ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. F. FRANÇAIS

Analise transcendante. Mémoire sur les maxima et minima des fonctions à un nombre quelconque de variables; présenté à la I.re classe de l'institut, le 15 avril 1811

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 197-206
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__197_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur les maxima *et* minima *des fonctions à un nombre quelconque de variables ;*

Présenté à la 1.re classe de l'institut, le 15 avril 1811 ;

Par M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.

M. Lagrange a fait voir que les conditions assignées par Euler, pour l'existence des *maxima* et *minima* des fonctions à deux variables, étaient insuffisantes, et y a ajouté une nouvelle condition ; de plus, il a étendu cette théorie aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Je me propose de faire voir, dans ce mémoire, 1.° que la nouvelle condition introduite par M. Lagrange exige trop ; 2.° qu'outre les *maxima* et *minima* déterminés qu'on a considérés jusqu'à présent, il peut exister une infinité de *maxima* et *minima*, liés entre eux par une ou plusieurs relations entre les variables de la fonction proposée, et que ce cas a précisément lieu, lorsque les nouvelles conditions assignées par M. Lagrange sont en défaut.

1. Si $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n)$ devient un *maximum* ou un *minimum* ; pour les valeurs $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $x_3=a_3$, $\ldots. x_n=a_n$; on pourra représenter un état voisin de cette fonction par

$$\varphi(a_1+\xi_1, a_2+\xi_2, a_3+\xi_3, \ldots a_n+\xi_n) = A+(B_1\xi_1+B_2\xi_2+B_3\xi_3+\ldots+B_n\xi_n)$$
$$+\tfrac{1}{2}(C_{1,1}\xi_1^2+C_{2,2}\xi_2^2+C_{3,3}\xi_3^2+\ldots\ldots+C_{n,n}\xi_n^2)$$
$$+2(C_{1,2}\xi_1\xi_2+C_{1,3}\xi_1\xi_3+\ldots\ldots+C_{1,n}\xi_1\xi_n)$$
$$+2(C_{2,3}\xi_2\xi_3+C_{2,4}\xi_2\xi_4+\ldots\ldots+C_{2,n}\xi_2\xi_n)$$
$$+2(C_{3,4}\xi_3\xi_4+C_{3,5}\xi_3\xi_5+\ldots\ldots+C_{3,n}\xi_3\xi_n)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+2(C_{n-2,n-1}\xi_{n-2}\xi_{n-1}+C_{n-2,n}\xi_{n-2}\xi_n)+2C_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n$$
$$+\frac{1}{2.3}\Big(\ldots\ldots\Big)+\ldots\ldots \qquad (1)$$

Pour que le *maximum* ou *minimum* ait lieu, il faut que le second terme du second membre de cette équation soit nul, indépendamment des valeurs des accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, $\ldots\xi_n$, qui n'y entrent qu'à la première puissance. De plus, il faut, pour le *minimum*, que le troisième terme, qui contient les combinaisons deux à deux de ces accroissemens, soit toujours *positif*; il doit toujours être négatif pour le *maximum*.

2. En représentant ce troisième terme par $\tfrac{1}{2}V$ on peut mettre V sous la forme

$$V=\frac{(C_{1,1}\xi_1+C_{1,2}\xi_2+C_{1,3}\xi_3+\ldots\ldots+C_{1,n}\xi_n)^2+V_1}{C_{1,1}},$$

$$V_1=\frac{[(C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2)\xi_2+(C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})\xi_3+\ldots\ldots+(C_{1,1}C_{2,n}-C_{1,2}C_{1,n})\xi_n]^2+V_2]}{C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2},$$

$$\begin{aligned}V_2=(\{[(C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2)(C_{1,1}C_{3,3}-C_{1,3}^2)-(C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})^2]\xi_3+\ldots\ldots\\+[(C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2)(C_{1,1}C_{3,n}-C_{1,3}C_{1,n})-(C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})(C_{1,1}C_{2,n}-C_{1,2}C_{1,n})]\xi_n\}^2\\+V_3):[(C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2)(C_{1,1}C_{3,3}-C_{1,3}^2)-(C_{1,3}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})^2],\quad (*)\end{aligned}$$

(*) Pour la facilité typographique, on emploie ici le signe (:) pour l'équivalant de *divisé par*, comme dans les rapports géométriques ou par quotiens.

$$V_3=[(D\xi_4+\ldots.)^2+V_4]:\{[(C_{1,1}C_{2,2}-C^2_{1,2})(C_{1,1}C_{3,3}-C^2_{1,3})-(C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})^2][(C_{1,1}C_{2,2}-C^2_{1,2})(C_{1,1}C_{4,4}-C^2_{1,4})-(C_{1,1}C_{2,4}-C_{1,2}C_{1,4})^2]$$
$$-[(C_{1,1}C_{2,2}-C^2_{1,2})(C_{1,1}C_{3,4}-C_{1,3}C_{1,4})-(C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})(C_{1,1}C_{2,4}-C_{1,2}C_{1,4})]^2\}\,, \quad (*)$$

$$V_4=\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les coefficiens des accroissemens ξ_3, ξ_4, ..., dans V_3, V_4, ..., finissent par devenir très-compliqués ; mais, comme ils sont tous très-symétriques, il est aisé d'en assigner la loi, et de les représenter par des symboles indiquant leur génération et pouvant servir à calculer leurs valeurs. En représentant le coefficient de ξ_2, dans V_1, par $\alpha_{2,2}$, ceux de ξ_3, ξ_4, ... ξ_n deviennent $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, ... $\alpha_{2,n}$, et se déduisent d'une manière très-simple de $\alpha_{2,2}=C_{1,1}C_{2,2}-C^2_{1,2}$; il suffit, pour cela, de changer le 2, après la virgule, en $3, 4, \ldots n$, et de ne faire ce changement dans le second terme $C^2_{1,2}$ que pour un de ses facteurs ; de sorte qu'on aura $\alpha_{2,3}=C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3}$, $\alpha_{2,4}=C_{1,1}C_{2,4}-C_{1,2}C_{1,4}, \ldots \alpha_{2,n}=C_{1,1}C_{2,n}-C_{1,2}C_{1,n}$. On obtient ainsi

$$V_1=\frac{1}{\alpha_{2,2}}[(\alpha_{2,2}\xi_2+\alpha_{2,3}\xi_3+\alpha_{2,4}\xi_4+\ldots.+\alpha_{2,n}\xi_n)^2+V_2].$$

Au moyen de cette notation, V_2 devient

$$V_2=\frac{[(\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}-\alpha^2_{2,3})\xi_3+(\alpha_{2,2}\alpha_{3,4}-\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})\xi_4+\ldots.+(\alpha_{2,2}\alpha_{3,n}-\alpha_{2,3}\alpha_{2,n})\xi_n]^2+V_3}{\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}-\alpha^2_{2,3}}\,;$$

c'est-à-dire, de la même forme que V_1 exprimé en C. On pourra donc représenter les coefficiens de cette formule par $\beta_{3,3}$, $\beta_{3,4}$, $\beta_{3,5}$, ... $\beta_{3,n}$, et ces quantités se déduiront de $\beta_{3,3}$, comme $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{2,5}$, ... $\alpha_{2,n}$ se déduisent de $\alpha_{2,2}$, de sorte qu'on aura

---

(*) La lettre D est employée ici, par abréviation, pour représenter le dénominateur de la valeur de V_3 ; c'est-à-dire, la quantité qui suit le signe (:) dans cette valeur.

$$\beta_{3,4}=\alpha_{2,2}\alpha_{3,4}-\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\,,\ \beta_{3,5}=\alpha_{2,2}\alpha_{3,5}-\alpha_{2,3}\alpha_{2,5}\,,\ldots\beta_{3,n}$$
$$=\alpha_{2,2}\alpha_{3,n}-\alpha_{2,3}\alpha_{2,n}.$$

En continuant ce raisonnement de la même manière, on démontrera aisément que les termes V, V_1, V_2, V_3, ... V_{n-2}, V_{n-1}, peuvent être mis sous la forme suivante

$$V=\frac{1}{C_{1,1}}\{(C_{1,1}\xi_1+C_{1,2}\xi_2+C_{1,3}\xi_3+\ldots+C_{1,n}\xi_n)^2+V_1\}\,,$$

$$V_1=\frac{1}{\alpha_{2,2}}\{(\alpha_{2,2}\xi_2+\alpha_{2,3}\xi_3+\alpha_{2,4}\xi_4+\ldots+\alpha_{2,n}\xi_n)^2+V_2\}\,,$$

$$V_2=\frac{1}{\beta_{3,3}}\{(\beta_{3,3}\xi_3+\beta_{3,4}\xi_4+\beta_{3,5}\xi_5+\ldots+\beta_{3,n}\xi_n)^2+V_3\}\,,$$

$$V_3=\frac{1}{\gamma_{4,4}}\{(\gamma_{4,4}\xi_4+\gamma_{4,5}\xi_5+\gamma_{4,6}\xi_6+\ldots+\gamma_{4,n}\xi_n)^2+V_4\}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$V_{n-2}=\frac{1}{\psi_{n-1,n-1}}\{(\psi_{n-1,n-1}\xi_{n-1}+\psi_{n-1,n}\xi_n)^2+V_{n-1}\}\,,$$

$$V_{n-1}=\frac{1}{\omega_{n,n}}(\omega_{n,n}\xi_n)^2=\omega_{n,n}\xi_n^2\,;$$

où chaque espèce de symbole dérive de la précédente, comme les β dérivent des α, et ceux-ci des C.

En faisant les substitutions successives de ces quantités dans V, on obtient

$$V=\frac{1}{C_{1,1}}(C_{1,1}\xi_1+C_{1,2}\xi_1+C_{1,3}\xi_3+\ldots+C_{1,n}\xi_n)^2$$

$$+\frac{1}{C_{1,1}\alpha_{2,2}}(\alpha_{2,2}\xi_2+\alpha_{2,3}\xi_3+\alpha_{2,4}\xi_4+\ldots+\alpha_{2,n}\xi_n)^2$$

+

$$+\frac{1}{C_{1,1}\alpha_{2,2}\beta_{3,3}}(\beta_{3,3}\xi_3+\beta_{3,4}\xi_4+\beta_{3,5}\xi_5+\ldots\ldots+\beta_{3,n}\xi_n)^2$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{C_{1,1}\alpha_{2,2}\beta_{3,3}\ldots\psi_{n-1,n-1}}(\psi_{n-1,n-1}\xi_{n-1}+\psi_{n-1,n}\xi_n)^2$$

$$+\frac{\omega_{n,n}}{C_{1,1}\alpha_{2,2}\beta_{3,3}\ldots\psi_{n-1,n-1}}\xi_n^2. \qquad (2)$$

3. En faisant, pour abréger

$$U=B_1\xi_1+B_2\xi_2+B_3\xi_3+\ldots+B_n\xi_n\,,$$

les conditions, pour le *minimum*, se réduisent à

$$U=0\,, \qquad V>0\,,$$

et celles, pour le *maximum*, à

$$U=0\,, \qquad V<0\,;$$

le tout indépendamment des valeurs particulières que peuvent recevoir les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n. On conclut de là les deux séries de conditions suivantes :

$$B_1=0\,, \quad B_2=0\,, \quad B_3=0\,,\ldots.B_n=0\,, \qquad (4)$$

$$C_{1,1}\gtrless 0\,, \quad \alpha_{2,2}>0\,, \quad \beta_{3,3}>0\,,\ldots.\omega_{n,n}>0\,; \qquad (5)$$

le signe supérieur de $C_{1,1}$ ayant lieu pour le *minimum*, et le signe inférieur pour le *maximum*.

4. Les conditions (4) sont toujours nécessaires, pour l'existence du *maximum* ou *minimum*, et ne peuvent être remplacées par une autre série de conditions ; mais il n'en est pas de même des conditions (5), qui dépendent entièrement de la manière d'ordonner les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n entre eux. $C_{1,1}$ peut être remplacé par $C_{2,2}$, $C_{3,3}$, $C_{n,n}$, ... et recevoir autant de valeurs différentes qu'il y a de variables ; $\alpha_{2,2}$ peut recevoir autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons deux à deux entre les variables ; le nombre des valeurs différentes de $\beta_{3,3}$ est égal à celui de leurs combinaisons trois à trois ; et ainsi de suite.

Examinons, d'après cela, les différentes circonstances qui peuvent avoir lieu, dans ces deux séries de conditions.

5. Jusqu'à présent, on n'avait considéré les équations (4) que comme ayant lieu indépendamment les unes des autres, de manière que les valeurs des variables correspondant au *maximum* ou *minimum* étaient entièrement déterminées ; mais il s'en faut de beaucoup que cet état déterminé des variables soit nécessaire pour l'existence du *maximum* ou *minimum* ; nous allons voir, au contraire, qu'il peut avoir lieu, avec la plus grande indétermination possible entre les variables ; et nous examinerons comment le plus ou le moins d'indétermination entre elles influe sur les conditions (5).

6. Les équations (4) sont évidemment satisfaites par chacun des systèmes suivans

$$\lambda=0\,;\; B_1=l_1\lambda\,,\; B_2=l_2\lambda\,,\; B_3=l_3\lambda\,,\ldots\ldots B_n=l_n\lambda\,; \tag{6}$$

$$\lambda=0\,,\;\mu=0\,;\; B_1=l_1\lambda+m_1\mu\,,\; B_2=l_2\lambda+m_2\mu\,,\ldots\ldots B_n=l_n\lambda+m_n\mu\,; \tag{7}$$

$$\lambda=0\,,\;\mu=0\,,\;\varpi=0\,;\; B_1=l_1\lambda+m_1\mu+p_1\varpi\,,\; B_2=l_2\lambda+m_2\mu+p_2\varpi\,,\ldots\ldots\; B_n=l_n\lambda+m_n\mu+p_n\varpi\,; \tag{8}$$

. . . .

où λ, μ, ϖ,..., l_1, m_1, p_1,...l_2, m_2, p_2,...,... peuvent être des fonctions quelconques des variables qui entrent dans la fonction proposée.

Si l'on différentie les équations (6), pour en tirer les valeurs de $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{1,3}$,..... $C_{1,n}$, $C_{2,2}$, $C_{2,3}$, $C_{2,4}$,..... $C_{2,n}$, $C_{3,3}$,..... $C_{n,n}$, on trouve, entre ces quantités, les relations $\alpha_{2,2}=0$, $\alpha_{2,3}=0$, $\alpha_{2,4}=0$,.... $\alpha_{2,n}=0$, et par conséquent tous les β, γ,..... ψ, ω, s'évanouissent aussi. L'équation (2) se réduit donc à son premier terme, et les conditions (5) à $C_{1,1}\gtrless 0$. Les conditions du *minimum* ou *maximum* seront donc, dans ce cas,

$$\lambda=0\,,\quad C_{1,1}\gtrless 0\,; \tag{9}$$

et toutes les valeurs des variables satisfaisant à l'équation $\lambda=0$, donnent un *maximum* ou un *minimum*, selon que $C_{1,1}$ est *négatif* ou *positif*.

Cependant, dans ce cas, la valeur de V peut devenir nulle, en supposant entre les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n la relation

$$C_{1,1}\xi_1+C_{1,2}\xi_2+C_{1,3}\xi_3+\ldots\ldots+C_{1,n}\xi_n=0. \qquad (10)$$

On pourrait donc croire que la condition du *maximum* ou *minimum* n'est pas satisfaite généralement. Mais il est aisé de voir que l'équation (10) n'est autre chose que l'équation differentielle $l_1 d\lambda=0$, dans laquelle on a substitué pour dx_1, dx_2, dx_3, ... dx_n les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n; elle est donc une suite nécessaire de la supposition que nous avons faite, et fait voir que, pour toute autre relation entre les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n, la quantité V devient positive pour le *minimum* et négative pour le *maximum*. Le *maximum* ou *minimum* a donc réellement lieu pour toutes les valeurs des variables satisfaisant à la relation $\lambda=0$.

En différentiant de même les équations (7), pour en tirer les valeurs de $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, ... $C_{2,n}$, $C_{2,2}$, $C_{2,3}$, ... $C_{2,n}$, $C_{3,3}$, ..., .. $C_{n,n}$, on trouvera, entre ces quantités, les relations $\beta_{3,3}=0$, $\beta_{3,4}=0$, $\beta_{3,5}=0$, ... $\beta_{3,n}=0$, et tous les γ, δ, ... ψ, ω, s'évanouiront en même temps. L'équation (2) se réduira à ses deux premiers termes, et les conditions du *minimum* ou *maximum* deviendront

$$\lambda=0\ ,\ \mu=0\ ,\ C_{1,1}\gtrless 0\ ,\ \alpha_{2,2}>0. \qquad (11)$$

Toutes les valeurs des variables, satisfaisant aux relations $\lambda=0$, $\mu=0$, donneront donc un *minimum* ou *maximum*, si les deux dernières conditions (11) sont satisfaites.

La valeur de V peut devenir nulle, dans ce cas, et faire présumer que le *minimum* ou *maximum* n'a pas lieu généralement, en supposant entre les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n les relations simultanées

$$\left.\begin{aligned} C_{1,1}\xi_1+C_{1,2}\xi_2+C_{1,3}\xi_3+\ldots+C_{1,n}\xi_n=0\ ,\\ \alpha_{2,2}\xi_2+\alpha_{2,3}\xi_3+\alpha_{2,4}\xi_4+\ldots+\alpha_{2,n}\xi_n=0\ ; \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

mais il n'est pas difficile de se convaincre que le système de ces deux équations équivaut à celui des deux équations différentielles $d\lambda=0$, $d\mu=0$, dans lesquelles on aurait substitué les accroissemens ξ_1, ξ_2,

$\xi_3, \ldots \xi_n$ à la place de dx_1, dx_2, $dx_3, \ldots dx_n$; il est donc encore une suite nécessaire de notre supposition, et fait voir que le *minimum* ou *maximum* a lieu pour toutes les valeurs des variables satisfaisant aux relations (11).

On trouverait, de la même manière, que les conditions du *minimum* ou *maximum*, pour le système (8) deviennent

$$\lambda=0\ ,\ \mu=0\ ,\ \varpi=0\ ;\ C_{1,1} \gtrless 0\ ,\ \alpha_{2,2}>0\ ,\ \beta_{3,3}>0. \qquad (13)$$

Il n'est pas difficile maintenant d'étendre ces conclusions à un nombre quelconque de facteurs qui affecteraient les valeurs de B_1, B_2, $B_3, \ldots B_n$.

7. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les facteurs λ, μ, $\varpi, \ldots$ affectaient tous les termes de U; ce qui a fait disparaître plusieurs quarrés en entier, dans la valeur de V. Mais, si l'on suppose que ces facteurs n'affectent que quelques termes de U, il ne disparaîtra plus de quarrés entiers dans la valeur de V, mais seulement quelques-uns de leurs termes. Ainsi, si l'on a

$$\lambda=0\ ,\ \mu=0\ ;\ B_1=l_1\lambda\ ,\ B_2=l_2\lambda\ ,\ B_3=m_3\mu\ ,\ B_4=m_4\mu\ ,$$
$$B_5=m_5\mu\ ,\ B_6=0\ ,\ B_7=0, \ldots B_n=0\ ; \qquad (14)$$

on trouvera $\alpha_{2,2}=0$, $\alpha_{4,4}=0$, $\alpha_{4,5}=0$, $\beta_{5,5}=0$.

Il se présente ici une difficulté très-sérieuse, qu'il est nécessaire de lever pour assurer notre théorie. En substituant les valeurs précédentes dans celles de V, tous les termes après le premier deviennent infinis par le facteur commun $\frac{1}{\alpha_{2,2}}$; on ne peut donc plus rien conclure de cette valeur, pour l'existence du *maximum* ou *minimum*. Dans ce cas, il faut avoir recours à l'observation que nous avons faite au n.° 4, et ordonner les accroissemens ξ_1, ξ_2, $\xi_3, \ldots \xi_n$ entre eux, de manière que les premiers termes des quarrés qui composeront le nouveau développement de V ne s'évanouissent pas ; (ce que l'on démontre aisément être toujours possible) ; alors il n'y a plus, dans les quarrés successifs qui forment le développement de V, que quelques termes qui s'évanouissent. Les conditions (5) que l'on tire de ce nouveau développement de V subsisteront donc en entier ; la seule différence qu'il y aura, dans ce cas, consiste en ce que $\alpha_{2,2}$, $\beta_{3,3}$, $\gamma_{4,4}$,..... ne peuvent plus recevoir autant de valeurs différentes que nous leur en avons assignées au n.° 4. La réduction du nombre de ces valeurs dépend de celui des facteurs, et de celui des coefficiens de V affectés par chacun d'eux.

Le même raisonnement et des conclusions analogues sont applicables au cas suivant et à tous les autres semblables.

$$\lambda=0\,,\ \mu=0\,,\ \varpi=0\,;\ B_1=l_1\lambda+m_1\mu,\ B_2=l_2\lambda+m_2\mu\,,\ B_3=l_3\lambda+m_3\mu,$$
$$B_4=l_4\lambda+p_4\varpi\,,\ B_5=m_5\mu+p_5\varpi\,,\ B_6=0\,,\ B_7=0,\ldots.\ B_n=0. \quad (15)$$

. . . .

8. Il résulte de cette théorie, 1.° qu'outre les *maxima* et les *minima* déterminés des fonctions à plusieurs variables, qu'on a considérés jusqu'à présent, il peut exister une infinité de *maxima* et *minima* indéterminés, liés entre eux par une ou plusieurs relations entre les variables de la fonction proposée ; 2.° que, pour l'existence de ces *maxima* ou *minima* indéterminés, il faut que les coefficiens de la valeur de U s'évanouissent, soit par un ou plusieurs facteurs communs à tous, soit par un ou plusieurs facteurs affectant seulement quelques-uns d'entre eux, tandis que les coefficiens restans peuvent s'évanouir d'eux-mêmes ; 3.° que, pour le premier des deux cas précédens, les conditions (5) se réduisent à la première, quand tous les coefficiens de la valeur de U s'évanouissent, par un seul facteur commun ; et qu'elles se réduisent aux deux premières, aux trois premières, etc., quand tous les coefficiens s'évanouissent par deux facteurs, trois facteurs, etc., communs à tous ; 4.° que, dans le second cas, toutes les conditions (5) ont lieu, mais qu'elles ne peuvent plus alors être remplacées par le nombre de conditions équivalentes que nous avons indiquées au n.° 4 ; 5.° enfin, que cette théorie est nécessaire pour compléter celle des *maxima* et *minima* des fonctions de plusieurs variables.

9. J'ai donné, dans une note précédente, un essai de cette théorie, appliquée aux surfaces courbes (*), et j'y ai fait voir qu'il peut y

(*) Voyez la page 132 de ce volume.

avoir sur les surfaces une infinité de *maxima* et *minima* indéterminés, liés entre eux par une courbe continue. En l'appliquant à la mécanique, on peut trouver des fonctions du temps qui deviennent des *maxima* ou *minima*, pour tous les points d'une surface courbe ou d'une courbe à double courbure, selon que tous les coefficiens de U s'évanouiront, par un ou par deux facteurs communs.

Metz, le 2 mai 1810.