ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Analise transcendante. Troisième mémoire sur les facultés numériques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 325-344
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__325_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Troisième mémoire sur les Facultés numériques. (*)

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. Dans le précédent mémoire, nous avons évalué le produit des facteurs

$$1-\frac{x^2}{a^2}\,,\quad 1-\frac{x^2}{(a+r)^2}\,,\quad 1-\frac{x^2}{(a+2r)^2}\,,\quad 1-\frac{x^2}{(a+3r)^2}\,,\ldots\ldots$$

continué jusqu'à l'infini; et nous l'avons trouvé égal à

$$\frac{f!f!}{(f+\frac{x}{r})!(f-\frac{x}{r})!}\,;$$

en faisant, pour abréger, $\frac{a}{r}-1=f$, ce qui donne $1+f=\frac{a}{r}$. Pour éviter les formes fractionnaires, soit $a=hr$, $x=ry$; nous aurons ainsi

$$\left\{1-\frac{y^2}{h^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+2)^2}\right\}\ldots=\frac{(h-1)!(h-1)!}{(h-1+y)!(h-1-y)!}\,;$$

le premier membre étant prolongé à l'infini.

(*) Voyez les pages 1 et 114 de ce volume.

2. Cette expression admet des réductions ultérieures. D'après le théorème connu $a^{m+n|r}=a^{m|r}(a+mr)^{n|r}$, on aura, dans le cas particulier de $a=1$, $r=1$

$$(m+n)!=m!(1+m)^{n|1};$$

ce qui donne

$$(h-1+y)!=(h-1)!\,h^{y|1};$$

$$(h-1-y)!=(h-1)!\,h^{-y|1};$$

en conséquence, en désignant par P le produit infini qui nous occupe, nous aurons

$$P=\frac{(h-1)!\,(h-1)!}{(h-1+y)!\,(h-1-y)!}=\frac{1}{h^{y|1}.h^{-y|1}}.$$

3. Comme on a, par les formules connues,

$$h^{-y|1}=\frac{1}{(h-y)^{y|1}},$$

on pourra encore écrire

$$P=\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}.$$

Comme tous les facteurs du produit P ne renferment que les quarrés de y, il doit être permis d'y remplacer $+y$ par $-y$, et réciproquement; de sorte que les expressions

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}} \quad \text{et} \quad \frac{(h+y)^{-y|1}}{h^{-y|1}},$$

doivent être identiquement les mêmes. Elles le sont effectivement; et, en employant les réductions que nous avons enseignées, l'une se transforme facilement dans l'autre.

4. Le théorème binomial est applicable aux factorielles (*). On a

(*) Voyez l'*Arithmétique universelle* de l'auteur.

J. D. G.

$$(A+B)^{n|r}=A^{n|r}+\frac{n}{1}A^{n-1|r}B+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}A^{n-2|r}B^{2|r}+\ldots;$$

$$(A-B)^{n|r}=A^{n|r}-\frac{n}{1}A^{n-1|r}B+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}A^{n-2|r}B^{2|r}-\ldots.$$

Divisant la première égalité par $A^{n|r}$, pour que le premier terme de la série soit égal à l'unité, et se rappelant que

$$A^{n-1|r}=\frac{A^{n|r}}{A+nr-r},$$

$$A^{n-2|r}=\frac{A^{n|r}}{(A+nr-2r)^{2|r}},$$

$$A^{n-3|r}=\frac{A^{n|r}}{(A+nr-3r)^{3|r}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on la transformera en

$$\frac{(A+B)^{n|r}}{A^{n|r}}=1+\frac{nB}{A+nr-r}+\frac{n(n-1)B^{2|r}}{1.2(A+nr-2r)^{2|r}}+\ldots..,$$

et, en appliquant cette formule aux deux expressions de P que nous venons de trouver; savoir:

$$P=\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=\frac{(h+y)^{-y|1}}{h^{-y|1}},$$

elles deviendront

$$P=1-\frac{y^2}{h+y-1}+\frac{y^2(y-1)^2}{1.2(h+y-1)(h+y-2)}-\frac{y^2(y-1)^2(y-2)^2}{1.2.3(h+y-1)(h+y-2)(h+y-3)}+\ldots.$$

$$P=1-\frac{y^2}{h-y-1}+\frac{y^2(y+1)^2}{1.2(h-y-1)(h-y-2)}-\frac{y^2(y+1)^2(y+2)^2}{1.2.3(h-y-1)(h-y-2)(h-y-3)}+\ldots.$$

Ces deux séries sont effectivement identiques entre elles, sans que leur forme, très-peu favorable, laisse entrevoir cette identité.

5. Pour remédier à cet inconvénient, reprenons le premier développement

$$\frac{(A+B)^{n|r}}{A^{n|r}}=1+\frac{nB}{A+nr-r}+\frac{n(n-1)B^{2|r}}{1.2(A+nr-r)^{2|r}}+\ldots\ldots,$$

et faisons $A+nr-r=a$, ce qui donne $A=a-nr+r$, et $A+B$ $a+B-nr+r$. On aura ainsi

$$A^{n|r}=(a-nr+r)^{n|r}=a^{n|-r},$$

$$(A+B)^{n|r}=(a+B-nr+r)^{n|r}=(a+B)^{n|-r};$$

ce qui donne

$$\frac{(a+B)^{n|-r}}{a^{n|-r}}=1+\frac{nB}{a}+\frac{n(n-1)B^{2|r}}{1.2a^{2|-r}}+\frac{n(n-1)(n-2)B^{3|r}}{1.2.3a^{3|-r}}+\ldots.$$

C'est là le premier des *huit* théorèmes qu'on trouve à la page 63 de mon *Analise des réfractions.* Il ne m'a pas paru nécessaire d'en ajouter les démonstrations, lesquelles, comme on vient de voir, se seraient réduites à quelques développemens de calculs fort simples.

6. Enfin, si, dans cette expression, on fait $a=h$, $B=-y$, $n=y$ et $r=1$, on trouvera

$$P=\left\{1-\frac{y^2}{h^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+2)^2}\right\}\ldots\ldots=\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=$$

$$1-\frac{y^2}{h}+\frac{y^2(y^2-1)}{1.2h(h+1)}-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{1.2.3h(h+1)(h+2)}+\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)}{1.2.3.4h(h+1)(h+2)(h+3)}-\ldots$$

Cette série, remarquable par sa forme, et qui a l'avantage précieux de pouvoir être rendue convergente à volonté, dans tous les cas, ne renferme que les quarrés de y, ce qui est exigé par la nature du problème.

7. Indépendamment du calcul des factorielles, on peut y parvenir immédiatement de la manière qui suit. Faisons

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=P=1-Ay^2+By^2(y^2-1)+Cy^2(y^2-1)(y^2-4)+\ldots;$$

en posant successivement $y=1, 2, 3, 4, \ldots$ on aura

$$\frac{h-1}{h}=1-A\,,$$

$$\frac{(h-2)(h-1)}{h(h+1)}=1-4A+12B\,,$$

$$\frac{(h-3)(h-2)(h-1)}{h(h+1)(h+2)}=1-9A+72B-360C\,,$$

$$\frac{(h-4)(h-3)(h-2)(h-1)}{h(h+1)(h+2)(h+3)}=1-16A+240B-2880C+20160D\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

d'où, par un calcul très-facile, on déduit pour A, B, C, ... les mêmes valeurs que nous venons d'obtenir.

8. En multipliant cette même série par $1-\frac{y^2}{(h-1)^2}$, il doit en résulter ce qu'elle devient en y remplaçant simplement la lettre h par $h-1$. Pour faire cette multiplication, considérons que y^2 peut être remplacé

$$\begin{aligned}&\text{par } 1+(y^2-1)\,,\\&\text{par } 4+(y^2-4)\,,\\&\text{par } 9+(y^2-9)\,,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\,;\end{aligned}$$

ce qui suffit pour rendre au produit sa forme primitive. Il deviendra alors, avec cette attention,

$$1-y^2\left\{\frac{1}{h}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{1}{h(h-1)^2}\right\}$$

$$+\frac{y^2(y^2-1)}{h}\left\{\frac{1}{2(h+1)}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{2}{(h+1)(h-1)^2}\right\}$$

$$-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{2h(h+1)}\left\{\frac{1}{3(h+2)}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{3}{(h+2)(h-1)^2}\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

or,

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{1}{h(h-1)^2}=\frac{1}{h-1},$$

$$\frac{1}{2(h+1)}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{2}{(h+1)(h-1)^2}=\frac{1}{2(h-1)},$$

$$\frac{1}{3(h+2)}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{3}{(h+2)(h-1)^2}=\frac{1}{3(h-1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ce produit sera donc, en effet,

$$1-\frac{y^2}{h-1}+\frac{y^2(y^2-1)}{2(h-1)h}-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{2.3(h-1)h(h+1)}+\ldots\ldots;$$

conformément à la nature du problème.

9. Il suit des résultats que nous venons d'obtenir, qu'en faisant y égal à un nombre entier quelconque, positif ou négatif, le produit P, continué à l'infini, est toujours une quantité entièrement rationnelle, quel que soit h (*). Il s'ensuit encore qu'en faisant y égal à *h plus* ou *moins* un nombre entier quelconque, la valeur de la série, développement de P, est constamment *zéro*. Nous remarquerons encore que, lorsque h est un nombre entier quelconque, cette série est égale à $\frac{\text{Sin.}\varpi y}{\varpi y}$, multiplié par quelque facteur entièrement rationnel; et que, lorsque y est un nombre entier, plus la fraction $\frac{1}{2}$, cette même série est toujours un multiple de $\text{Cos.}\varpi y$.

(*) Pourvu cependant que h ne soit point un nombre entier *négatif*.
J. D. G.

10. Effectivement, faisons, dans les théorèmes précédens, $h=1$; nous aurons, d'un côté

$$\left(1-\frac{y^2}{1}\right)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\left(1-\frac{y^2}{16}\right)\ldots\ldots;$$

produit que l'on sait être égal à $\frac{\text{Sin.}\varpi y}{\varpi y}$, et de l'autre la série

$$1-\frac{y^2}{1}+\frac{y^2(y^2-1)}{1.4}-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{1.4.9}+\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)}{1.4.9.16}-\ldots.$$

On peut aisément vérifier que cette série s'évanouit, en effet, pour toutes les valeurs entières de y. Mais il importe de nous assurer, par un exemple, que cette série est effectivement applicable à toutes les valeurs fractionnaires de y; de plus, nous devons montrer que la série est convergente à volonté. Cherchons, en conséquence, d'après cette même série, le sinus de l'angle de $66.^\circ 36'$, égal à $0,37\varpi$; ce qui donne $y=0,37$; et

$$\begin{array}{ll} y^2=+0,1369\,, & y^2-16=-15,1369\,, \\ y^2-1=-0,8631\,, & y^2-25=-24,1369\,, \\ y^2-4=-3,8631\,, & y^2-36=-35,1369\,; \\ y^2-9=8,8631\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On aura de plus

$$\begin{array}{ll} 1-y^2=0,8631000\,, & 1-\frac{y^2}{25}=0,9945240\,, \\ 1-\frac{y^2}{4}=0,9657750\,, & 1-\frac{y^2}{46}=0,9961972\,, \\ 1-\frac{y^2}{9}=0,9847889\,, & 1-\frac{y^2}{39}=0,9972061\,, \\ 1-\frac{y^2}{16}=0,9914438\,, & 1-\frac{y^2}{64}=0,9978609\,; \end{array}$$

et par conséquent

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{1}\right)=9.9360611\ , \\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{4}\right)=9.9848760\ , \\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{9}\right)=9.9933432\ , \\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{16}\right)=9.9962680\ , \\
\text{Log}\left(1-\frac{y^2}{25}\right)=9.9976153\ , \\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{36}\right)=9.9983454\ , \\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{49}\right)=9.9987849\ , \\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{64}\right)=9.9990700\ ;
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\text{Somme} =9.9043639\ , \\
\text{Log.}0{,}37=9.5682017\ , \\
\text{Log.}\,\varpi =0{,}4971499\ , \\
\hline
\text{Somme} =9.9697155\ .
\end{array}$$

Ainsi, le logarithme du produit des facteurs de Sin.66.°36′, jusqu'au facteur $1-\frac{y^2}{64}$ inclusivement, est 9.9697155. Le produit des autres facteurs est

$$\left(1-\frac{y^2}{81}\right)\left(1-\frac{y^2}{100}\right)\left(1-\frac{y^2}{121}\right)\ldots\ldots$$

continué à l'infini; c'est-à-dire, la série

$$1-\frac{y^2}{h}+\frac{y^2(y^2-1)}{2h(h+1)}-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{2.3h(h+1)(h+2)}+\ldots\ldots,$$

en y faisant $y=0{,}37$ et $h=9$;
or, en posant

A

$$A=\frac{y^2}{h}\,,\qquad E=D.\frac{(y^2-16)}{5(h+4)}\,,$$

$$B=A.\frac{(y^2-1)}{2(h+1)}\,,\qquad F=E.\frac{(y^2-25)}{6(h+5)}\,,$$

$$C=B.\frac{(y^2-4)}{3(h+2)}\,,\qquad G=F.\frac{(y^2-36)}{7(h+6)}\,,$$

$$D=C.\frac{(y^2-9)}{4(h+3)}\,,\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

cette série se réduit à

$$1-A-B-C-D-E-F-G-\ldots\,;$$

et l'on a

$$\left.\begin{array}{l}
A=\dfrac{0,1369}{1.9}=0,0152111\,,\\
B=\dfrac{0,8631}{2.10}A=0,0006564\,,\\
C=\dfrac{3,8631}{3.11}B=0,0000768\,,\\
D=\dfrac{8,8631}{4.12}C=0,0000142\,,\\
E=\dfrac{15,8631}{5.13}D=0,0000035\,,\\
F=\dfrac{24,8631}{6.14}E=0,0000010\,,\\
G=\dfrac{35,8631}{7.15}F=0,0000003\,;
\end{array}\right\}\ \text{Somme}=0,0159633.$$

Ainsi le produit de tous les facteurs ultérieurs de la valeur de Sin.66.°36′ est 0,9840367, dont le logarithme 9.9930113, ajouté au logarithme déjà trouvé 9,9697155, donne 9.9627268, pour le logarithme de Sin.66.°36′, exact à deux unités décimales du dernier ordre près.

11. Faisant, dans la même série, $h=\frac{1}{2}$, on aura, d'un côté, le produit

$$\left(1-\frac{4y^2}{1}\right)\left(1-\frac{4y^2}{9}\right)\left(1-\frac{4y^2}{25}\right)\left(1-\frac{4y^2}{49}\right)\ldots\ldots,$$

que nous savons être égal à $\text{Cos.}\varpi y$. De l'autre, nous aurons la série

$$1-\frac{2y^2}{1}+\frac{4y^2(y^2-1)}{1.2.1.3}-\frac{8y^2(y^2-1)(y^2-4)}{1.2.3.1.3.5}+\ldots\ldots,$$

laquelle exprimera aussi conséquemment $\text{Cos.}\varpi y$, et sera effectivement applicable, dans tous les cas particuliers.

12. L'objet principal que nous nous proposons dans ce mémoire et dans ceux qui le suivront, c'est de décomposer toute suite infinie proposée

$$1-ay^2+by^4-cy^6+dy^8-\ldots.$$

en facteurs de l'une ou de l'autre des deux formes

$$1-\frac{y^2}{h^2}, \quad 1+\frac{y^2}{h^2},$$

dans les cas où cette décomposition est effectivement possible. Ces cas sont beaucoup plus fréquens qu'on ne le suppose ordinairement ; les problèmes les plus difficiles et les plus importans de mécanique et d'astronomie, inaccessibles aux méthodes ordinaires, conduisent finalement à de pareilles séries, et se trouvent ainsi réductibles à nos facultés numériques. Dans cette vue, nous nous proposerons les problèmes préliminaires qui suivent :

13. Essayons de réduire le produit

$$y^2\{y^2-1\}\{y^2-4\}\{y^2-9\}\ldots.\{y^2-(n-1)^2\},$$

au langage des factorielles ; nous trouverons

$$y^2\{y^2-1\}\{y^2-4\}\{y^2-9\}\ldots.\{y^2-(n-1)^2\}=y.(y-n+1)^{2n-1|1}.$$

Appliquant le théorème binomial à la factorielle

$$(y-n+1)^{2n-1|1},$$

elle deviendra

$$\{y-(n-1)\}^{2n-1|1}=y^{2n-1|1}-\frac{2n-1}{1}(n-1)y^{2n-2|1}$$

$$+\frac{2n-1}{1}.\frac{2n-2}{2}(n-1)(n-2)y^{2n-3|1}$$

$$-\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}\cdot\frac{2n-3}{3}(n-1)(n-2)(n-3)y^{2n-4|1}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour multiplier cette série par y, remarquons que

$$y.y^{2n-1|1}=y^{2n\ |1}-(2n-1).y^{2n-1|1},$$
$$y.y^{2n-2|1}=y^{2n-1|1}-(2n-2).y^{2n-2|1},$$
$$y.y^{2n-3|1}=y^{2n-2|1}-(2n-3).y^{2n-3|1},$$
$$y.y^{2n-4|1}=y^{2n-3|1}-(2n-4).y^{2n-4|1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

au moyen de ces réductions, on trouvera

$$y^2\{y^2-1\}\{y^2-4\}\{y^2-9\}\ldots\{y^2-(n-1)\}$$
$$=y^{2n|1}-\frac{2n-1}{1}ny^{2n-1|1}$$
$$+\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}n(n-1)y^{2n-2|1}$$
$$-\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}\cdot\frac{2n-3}{3}n(n-1)(n-2)y^{2n-3|1}$$
$$+\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}\cdot\frac{2n-3}{3}\cdot\frac{2n-4}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)y^{2n-4|1}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'application aux cas particuliers de l'exposant n est facile. Comme la formule, finalement développée, ne doit renfermer que les puissances paires de y, et qu'ainsi les termes qui composent les coefficiens des puissances impaires doivent tous se détruire mutuellement, il en résulte une suite de théorèmes particuliers que nous laissons à découvrir au lecteur.

14. Il peut importer de connaître le logarithme naturel de la fonction

$$P=\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}.$$

On trouve, par les formules connues,

$$\text{Log.}P = y\,\text{Log.}\frac{h-y}{h+y} + (h-\tfrac{1}{2})\text{Log.}\frac{h^2}{h^2-y^2} - \Gamma\frac{1}{h-y} + 2\Gamma\frac{1}{h} - \Gamma\frac{h+y}{1}.\ (*)$$

Cette expression est réductible en série de la forme

$$-\text{Log.}P = A\frac{y^2}{h^2} + B\frac{y^4}{h^4} + C\frac{y^6}{h^6} + D\frac{y^8}{h^8} + \ldots\ldots$$

dans laquelle on a

$$A = h + \tfrac{1}{2} + \frac{2B_2}{h} + \frac{12B_4}{3h^3} + \frac{30B_6}{5h^5} + \frac{56B_8}{7h^7} + \ldots,$$

$$B = \frac{h}{6} + \tfrac{1}{4} + \frac{2B_2}{h} + \frac{30B_4}{3h^3} + \frac{140B_6}{5h^5} + \frac{420B_8}{7h^7} + \ldots,$$

$$C = \frac{h}{15} + \tfrac{1}{6} + \frac{2B_2}{h} + \frac{56B_4}{3h^3} + \frac{420B_6}{5h^5} + \frac{1848B_8}{7h^7} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

B_2, B_4, B_6,.... étant les *Nombres de Bernoulli.* La convergence de ces séries dépendant de la grandeur du nombre désigné par h, elles peuvent être considérées comme convergentes à volonté.

15. Il a été prouvé, en son lieu, que le théorème binomial est applicable aux factorielles. La fonction

$$P = \frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}},$$

admet un théorème parfaitement analogue. Pour l'exposer, avec clarté, désignons par A, B, C, D,.... respectivement les facteurs y^2, y^2-1, y^2-4, y^2-9,....; et par N, O, P, Q,.... les facteurs y^2-n^2, $y^2-(n+1)^2$, $y^2-(n+2)^2$, $y^2-(n+3)^2$,...., de manière qu'on ait

$$\begin{array}{ll}
A = y^2\ ; & N = y^2 - n^2\ ; \\
B = y^2 - 1\ , & O = y^2 - (n+1)^2\ , \\
C = y^2 - 4\ , & P = y^2 - (n+2)^2\ , \\
D = y^2 - 9\ , & Q = y^2 - (n+3)^2\ , \\
E = y^2 - 16\ , & R = y^2 - (n+4)^2\ , \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

(*) Voyez les précédens mémoires.

Proposons-nous ensuite de développer le produit $ABCD\ldots\ldots$ en une série de la forme $NOPQ\ldots\ldots+aNOP\ldots\ldots+bNO\ldots\ldots+cN\ldots\ldots+d\ldots\ldots+\ldots\ldots$; on voit que les coefficiens a, b, c, d,.... doivent nécessairement être fonctions, tant de n que du nombre des facteurs du produit $ABCD\ldots\ldots$ On voit de plus que, si le nombre de ces facteurs est fini, celui des termes de la série qu'on demande le sera de même. Voici les formules générales qui contiennent la solution du problème; on trouve

Pour *un* facteur : $A=N+n^2$.

Pour *deux* facteurs : $AB=NO+2(n+1)nN+(n+1)n^2(n-1)$.

Pour *trois* facteurs :
$$\begin{aligned}ABC=NOP&+3(n+2)nNO\\&+3(n+2)(n+1)n(n-1)N\\&+(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2).\end{aligned}$$

Pour *quatre* facteurs :
$$\begin{aligned}ABCD=NOPQ&+4(n+3)nNOP\\&+6(n+3)(n+2)n(n-1)NO\\&+4(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)N\\&+(n+3)(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)(n-3).\end{aligned}$$

Pour *cinq* facteurs :
$$\begin{aligned}ABCDE=NOPQR&\\&+5(n+4)nNOPQ\\&+10(n+4)(n+3)n(n-1)NOP\\&+10(n+4)(n+3)(n+2)n(n-1)(n-2)NO\\&+5(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)N\\&+(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).\end{aligned}$$

et ainsi des autres.

16. La loi de ces séries est manifeste. En exposant la méthode qui m'y a conduit, j'en aurai donné la démonstration. Supposons donc que, de $ABCDE$, on veuille passer à $ABCDEF$. On a trouvé

$$ABCDE=NOPQR+aNOPQ+bNOP+cNO+dN+e.$$

Les coefficiens numériques sont de simples produits de facteurs décroissans, depuis $n+4$ et n, et multipliés par les coefficiens de la cinquième puissance du binôme. Il faudra multiplier tous les termes de cette expression par $F=y^2-25$. On remarquera que

$$F=y^2-\quad n^2\quad+\quad n^2\quad-25=N+(n+5)(n-5)\ ;$$
$$F=y^2-(n+1)^2+(n+1)^2-25=O+(n+6)(n-4)\ ;$$
$$F=y^2-(n+2)^2+(n+2)^2-25=P+(n+7)(n-3)\ ;$$
$$F=y^2-(n+3)^2+(n+3)^2-25=Q+(n+8)(n-2)\ ;$$
$$F=y^2-(n+4)^2+(n+4)^2-25=R+(n+9)(n-1)\ ;$$
$$F=y^2-(n+5)^2+(n+5)^2-25=S+(n+10)n.$$

On multipliera par la *dernière* de ces valeurs de F le produit $NOPQR$; par l'*avant-dernière* le produit $NOPQ$, et ainsi des autres. Le produit demandé prendra ainsi la forme d'une serie telle que

$$ABCDEF=NOPQRS+a'NOPQR+b'NOPQ+c'NOP+d'NO+e'N+f'\ ,$$

dans lequel on aura

$$a'=a+(n+10)n\ ,$$
$$b'=b+(n+9)(n-1)a\ ,$$
$$c'=c+(n+8)(n-2)b\ ,$$
$$d'=d+(n+7)(n-3)c\ ,$$
$$e'=e+(n+6)(n-4)d\ ,$$
$$f'=(n+5)(n-5)e\ ;$$

ce qui donnera

$$a'=\ 6(n+5)n\ ,$$
$$b'=15(n+5)(n+4)n(n-1)\ ,$$
$$c'=20(n+5)(n+4)(n+3)n(n-1)(n-2)\ ,$$
$$d'=15(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)n(n-1)(n-2)(n-3)\ ,$$
$$e'=\ 6(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ ,$$
$$f'=\quad(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Et ainsi des autres.

17. Pour approcher du but que nous nous proposons , essayons de transformer la série

$$a+by^2+cy^4+dy^6+ey^8+fy^{10}+\ldots\ldots\ ,$$

en un autre série de cette forme

$$a'+b'y^2+c'y^2(y^2-1)+d'y^2(y^2-1)(y^2-4)+e'y^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)+\ldots$$

En désignant l'une et l'autre séries par Fy , on aura

$$\mathrm{F}0=a'\ ;$$
$$\mathrm{F}1=a'+b'\ ;$$

$$\mathrm{F}2=a'+4b'+12c'\ ;$$
$$\mathrm{F}3=a'+9b'+72c'+360d'\ ;$$
$$\mathrm{F}4=a'+16b'+240c'+2880d'+20160e'\ ;$$
$$\mathrm{F}5=a'+25b'+600c'+12600d'+201600e'+1814400f'\ ;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et l'on trouvera facilement, d'après cela,

$$a'=2.\frac{\frac{1}{2}\mathrm{F}0}{0!},$$
$$b'=2\left\{\frac{\mathrm{F}1}{2!}-\frac{\frac{1}{2}\mathrm{F}0}{1!1!}\right\},$$
$$c'=2\left\{\frac{\mathrm{F}2}{4!}-\frac{\mathrm{F}1}{1!3!}+\frac{\frac{1}{2}\mathrm{F}0}{2!2!}\right\},$$
$$d'=2\left\{\frac{\mathrm{F}3}{6!}-\frac{\mathrm{F}2}{1!5!}+\frac{\mathrm{F}1}{2!4!}-\frac{\frac{1}{2}\mathrm{F}0}{3!3!}\right\},$$
$$e'=2\left\{\frac{\mathrm{F}4}{8!}-\frac{\mathrm{F}3}{1!7!}+\frac{\mathrm{F}2}{2!6!}-\frac{\mathrm{F}1}{3!5!}+\frac{\frac{1}{2}\mathrm{F}0}{4!4!}\right\},$$
$$f'=2\left\{\frac{\mathrm{F}5}{10!}-\frac{\mathrm{F}4}{1!9!}+\frac{\mathrm{F}3}{2!8!}-\frac{\mathrm{F}2}{3!7!}+\frac{\mathrm{F}1}{4!6!}-\frac{\frac{1}{2}\mathrm{F}0}{5!5!}\right\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

résultats dont la loi est manifeste.

18. La détermination des fonctions F0, F1, F2,.... ou

$$\mathrm{F}0=a\ ,$$
$$\mathrm{F}1=a+\ b+\ \ c+\ \ d+\ \ \ e+\ \ \ \ f+\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{F}2=a+4b+16c+64d+256e+1024e+4096f+\ldots\ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dépend, en général, de la sommation de la série

$$\mathrm{F}y=a+by^2+cy^4+dy^6+ey^8+fy^{10}+\ldots\ldots ;$$

mais il y a des cas très-nombreux où la valeur de cette série est connue pour toutes les valeurs entières de y; et, dans ce cas, la transformation qui nous occupe ici ne saurait présenter de difficulté.

19. En particulier, si cette série est nulle pour toutes les valeurs entières de y, les valeurs des coefficiens b', c', d',.... se réduiront à leur dernier terme. Tel est le cas de

$$\frac{\text{Sin.}\varpi y}{\varpi y}=1-\frac{\varpi^2y^2}{1.2.3}+\frac{\varpi^4y^4}{1.2.3.4.5}-\frac{\varpi^6y^6}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots;$$

on a alors

$$a'=1\;,\quad b'=-\frac{1}{1}\;,\quad c'=+\frac{1}{1.4}\;,\quad d'=-\frac{1}{1.4.9},\ldots.$$

et il en résulte

$$\frac{\text{Sin.}\varpi y}{\varpi y}=1-\frac{y^2}{1}+\frac{y^2}{1}\,.\,\frac{y^2-1}{4}-\frac{y^2}{1}\,.\,\frac{y^2-1}{4}\,.\,\frac{y^2-4}{9}+\ldots;$$

série qui est ce que devient la série générale (6), dans le cas de $h=1$; elle sera donc égale au produit infini

$$\left(1-\frac{y^2}{1}\right)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\left(1-\frac{y^2}{16}\right)\ldots.$$

20. Appliquons encore nos règles générales à la décomposition en facteurs de la série

$$\text{Cos.}\varpi y=1-\frac{\varpi^2y^2}{1.2}+\frac{\varpi^4y^4}{1.2.3.4}-\frac{\varpi^6y^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots;$$

au cas que cette décomposition soit possible. On aura ici $F0=+1$ et il en sera de même de toutes les fonctions paires $F2$, $F4$,....; tandis qu'au contraire les fonctions impaires $F1$, $F3$, $F5$,.... seront égales $a-1$. On trouvera, d'après cela

$$a'=1\,,b'=-\frac{2}{1},\;c'=+\frac{4}{1.2.1.3},\;d'=-\frac{8}{1.2.3.1.3.5},\;e'=+\frac{16}{1.2.3.4.1.3.5.7},\ldots$$

Comparant ces valeurs (6) aux coefficiens

$$1\;,\quad\frac{1}{h}\,,\;\frac{1}{1.2h(h+1)}\,,\quad\frac{1}{1.2.3h(h+1)(h+2)},\ldots,$$

on verra qu'elles coïncident, dans la supposition de $h=\frac{1}{2}$. La série proposée sera donc égale au produit infini

$$\left(1-\frac{4y^2}{1}\right)\left(1-\frac{4y^2}{9}\right)\left(1-\frac{4y^2}{25}\right)\left(1-\frac{4y^2}{49}\right)\ldots.$$

20. La dernière application que nous venons de faire de notre méthode laisse suffisamment apercevoir le caractère distinctif des séries de la forme

$a+$

$$a+by^2+cy^4+dy^6+ey^8+fy^{10}+\ldots,$$

décomposables en un produit infini, tel que

$$\left\{1-\frac{y^2}{h^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+2)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+3)^2}\right\}\ldots..$$

On voit en effet que les coefficiens a, b, c,.... étant donnés, il faut d'abord calculer, par leur moyen, les coefficiens a', b', c',..., de la série

$$a'+b'y^2+c'y^2(y^2-1)+d'y^2(y^2-1)(y^2-4)\ldots.;$$

et tant que, par une détermination convenable de h, on pourra faire coïncider avec eux les coefficiens généraux

$$1,\quad -\frac{1}{h},\quad +\frac{1}{1.2h(h+1)},\quad -\frac{1}{1.2.3h(h+1)(h+2)},\ldots$$

on sera certain que la décomposition est possible, et on connaîtra tout ce qui est nécessaire pour l'effectuer.

21. Mais il importe de remarquer qu'il y a une infinité de cas où la décomposition est très-possible, sans que sa possibilité se manifeste par les caractères que nous venons d'indiquer. Cela a lieu, lorsque la série proposée est le produit de deux ou d'un plus grand nombre de produits infinis de la forme

$$\left\{1-\frac{1}{h}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+2)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+3)^2}\right\}\ldots..$$

dans lesquels la valeur de h varie, d'un produit à l'autre. Pour frayer le chemin qui conduit à cette recherche, vraiment intéressante, proposons-nous le problème qui suit;

22. Essayons de multiplier entre elles les deux séries

$$a+by^2+cy^2(y^2-1)+dy^2(y^2-1)(y^2-4)+ey^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)+\ldots,$$

$$a'+b'y^2+c'y^2(y^2-1)+d'y^2(y^2-1)(y^2-4)+e'y^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)+\ldots;$$

il est toujours possible (8) de réduire leur produit à la forme de chacune d'elles; en représentant donc ce produit par

$$A+By^2+Cy^2(y^2-1)+Dy^2(y^2-1)(y^2-4)+Ey^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)+\ldots;$$

les suppositions particulières de $y=0$, 1, 2, 3, 4,...., donneront

$$A = aa' ,$$
$$B = ab' + a'b + bb' ,$$
$$C = ac' + bb' + a'c + 4bc' + 4b'c + 12cc' ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La suite nous fournira l'occasion de continuer ces valeurs à volonté.

23. Appliquons ces résultats généraux au cas des séries qui résultent du développement des deux expressions

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}} , \quad \frac{(m-y)^{y|1}}{m^{y|1}} .$$

On a

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}} = 1 - \frac{y^2}{h} + \frac{y^2(y^2-1)}{2.h(h+1)} - \frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{2.3h(h+1)(h+2)} + \ldots ;$$
$$\frac{(m-y)^{y|1}}{m^{y|1}} = 1 - \frac{y^2}{m} + \frac{y^2(y-1)}{2m(m+1)} - \frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{2.3m(m+1)(m+2)} + \ldots\ldots$$

Il sera possible de donner au produit de ces deux séries la forme

$$1 - Ay^2 + By^2(y^2-1) - Cy^2(y^2-1)(y^2-4) + \ldots ;$$

et les coefficiens A, B, C,.... auront la forme, très-remarquable que voici :

$$A = \frac{h+m-1}{hm} ,$$
$$B = \frac{(h+m-1)(h+m)}{2h(h+1)m(m+1)} ,$$
$$C = \frac{(h+m-1)(h+m)(h+m+1)}{2.3h(h+1)(h+2)m(m+1)(m+2)} ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

24. Le théorème que nous venons d'exposer est très-vrai, en général. Toutefois nous ne saurions dissimuler qu'en l'appliquant à certains cas particuliers, qui paraissent en faire une exception formelle, on s'exposerait à une suite de conclusions extrêmement paradoxales. Supposons d'abord $h+m=1$; cette supposition rend nuls tous les coefficiens A, B, C,...., et paraît conséquemment réduire à l'unité le produit

$$\frac{(h-y)^{y|1} . (m-y)^{y|1}}{h^{y|1} m^{y|1}} ,$$

toutes les fois que $h+m=1$, ce qui permettrait de remplacer m par $1-h$. Cela est très-vrai, tant que h est un nombre entier. On a alors

$$(h-y)^{y|1}=(h-y)(h-y+1)\ldots\ldots\ldots(h-1)\ ,$$
$$h^{y|1}=h(h+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(h+y-1)\ ,$$
$$(m-y)^{y|1}=(-h-y+1)(-h-y+2)\ldots(-h)\ ,$$
$$m^{y|1}=(-h+1)(-h+2)\ldots\ldots(-h+y)\ ;$$

et il est très-clair qu'en divisant le premier produit par le second et le quatrième par le troisième, les deux quotiens seront identiquement les mêmes. Mais sera-t-il permis d'étendre ce théorème, très-évident pour des nombres entiers, à des valeurs fractionnaires de h et de m ? Supposons l'un et l'autre égaux à *un demi*, on aura

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=\frac{(m-y)^{y|1}}{m^{y|1}}=\text{Cos.}\varpi y\ ,$$

d'où il résulterait que le quarré du cosinus de tout angle quelconque, et par conséquent ce cosinus lui-même est égal à l'unité.

25. Supposons, en second lieu, $h=1$, $m=1$, nous aurons

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=\frac{(m-y)^{y|1}}{m^{y|1}}=\frac{\text{Sin.}\varpi y}{\varpi y}\ ;$$

ainsi la formule, appliquée à ce cas particulier, devrait donner pour produit $\frac{\text{Sin.}^2\varpi y}{\varpi^2 y^2}$. Cependant, comme dans ce même cas, on a $h+m-1=1$, les coefficiens A, B, C, D, ... deviennent respectivement 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, ..., la série qui doit représenter le produit devient identique avec celle qui exprimerait chacun des facteurs. On aurait donc ainsi $\text{Sin.}\varpi y=\varpi y$; proposition qui n'est admissible que dans le cas d'un angle infiniment petit, et qui est étroitement liée avec celle du n.° précédent $\text{Cos.}\varpi y=1$.

26. Ces conclusions paradoxales n'ôtent rien à la vérité, et même à la généralité du théorème. Il faudra apprendre la manière de s'en servir, et sur-tout distinguer les cas dans lesquels il présentera les restrictions que les conditions particulières du problème rendent indispensablement nécessaires. En laissant à nos lecteurs le soin provisoire de déchiffrer ces énigmes, nous devons prevenir qu'elles

seront l'objet du mémoire suivant, et que nous espérons d'en donner une solution satisfaisante et complète.