux choses, pour toutes les heures du jour et pour un nombre d'époques suffisant. Au moyen de cela, il sera facile d'avoir la projection de l'ombre, soit sur le plan du méridien soit sur celui du premier vertical. Mais, au lieu d'en faire la construction, on se contentera encore ici de chercher graphiquement les extrémités de l'ombre, ce qui suffira pour tracer les projections des lignes horaires, d'où il sera facile de conclure ensuite le tracé de ces mêmes lignes sur le développement du cylindre.

Je joins ici ce développement (fig. 7), pour une latitude de 45.°45′, le rayon du cylindre étant 36 millimètres et celui du chapiteau 45 millimètres.

Agréez, etc.

Lyon, le 19 de mars 1813.

Solutions