ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ROCHAT

Géométrie analitique. Recherche de quelques propriétés de l'ellipse et de l'ellipsoïde

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 25-31
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__25_1>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherche de quelques propriétés de l'ellipse et de l'ellipsoïde ;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

§. I.

Soit

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \qquad \text{(A)}$$

l'équation d'une ellipse, rapportée à son centre et à deux diamètres conjugués quelconques $2a$ et $2b$. On sait qu'une tangente à cette ellipse a pour équation

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2\ , \qquad \text{(B)}$$

x' et y' étant les coordonnées du point de contact, liées entre elles par l'équation (A).

Soient désignées respectivement par a' et b' les distances de l'origine auxquelles cette tangente coupe les axes des x et des y; alors, dans l'équation (B),

$$\text{à}\ \left\{\begin{matrix} x=0 \\ \\ y=0 \end{matrix}\right\}\ \text{devront répondre}\ \left\{\begin{matrix} y=b'\ , \\ \\ x=a'\ ; \end{matrix}\right.$$

on aura donc, d'après cela,

$$x'=\frac{a^2}{a'}\ , \qquad y'=\frac{b^2}{b'}\ ;$$

substituant donc, dans l'équation (A), il viendra

$$a'^2b^2+b'^2a^2=a'^2b'^2\ ; \qquad \text{(C)}$$

et l'équation de la tangente sera simplement

$$a'y+b'x=a'b'. \qquad \text{(D)}$$

Concevons présentement que a' et b' soient seuls donnés, et que a et b soient deux lignes variables, liées uniquement entre elles par l'équation (C); alors cette équation sera celle d'une ellipse, rapportée à deux diamètres conjugués $2a'$, $2b'$.

L'équation (D) sera celle de l'un des côtés d'un parallélogramme inscrit à cette ellipse, de manière que ses diagonales soient les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$.

Et, quant à l'équation (A), elle appartiendra à toutes les ellipses qui, ayant même centre que la précédente, et leurs diamètres conjugués dans la même direction que les siens, auront successivement ces diamètres doubles des coordonnées de tous ses points.

Et il est aisé de voir que ces dernières ellipses, inscrites à une suite de parallélogrammes inscrits eux-mêmes à la première ellipse, seront aussi inscrites au parallélogramme dont il vient d'être question ci-dessus.

De là résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. Si, à une ellipse donnée, on inscrit arbitrairement un parallélogramme dont les côtés soient parallèles à deux diamètres conjugués ; l'ellipse inscrite à ce parallélogramme, de manière à ce qu'elle touche les milieux de ses côtés, se trouvera aussi inscrite au parallélogramme dont les diagonales seraient ceux des diamètres conjugués de la première ellipse, auxquels les côtés de l'autre parallélogramme sont supposés parallèles.

Supposons actuellement que les diamètres conjugués dont il a été question jusqu'ici soient rectangulaires, et soient conséquemment les axes mêmes de la courbe, l'un des parallélogrammes deviendra un rectangle, et l'autre sera un lozange. Or l'équation (C) donne

$$a=\frac{a'}{b'}\sqrt{b'^2-b^2}\ ,\quad \text{d'où}\quad 4ab=\frac{4a'b}{b'}\sqrt{b'^2-b^2}\ ;$$

mais $4ab$ exprime l'aire du rectangle inscrit à l'ellipse donnée par l'équation (C) ; donc $\frac{4a'b}{b'}\sqrt{b'^2-b^2}$ exprime aussi cette aire ; or, si l'on égale à zéro le coefficient différentiel de cette expression, pris par rapport à b, il vient

$$b=\pm\frac{b'}{\sqrt{2}}\ ,\quad \text{d'où}\quad a=\pm\frac{a'}{\sqrt{2}}$$

valeurs qui déterminent les quatre sommets du plus grand rectangle inscrit, lequel, comme il est facile de le voir, a pour ses diagonales les diamètres conjugués égaux de l'ellipse, et est conséquemment semblable au rectangle formé par les tangentes aux sommets de cette ellipse.

De là nous pouvons conclure que, de toutes les ellipses inscrites au lozange qui a pour sommets les sommets de la première ellipse, la plus grande est celle qui est inscrite au rectangle dont les diagonales sont les diamètres conjugués égaux de cette première ellipse.

L'ellipse ainsi construite est semblable à la première, et a son aire moitié de la sienne.

Si dans l'equation (C) on fait $b=a$, on aura

$$a=\frac{a'b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

quantité facile à construire. Alors le rectangle inscrit sera un quarré, et l'ellipse correspondante un cercle ayant pour rayon la valeur de a.

§. II.

Soit

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2, \qquad \text{(E)}$$

l'équation d'un ellipsoïde rapporté à son centre et à trois diamètres conjugués quelconques $2a$, $2b$, $2c$. On sait qu'un plan tangent à cet ellipsoïde a pour équation

$$b^2c^2xx'+a^2c^2yy'+a^2b^2zz'=a^2b^2c^2; \qquad \text{(F)}$$

x', y', z' étant les coordonnées du point de contact, liées entre elles par l'équation (E).

Soient désignées respectivement par a', b', c' les distances de l'origine auxquelles ce plan tangent coupe les axes des x, des y et des z; alors, dans l'équation (F)

$$\text{à}\left\{\begin{array}{c} y=0 \\ z=0 \end{array}\right\}\text{ devra répondre } x=a',$$

$$\text{à}\left\{\begin{array}{c} z=0 \\ x=0 \end{array}\right\}\text{ devra répondre } y=b',$$

$$\text{à}\left\{\begin{array}{c} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}\text{ devra répondre } z=c',$$

on aura donc, d'après cela,

$$x'=\frac{a^2}{a'}\ ,\quad y'=\frac{b^2}{b'}\ ,\quad z'=\frac{c^2}{c'}\ ;$$

substituant donc dans l'équation (E), il viendra

$$b'^2c'^2a^2+c'^2a'^2b^2+a'^2b'^2c^2=a'^2b'^2c'^2\ ; \qquad \text{(G)}$$

et l'équation du plan tangent sera simplement

$$b'c'x+c'a'y+a'b'z=a'b'c'\ . \qquad \text{(H)}$$

Concevons présentement que a', b', c' soient seuls donnés, et que a, b, c soient trois lignes variables, liées uniquement entre elles par l'équation (G); alors cette équation sera celle d'un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$.

L'équation (H) sera celle de l'une des faces de l'octaèdre inscrit à cet ellipsoïde, de manière que ses diagonales soient les trois diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$.

Et quant à l'équation (E), elle appartiendra à tous les ellipsoïdes qui, ayant même centre que le précédent, et leurs diamètres conjugués dans la même direction que les siens, auront successivement ces diamètres doubles des coordonnées de tous ses points.

Et il est aisé de voir que ces derniers ellipsoïdes, inscrits à une suite de parallélipipèdes, inscrits eux-mêmes au premier ellipsoïde, se trouveront aussi inscrits à l'octaèdre dont il vient d'être question ci-dessus.

De là résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. Si, à un ellipsoïde donné, on inscrit arbitrairement un parallélipipède dont les arêtes soient parallèles à trois diamètres conjugués ; l'ellipsoïde inscrit à ce parallélipipède, de manière à ce qu'il touche les centres de ses faces, se trouvera aussi inscrit à l'octaèdre dont les diagonales seraient ceux des diamètres conjugués du premier ellipsoïde auxquels les arêtes du parallélipipède sont supposées parallèles.

Supposons présentement que les diamètres conjugués dont il a été question jusqu'ici soient rectangulaires, et soient conséquemment les axes mêmes de l'ellipsoïde ; le parallélipipède sera alors rectangle. Or, l'équation (G) donne

$$a=\frac{a'}{b'c'}\sqrt{b'^2c'^2-b'^2c^2-c'^2b^2},\text{ d'ou } 8abc=\frac{8a'bc}{b'c'}\sqrt{b'^2c'^2-b'^2c^2-c'^2b^2}\ ;$$

mais $8abc$ exprime le volume du parallélipipède inscrit à l'ellipsoïde donné par l'équation (G) ; donc $\frac{8a'bc}{b'c'}\sqrt{b'^2c'^2-b'^2c^2-c'^2b^2}$ est aussi l'expression de ce volume ; or, si l'on égale à zéro ses deux coefficiens différentiels pris en faisant varier successivement b et c, il viendra

$$b'^2c'^2-2b^2c'^2-c^2b'^2=0\ ,\qquad b'^2c'^2-2c^2b'^2-b^2c'^2=0\ ,$$

d'où

$$b=\pm\frac{b'}{\sqrt{3}}\ ,\qquad c=\pm\frac{c'}{\sqrt{3}}\ ,\qquad a=\pm\frac{a'}{\sqrt{3}}\ ;$$

ces valeurs de a, b, c, déterminent donc les huit sommets du plus grand parallélipipède rectangle inscrit à l'ellipsoïde, lequel, comme il est aisé de le voir, a pour ses diagonales les diamètres conjugués égaux de l'ellipsoïde, et est conséquemment semblable au parallélipipède formé par les plans tangens aux sommets de cet ellipsoïde.

De là, nous pouvons conclure que, de tous les ellipsoïdes inscrits à l'octaèdre qui a ses sommets aux sommets mêmes de l'ellipsoïde donné, le plus grand est celui qui est inscrit au parallélipipède rectangle dont les diagonales sont les diamètres conjugués égaux de ce premier ellipsoïde. L'ellipsoïde ainsi construit est semblable au premier, et son volume est au sien, comme 1 est à $3\sqrt{3}$.

Si l'on fait $c=b=a$, il vient

$$a=\frac{a'b'c'}{\sqrt{a'^2b'^2+b'^2c'^2+c'^2a'^2}}\ ;$$

le parallélipipède inscrit à l'ellipsoïde est alors un cube, et l'ellipsoïde inscrit à ce cube devient une sphère dont le rayon est cette valeur de a.