FRANÇAIS

Géométrie. Démonstration de deux théorèmes de polyédrométrie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 189-191

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__189_1>

part en part, et qu'enfin plusieurs des faces soient bornées par des polygones intérieurs au nombre de p, p', p'',.... pour chacune d'elles respectivement ; on aura

$$F+S=A+2(i-o+1)+(p+p'+p''+\ldots.) \;;$$

et conséquemment la condition nécessaire et suffisante pour que le polyèdre ne fasse pas exception au théorème d'Euler, sera

$$2i+p+p'+p''+\ldots.=2o.$$

GÉOMÉTRIE.

Démonstration de deux théorèmes de polyédrométrie ;

Par M. Français, professeur de mathématiques à l'école impériale de l'artillerie et du génie.

En désignant par S le nombre des sommets ou angles solides d'un polyèdre quelconque ; par A le nombre de ses arêtes ; par F le nombre de ses faces ; par P la somme des angles plans de ces mêmes faces ; et enfin par D un angle droit ; on a ces deux théorèmes d'Euler

$$S+F=A+2 \;; \quad (1) \qquad P=4D(S-2). \quad (2) \qquad (*)$$

(*) Voyez le précédent mémoire.

J. D. G.

Soient représentées, de plus, par S_1 la somme des angles solides ou polyèdres, et par A_1 la somme des angles dièdres. (*)

Cela posé, soit p un angle polyèdre quelconque, formé par un nombre n de faces ; soit s la somme des angles dièdres que ces faces forment consécutivement, et par conséquent $\frac{s}{2}$ la somme des inclinaisons consécutives de ces faces (**) ; on aura

$$p=\frac{s}{2}-2D(n-2). \qquad (3) \qquad (***)$$

Si l'on évalue de la même manière tous les angles solides d'un polyèdre, et qu'on les ajoute ensemble ; la somme de tous les p deviendra S_1 ; celle de tous les s deviendra $2A_1$ (car chacun des angles dièdres se trouve répété deux fois) ; la somme des n, par la même raison, deviendra $2A$; et le nombre -2, se trouvant répété autant qu'il y a d'angles solides, deviendra $-2S$; ainsi on aura

$$S_1=A_1-2D(2A-2S)=A_1-4D(A-S). \qquad (4)$$

Cette équation, mise sous la forme

$$S.4D-S_1=A.4D-A_1\ , \qquad (5)$$

exprime une propriété bien simple et bien remarquable des polyèdres,

---

(*) Je distingue l'angle dièdre de l'inclinaison des deux plans qui forment cet angle : cette inclinaison n'est égale qu'à la moitié de l'angle dièdre qui, pour l'uniformité, doit, comme les angles polyèdres, être mesuré par la portion de surface sphérique qu'il intercepte. Or, un angle dièdre équivaut à deux angles trièdres, ayant chacun pour mesure l'inclinaison des deux plans qui forment l'angle dièdre.

Note de M. Français.

(**) Voyez la précédente note.

(***) Voyez la *Géométrie* de M. Legendre, liv. VII, prop. XXIV.

J. D. G.

qui peut être énoncée ainsi : *la somme des supplémens (à une demi-sphère) des angles solides d'un polyèdre est égale à la somme des supplémens (à une demi-sphère) des angles dièdres de ce polyèdre.*

Si, dans l'équation (4), on substitue, pour $A-S$, sa valeur $F-2$, donnée par l'équation (1), elle devient

$$A_1-S_1=4D(F-2) \; ; \qquad (6)$$

et fait voir que *l'excès de la somme des angles dièdres d'un polyèdre sur celle de ses angles solides est égal à autant de fois quatre angles droits que le polyèdre a de faces moins deux.* Cet excès ne dépend donc que du nombre des faces, de même que la somme des angles plans P ne dépend que du nombre des sommets ou angles solides.

Les équations (1), (2), (6) forment un système de relations, entre les cinq quantités A, S, F, P, A_1-S_1, au moyen duquel deux quelconques d'entre elles étant données, on pourra déterminer les trois autres.

N. B. Les deux théorèmes que je viens de démontrer sont dus à feu mon frère, qui y est parvenu par des sommations longues et pénibles. La démonstration que je viens d'en donner semble permettre de les introduire dans les élémens de géométrie. (*)

(*) Le dernier de ces deux théorèmes dépendant de celui d'Euler, doit être, comme lui, passible de toutes les diverses exceptions mentionnées par M. Lhuilier dans le mémoire précédent.

J. D. G.