ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. F. FRANÇAIS

Analise transcendante. Examen d'un cas singulier, qui nécessite quelques modifications dans la théorie des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 132-137
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__132_1>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1812-1813, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANALISE TRANSCENDANTE.

Examen d'un cas singulier, qui nécessite quelques modifications dans la théorie des maxima *et des* minima *des fonctions de plusieurs variables;*

Par M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.

Soit

$$z=\varphi(x,y)\ ,$$

et soient posés, pour abréger

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=p\ ;\quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=q\ ,\quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=r\ ,\quad \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=s\ ,\quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=t.$$

Les conditions que l'on prescrit ordinairement, pour le *maximum* ou le *minimum* de la fonction z, sont

$$\left.\begin{array}{l} p=0\ , \\ q=0\ , \end{array}\right\}\ (1) \qquad rt-s^2>0\ ; \qquad (2)$$

ce qui assujettit r et t à être de mêmes signes ; et alors le *maximum* ou le *minimum* a lieu, suivant qu'on a $r<0$ ou $r>0$.

Je me propose ici de faire voir que la condition (2) exige trop ; et que, pourvu que $rt-s^2$ ne soit pas négatif, cette quantité peut être nulle, sans que le *maximum* ou le *minimum* cesse d'avoir lieu.

La règle en usage pour la détermination des *maxima* et *minima* ne se rapporte qu'à des points *isolés* : elle est en défaut, lorsqu'il s'agit de déterminer une suite de points *maxima* ou *minima*, formant une courbe continue. On se convaincra aisément de la vérité de ce que j'avance, par l'exemple suivant : si l'on fait tourner une ellipse autour d'une droite parallèle au grand axe, considérée comme axe des z, le sommet de l'ellipse décrira un cercle dont les coordonnées parallèles à l'axe des z seront évidemment des *maxima* ; cependant on trouve, pour ce cas (comme pour tous les cas semblables) $rt-s^2=0$. Je vais expliquer la raison de cette singularité, et compléter ainsi les conditions qui doivent indiquer l'existence des *maxima* et *minima*.

La première condition pour l'existence d'un *maximum* ou d'un *minimum* est d'avoir à la fois $p=0$, $q=0$; ces deux équations déterminent les coordonnées x, y, correspondant au *maximum* ou au *minimum* cherché, lorsqu'il ne s'agit que d'un ou de plusieurs points isolés. Mais, lorsqu'il doit y avoir une infinité de *maxima* ou *minima*, formant une courbe continue, les deux équations $p=0$, $q=0$ doivent être de nature à être satisfaites en même temps, sans quoi il n'y aurait plus qu'un nombre limité de solutions ; il faut donc que ces deux équations aient lieu, par un facteur qui leur soit commun ; ainsi, on devra avoir

$$p=PF \quad , \qquad q=QF \; ; \qquad\qquad (3)$$

F étant le facteur commun qui, égalé à zéro, remplira à la fois les deux conditions (1) ; et P, Q, F pouvant être des fonctions quelconques de x et y.

L'équation qui déterminera les *maxima* et *minima* sera donc

$$F=0\;; \qquad (4)$$

on tirera ensuite des équations (3), par la différentiation, en ayant égard à l'équation (4)

$$r=P\left(\frac{dF}{dx}\right),\; s=P\left(\frac{dF}{dy}\right),\; s=Q\left(\frac{dF}{dx}\right),\; t=Q\left(\frac{dF}{dy}\right)\;; \qquad (5)$$

retranchant du produit des deux équations extrèmes le produit des deux autres, il viendra, en réduisant

$$rt-s^2=0\;; \qquad (6)$$

la condition (2) ne sera donc pas satisfaite. Examinons si néanmoins, dans ce cas, le *maximum* ou le *minimum* ne pourrait pas avoir lieu.

Soient a, b des valeurs de x, y qui rendent z *maximum* ou *minimum*; et soient respectivement α, β des variations simultanées et très-petites de ces quantités, répondant à une valeur de z voisine de ce *maximum* ou *minimum*. A cause des équations (1), on aura simplement

$$z=\varphi(a+\alpha,\, b+\beta)=\varphi(a,b)+\tfrac{1}{2}(r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2)+\ldots\ldots \qquad (7)$$

Il faut pour le *maximum*, que cette quantité soit toujours plus petite que $\varphi(a,b)$ et pour le *minimum*, qu'elle soit toujours plus grande, quels que soient d'ailleurs les signes de α, β, pourvu que ces deux variations ne cessent pas d'être comprises dans des limites très-resserrées. On conclut facilement de là qu'il faut que la quantité

$$r\alpha^2+2\alpha s\beta+t\beta^2 \qquad (8)$$

conserve toujours le même signe négatif s'il s'agit du *maximum*, et positif s'il s'agit du *minimum*; et on démontre que la première condition est toujours satisfaite lorsqu'on a, à la fois

$$r<0\;, \qquad rt-s^2>0\;;$$

et que la seconde l'est, si l'on a, au contraire,

$$r>0\;, \qquad rt-s^2>0.$$

Tout cela est parfaitement exact, et ces conditions sont en effet suffisantes pour que le *maximum* ou le *minimum* ait lieu; mais il faut ajouter que, si elles sont *suffisantes*, elles ne sont pas néanmoins toujours *nécessaires*; et que la fonction (8) sera également de signe invariable, lorsqu'on aura simplement

$$rt - s^2 = 0\ ,$$

puisqu'alors elle se trouvera être un quarré, pris en *moins* ou en *plus*, suivant que r sera *négatif* ou *positif*.

On doit pourtant remarquer que, dans ce cas, la fonction (8) peut devenir nulle, pour des valeurs particulières de α et β; et il est même aisé de voir qu'elle sera nulle, en effet, lorsque ces deux variations seront liées entre elles par la relation

$$r\alpha + s\beta = 0\ , \qquad (9)$$

équivalente alors à $s\alpha + t\beta = 0$. On pourrait donc croire, d'après cela, que, lorsque l'équation (6) a lieu, les conditions, soit du *maximum* soit du *minimum*, cessent d'être satisfaites; mais il est aisé de se convaincre du contraire. Si, en effet, on élimine P entre les deux premières équations (5), il viendra

$$r\left(\frac{dF}{dy}\right) - s\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0\ ; \qquad (10)$$

équation qui, combinée avec l'équation (9), donnera

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)\alpha + \left(\frac{dF}{dy}\right)\beta = 0\ ; \qquad (11)$$

équation qui fait voir que α, β sont les coordonnées de la tangente à la courbe *maximum* ou *minimum*, et que, dans ce cas, z doit simplement se réduire à $\varphi(a, b)$. La fonction (8), en vertu de la condition (6) reste donc constamment positive, dans le cas du *minimum*, et négative, dans le cas du *maximum*, pour tous les points qui ne sont pas situés sur la courbe *minimum* ou *maximum*. Les *maxima* ou *minima* peuvent donc exister, quoique la condition (2) n'ait pas lieu; et la précédente analise prouve qu'il en est ainsi, en effet, pour une suite de *maxima* ou *minima*, formant une courbe continue.

Nous tirerons de tout cela les conclusions suivantes, savoir : 1.° que les conditions que l'on donne ordinairement pour celles des *maxima* et *minima* des surfaces courbes sont incomplettes, et ne peuvent donner que des points isolés jouissant de cette propriété ; 2.° que pour trouver une suite de *maxima* ou *minima*, liés entre eux par une courbe continue, il faut que p et q s'évanouissent, par un facteur commun ; 3.° que $rt-s^2=0$ est alors la condition nécessaire pour l'existence d'une courbe *maximum* ou *minimum* ; 4.° qu'enfin le cas que nous venons de considérer est un complément nécessaire à la théorie des *maxima* et *minima* des surfaces courbes (*)

Il ne serait pas difficile d'étendre cette théorie aux fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables ; mais comme, pour chaque nouvelle variable, il y aurait une condition (2) de plus, il faudrait appliquer à chacune de ces conditions des raisonnemens analogues à ceux que nous avons faits sur la condition (2). De plus, la condition (1) serait composée d'autant d'équations qu'il y aurait de variables indépendantes. Supposons que ces équations soient

$$p_1=0\;,\quad p_2=0\;,\quad p_3=0\;,\quad p_4=0\;,\ldots.. \qquad (12)$$

(*) Il y a ici une distinction à établir. Si, suivant les notions admises jusqu'à présent, le caractère de l'ordonnée *maximum* ou *minimum* est que les ordonnées environnantes soient *toutes plus petites* ou *toutes plus grandes* que celle-là, les ordonnées de la courbe considérée ici par M. Français ne seront point proprement des *maxima* ou *minima* ; mais si, comme il paraît plus convenable de le faire, on exige seulement de l'ordonnée *maximum* ou *minimum* qu'*aucune* des ordonnées environnantes ne soit *plus grande*, ou qu'*aucune* de ces ordonnées ne soit *plus petite* qu'elle, alors les ordonnées des différens points de la courbe *maximum* ou *minimum* deviendront, en effet, de véritables *maxima* ou *minima*.

Au surplus, quelque parti qu'on prenne à cet égard, la discussion dans laquelle s'est engagé M. Français, n'en conservera pas moins tout son intérêt.

Il convient peut-être de rappeler ici que, si la condition $rt-s^2=0$ ne se trouvait remplie que parce qu'en vertu de l'équation $F=0$, on aurait à la fois $r=0$, $s=0$, $t=0$; on ne pourrait alors rien prononcer sans avoir soumis à la discussion les coefficiens différentiels des ordres ultérieurs.

J. D. G.

elles

elles pourront être toutes essentiellement distinctes, auquel cas on n'aura qu'un certain nombre de *maxima* ou *minima* absolument déterminé ; ou bien elles pourront être rangées en plusieurs classes dont une seule renfermant des équations essentiellement distinctes, tandis que, dans chacune des autres, toutes les équations pourront être satisfaites par l'égalité à zéro d'un seul facteur qui leur sera commun. Il serait intéressant d'examiner l'influence de ces diverses circonstances sur les conditions analogues à la condition (2) ; ce serait alors seulement que la théorie des *maxima* et *minima*, dans les fonctions de plusieurs variables, pourrait être regardée comme complète.