ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Analise transcendante. Second mémoire sur les facultés numériques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 114-132

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__114_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Second mémoire sur les facultés numériques ; (*)

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. Les produits dont les facteurs procèdent suivant une progression arithmétique, et que j'ai nommés *Facultés numériques*, n'ont pas été inutiles au progrès de l'analise. Ils ont servi à exprimer, par un seul terme, et à trouver, d'une manière fort simple, les valeurs numériques de toutes les fonctions transcendantes qui dépendent du cercle, aussi bien que quelques classes, très-nombreuses, d'intégrales définies. Il s'en faut de beaucoup que cette mine soit épuisée. Le langage de l'analise transcendante a été borné, jusqu'ici, aux seules idées de fonctions exponentielles et de fonctions circulaires ; et il est naturel de considérer cette extrême pénurie, comme une des causes principales de l'impossibilité où nous nous trouvions de résoudre le plus grand nombre des problèmes qui se présentaient à nous. Les facultés numériques viennent, fort à propos, pour enrichir ce langage, et pour étendre ainsi le domaine de la science.

2. J'ai prouvé, dans un premier mémoire, que toute faculté était réductible à la forme très-simple $1^{y|1}$ ou $y!$; mais, comme les facultés de cette dernière forme ne dispensent pas de la considération des autres ; afin de faire correspondre une différence de dénomination à une différence de symboles, j'appellerai, à l'avenir, *Factorielles* les fonctions de la forme générale $a^{y|r}$, et je réserverai exclusivement le nom de *Facultés numériques*, ou simplement de *Facultés*, pour

(*) Voyez la page première de ce volume.

désigner les fonctions de la forme $1^{y|1}$ ou $y!$, auxquelles se réduisent les premières, dans le cas particulier où l'on a $a=1$ et $r=1$.

3. La factorielle $a^{m|r}$ ou $a(a+r)(a+2r)(a+3r)\ldots\ldots(a+mr-r)$ peut toujours être développée en une série de la forme

$$a^m+Aa^{m-1}r+Ba^{m-2}r^2+\ldots\ldots+Mr^m.$$

J'ai fait voir ailleurs (*) que, dans le cas d'un exposant infiniment petit, les coefficiens A, B, C,..... devenaient ces nombres même dont l'usage, dans le calcul sommatoire, a été remarqué par leur illustre inventeur Jacques Bernoulli. Mettant dm à la place de m, et désignant par $-B_1\mathrm{d}m$, $-B_2\mathrm{d}m$, $-B_3\mathrm{d}m$,.... les valeurs que reçoivent les coefficiens A, B, C,...., dans le cas d'un exposant infiniment petit, on aura

$$\tfrac{1}{2}=B_1\ ,$$
$$\tfrac{1}{3}=B_1-2B_2\ ,$$
$$\tfrac{1}{4}=B_1-3B_2+3B_3\ ,$$
$$\tfrac{1}{5}=B_1-4B_2+6B_3-4B_4\ ,$$

et en général

$$\frac{1}{n+1}=B_1-\frac{n}{1}B_2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}B_3-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}B_4+\ldots\pm\frac{n}{1}B_n.$$

En faisant le calcul de ces nombres, on verra que tous ceux d'un indice *impair*, tels que B_1, B_3, B_5,.... sont égaux à *zéro*, à l'exception du premier B_1 qui est $\frac{1}{2}$; et que tous ceux d'un indice *pair*, savoir B_2, B_4, B_6,.... sont alternativement *positifs* et *négatifs*. Leurs valeurs sont

$$B_2=+\tfrac{1}{12},\ B_4=-\tfrac{1}{120},\ B_6=+\tfrac{1}{252},\ B_8=-\tfrac{1}{240},\ldots..$$

4. Les nombres de Bernoulli nous mènent naturellement aux deux fonctions que j'ai désignées par Λt et Γt. La première Λt, par laquelle nous exprimons la série

$$B_1t+B_2t^2+B_4t^4+B_6t^6+\ldots.,$$

sert à trouver la première dériver de la factorielle $a^{y|r}$, dans laquelle nous regardons l'exposant y comme la variable de la fonction. En faisant, pour abréger, $a+ry=t$, on a

---

(*) Voyez *Elémens d'arithmétique universelle*, page 360, n.os 557 et suivans.

$$\mathrm{D}(a^{y|r})=a^{y|r}\left(\mathrm{Log.}t-\Lambda\frac{r}{t}\right). \quad (*)$$

La seconde Γt, par laquelle nous représentons la série

$$B_2t+\tfrac{1}{3}B_4t^3+\tfrac{1}{5}B_6t^5+\tfrac{1}{7}B_8t^7+\ldots\ldots,$$

est liée avec la première, par l'équation linéaire très-simple

$$B_1t+t^2\mathrm{D}\Gamma t=\Lambda t.$$

Elle est essentielle pour trouver le logarithme naturel de la factorielle $a^{y|r}$. On a, en effet,

$$\mathrm{Log.}(a^{y|r})=-y(1-\mathrm{Log.}a)+\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Log.}\frac{t}{a}-\Gamma\frac{r}{a}+\Gamma\frac{r}{t}.$$

5. Le logarithme naturel de la factorielle $a^{y|r}$ que, pour abréger, nous représenterons simplement par Y, est remarquable par la forme de ses dérivées successives. On a d'abord

$$\mathrm{D}\mathrm{Log}\, Y=\mathrm{Log}.t-\Lambda\frac{r}{t}:$$

sur quoi on peut remarquer que c'est l'expression de la somme de fractions

$$\frac{r}{a}+\frac{r}{a+r}+\frac{r}{a+2r}+\ldots\ldots+\frac{r}{t-r},$$

augmentée de $\mathrm{Log.}a-\Lambda\frac{r}{a}$. Si ensuite, pour abréger, on désigne simplement par $\Sigma\frac{r^n}{t^n}$, la somme infinie de fractions

$$\frac{r^n}{t^n}+\frac{r^n}{(t+r)^n}+\frac{r^n}{(t+2r)^n}+\frac{r^n}{(t+3r)^n}+\ldots\ldots,$$

on aura, en faisant toujours $a^{y|r}=Y$,

$$\mathrm{D}^2\mathrm{Log.}X=+\quad\Sigma\frac{r^2}{t^2},$$

$$\mathrm{D}^3\mathrm{Log.}Y=-\quad 2\Sigma\frac{r^3}{t^3},$$

$$\mathrm{D}^4\mathrm{Log.}Y=+\quad 6\Sigma\frac{r^4}{t^4},$$

(*) La lettre D est employée ici comme signe de dérivation ; en sorte qu'en général

$$\mathrm{D}\varphi(x)=\frac{\mathrm{d}.\varphi(x)}{\mathrm{d}x}.$$

$$\mathrm{D}^5\mathrm{Log}.Y = -\ \ 24\Sigma\frac{r^5}{t^5}\ ,$$

$$\mathrm{D}^6\mathrm{Log}.Y = +120\Sigma\frac{r^6}{t^6}\ ,$$

. . . .

6. Ces sommes de fractions se trouvent facilement, par les formules connues. On a, en effet,

$$\Sigma\frac{r^2}{t^2} = \frac{r}{t} + \frac{r^2}{2t^2} + 2B_2\frac{r^3}{t^3} + \ 4B_4\frac{r^5}{t^5} + \ 6B_6\frac{r^7}{t^7} + \ldots,$$

$$\Sigma\frac{r^3}{t^3} = \frac{r^2}{2t^2} + \frac{r^3}{2t^3} + 3B_2\frac{r^4}{t^4} + 10B_4\frac{r^6}{t^6} + 21B_6\frac{r^8}{t^8} + \ldots,$$

$$\Sigma\frac{r^4}{t^4} = \frac{r^3}{3t^3} + \frac{r^4}{2t^4} + 4B_2\frac{r^5}{t^5} + 20B_4\frac{r^7}{t^7} + 56B_6\frac{r^9}{t^9} + \ldots,$$

. . . .

Toutes ces séries peuvent être regardées comme convergentes à volonté, attendu qu'on n'aura qu'à calculer à part quelques-uns des premiers termes de $\Sigma\frac{r^n}{t^n}$, et employer ensuite la formule, pour trouver la somme des autres. Lorsque, dans ces formules, on suppose à r une valeur *imaginaire*, on est conduit à une suite de théorèmes du plus grand intérêt dans l'analise, et sur lesquels nous reviendrons en son lieu.

7. En désignant par la série

$$Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots\ldots,$$

ordonnée suivant les puissances de l'exposant y, le logarithme naturel de la factorielle $a^{y|r}$, les coefficiens A, B, C, D,..... seront ce que deviennent les dérivées de ce logarithme, dans le cas de $y=0$, ou de $t=a$, respectivement divisées par 1, 2, 6, 24, 120,.... On aura ainsi

$$A = \mathrm{Log}\,a - \Lambda\frac{r}{a}\ ;$$

$$B = +\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{r^2}{a^2}\ ,$$

$$C = -\tfrac{1}{3}\Sigma\frac{r^3}{a^3}\ ,$$

$$D=+\tfrac{1}{4}\Sigma\frac{r^4}{a^4}\ ,$$

$$E=-\tfrac{1}{5}\Sigma\frac{r^5}{a^5}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

De Log.$a^{y|r}$ on passe facilement à cette factorielle elle-même ; et, si l'on représente par

$$1+A'y+B'y^2+C'y^3+D'y^4+\ldots\ldots$$

la série qui l'exprime, on aura

$$A'=A\ ,$$
$$2B'=AA'+2B\ ,$$
$$3C'=AB'+2BA'+3C\ ,$$
$$4D'=AC'+2BB'+3CA'+4D\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

8. On peut remarquer, au sujet des nombres de Bernoulli, que les séries que nous allons désigner, et dont nous ferons un usage fréquent, dans le calcul sommatoire, sont toutes parfaitement sommables. En faisant, pour abréger, $e^y=x$, on a

$$B_2.\frac{y^2}{1.2}+B_4.\frac{y^4}{1.2.3.4}+B_6.\frac{y^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots=\text{Log.}\frac{e^{\frac{1}{2}y}-e^{-\frac{1}{2}y}}{y}\ ,$$

$$B_2.\frac{y}{1}+B_4.\frac{y^3}{1.2.3}+B_6.\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots=-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}.\frac{x+1}{x-1}\ ,$$

$$B_2\quad+B_4.\frac{y^2}{1.2}+B_6.\frac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots=+\frac{1}{y^2}-\frac{x}{(x-1)^2}\ ,$$

$$B_4.\frac{y}{1}+B_6.\frac{y^3}{1.2.3}+B_8.\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots=-\frac{2}{y^3}+\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}\ ,$$

$$B_4\quad+B_6.\frac{y^2}{1.2}+B_8.\frac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots=+\frac{6}{y^4}-\frac{x(x^2+4x+1)}{(x-1)^4}\ ,$$

$$B_6.\frac{y}{1}+B_8.\frac{y^3}{1.2.3}+B_{10}.\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots=-\frac{24}{y^5}+\frac{x(x^3+11x^2+11x+1)}{(x-1)^5}$$

$$B_6\quad+B_8.\frac{y^2}{1.2}+B_{10}.\frac{y^4}{1.2.3.4}+\ldots=+\frac{120}{y^6}-\frac{x(x^4+26x^3+66x^2+26x+1)}{(x-1)^6}\ ,$$

$$B_8.\frac{y}{1}+B_{10}.\frac{y^3}{1.2.3}+B_{12}.\frac{y^5}{1.2.3.4.5}+\ldots=-\frac{720}{y^7}+\frac{x(x^5+57x^4+302x^3+302x^2+57x+1)}{(x-1)^7}\ ,$$

et ainsi des autres. La loi que suivent les coefficiens des polynômes fonctions de x qui entrent dans les seconds membres se présente assez naturellement; on a, par exemple, pour le dernier

$$\begin{aligned} 57&=5.1+2.26, \\ 302&=4.26+3.66, \\ 302&=3.66+4.26, \\ 57&=2.26+5.1; \end{aligned}$$

et ainsi des autres. La *seconde* de ces séries a été donnée par EULER (*Inst. calculi differentialis*, part. II, chap. VI, §. 163.). De celle-ci j'ai déduit la *première*, par intégration, et les autres, par des différentiations successives.

9. Si, dans la première de ces séries, on suppose $y=2\varphi\sqrt{-1}$, on est conduit à celle qui suit:

$$\text{Log.}\frac{\varphi}{\text{Sin.}\varphi}=4B_2.\frac{\varphi^2}{1.2}-16B_4.\frac{\varphi^4}{1.2.3.4}+64B_6.\frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6}-\ldots.$$

Cette série, peu connue, est peut-être la plus convergente de toutes celles qui font connaître le logarithme du sinus d'un angle proposé. La supposition de y imaginaire, appliquée aux autres séries, conduit aussi à des théorèmes fort intéressans.

10. Ayant trouvé le logarithme naturel de la factorielle $a^{y|r}$ égal à

$$-y(1-\text{Log.}a)+\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{2}\right)\text{Log.}\frac{t}{a}-\Gamma\,\frac{r}{a}+\Gamma\,\frac{r}{t}\ ,$$

la lettre t désignant toujours $a+ry$, il importe d'examiner ce que devient cette expression, dans le cas d'un exposant *imaginaire*. Soit donc $y=p+iq$, la lettre i désignant la racine quarrée de *moins un*; on aura

$$\text{Log.}(a^{p+iq|r})=(p+iq)(\text{Log.}a-1)+\left(p-\frac{1}{2}+\frac{a}{r}+iq\right)\text{Log.}\frac{a+pr+iqr}{a}$$
$$-\Gamma\,\frac{r}{a}+\Gamma\,\frac{r}{a+pr+iqr}.$$

Ici, si l'on fait

$$k^2=(a+pr)^2+(qr)^2\ ,$$
$$\text{Tang.}\varphi=\frac{qr}{a+pr}\ ;$$

on aura

$$a+pr+iqr=k(\text{Cos.}\varphi+i\text{Sin.}\varphi)\ ,$$
$$\text{Log.}(a+pr+iqr)=\text{Log.}\,k+i\varphi\ ,$$

le logarithme de $a^{p+iq|r}$ prendra donc la forme d'un binôme $M+iN$, dans lequel on aura

$$M=p(-1+\text{Log.}a)+\left(p-\frac{1}{2}+\frac{a}{r}\right)\text{Log.}\frac{k}{a}-q\varphi-\Gamma\frac{r}{a}$$
$$+B_2.\frac{r}{k}\text{Cos.}\varphi+B_4.\frac{r^3}{3k^3}\text{Cos.}3\varphi+B_6.\frac{r^5}{5k^5}\text{Cos.}5\varphi+\ldots.\ ,$$
$$N=q(-1+\text{Log.}a)+\left(p-\frac{1}{2}+\frac{a}{r}\right)\varphi+q\text{Log.}\frac{k}{a}$$
$$-B_2.\frac{r}{k}\text{Sin.}\varphi-B_4.\frac{r^3}{3k^3}\text{Sin.}3\varphi-B_6.\frac{r^5}{5k^5}\text{Sin.}5\varphi-\ldots.\ ;$$

les deux séries sont convergentes à volonté.

11. Ayant ainsi

$$\text{Log.}(a^{p+iq|r})=M+iN\ ,$$

il est visible qu'on aura

$$\text{Log.}(a^{p-iq|r})=M-iN\ ;$$

ce qui donnera

$$\text{Log.}(a^{p+iq|r})(a^{p-iq|r})=2M\ ,$$
$$\text{Log.}\frac{a^{p+iq|r}}{a^{p-iq|r}}=2iN\ ;$$

d'où on conclura

$$\frac{a^{p+iq|r}}{a^{p-iq|r}}=e^{2iN}=\text{Cos.}2N+i\text{Sin.}2N.$$

Dans le cas, très-fréquent, de $p=0$, lequel donne

$$k^2=a^2+q^2r^2\ ,\quad \text{Tang.}\varphi=\frac{qr}{a}\ ;$$

on aura

$$M=\left(\frac{a}{r}-\frac{1}{2}\right)\text{Log.}\frac{k}{a}-q\varphi-\Gamma\frac{r}{a}+B_2.\frac{r}{k}\text{Cos}\varphi+B_4.\frac{r^3}{3k^3}\text{Cos.}3\varphi+\ldots,$$
$$N=q(-1+\text{Log.}a)+\left(\frac{a}{r}-\frac{1}{2}\right)\varphi+q\text{Log.}\frac{k}{a}-B_2.\frac{r}{k}\text{Sin.}\varphi-B_4.\frac{r^3}{3k^3}\text{Sin.}3\varphi-\ldots\ ;$$

et par suite

$$\text{Log.}a^{iq|r}=M+iN\ ,$$
$$\text{Log.}a^{-iq|r}=M-iN\ ;$$

d'où

d'où

$$\text{Log.}a^{iq|r}\times a^{-iq|r}=2M\ ,\quad \text{Log.}\frac{a^{iq|r}}{a^{-iq|r}}=2iN.$$

12. Quelles que soient la base a et la différence r, la factorielle $a^{y|r}$, dans les deux cas de r positif et de r négatif, qui doivent toujours être soigneusement distingués, sera réductible à la faculté $1^{y|1}$, pour laquelle nous avons proposé la notation très-simple $y!$, devenue nécessaire, par l'usage très-fréquent de ce genre particulier de fonctions, dans la plupart des opérations de haute analise. Nous avons observé, dans un premier mémoire, que le passage des factorielles aux facultés s'exécutait au moyen des deux formules

$$a^{y|r}=\frac{\left(\frac{a}{r}-1+y\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!}r^y\ ;\qquad a^{y|-r}=\frac{\left(\frac{a}{r}\right)!}{\left(\frac{a}{r}-y\right)!}r^y.$$

La supposition de $a=1$, $r=1$ donne aux formules précédemment calculées une très-grande simplicité. On a alors

$$\text{Log.}y!=-y+(y+\tfrac{1}{2})\text{Log.}(1+y)-\Gamma 1+\Gamma\frac{1}{1+y}\ ,$$

formule qu'on peut rendre convergente à volonté, en y introduisant un nombre entier arbitraire h, qu'il suffira de prendre de 4 à 6. Il viendra ainsi

$$\text{Log.}y!=-h-y-\text{Log.}(1+y)^{h|1}+(h+\tfrac{1}{2}+y)\text{Log.}(1+h+y)-\Gamma 1+\Gamma\frac{1}{1+h+y}.$$

Sur quoi on doit observer qu'il s'agit toujours ici de logarithmes naturels.

13. Si, dans cette supposition de $a=r=1$, l'exposant y prenait la forme du binôme imaginaire $p+iq$, en posant alors

$$k^2=(1+p)^2+q^2,\quad \text{Tang.}\varphi=\frac{q}{1+p}\ ;$$

$$M=-p+(p+\tfrac{1}{2})\text{Log.}k-q\varphi-\Gamma 1+B_2\frac{\text{Cos.}\varphi}{k}+B_4\frac{\text{Cos }3\varphi}{3k^3}+\ldots,$$

$$N=-q+(p+\tfrac{1}{2})\varphi+q\text{Log.}k-B_2\frac{\text{Sin.}\varphi}{k}-B_4\frac{\text{Sin.}3\varphi}{3k^3}-\ldots,$$

il viendrait

$$\text{Log.}(p+iq)!=M+iN\ ,\quad \text{Log.}(p-iq)!=M-iN.$$

Posant, de plus, $p=0$, ce qui donne

$$k^2=1+q^2\ ,\quad \text{Tang.}\varphi=q$$

$$M=\tfrac{1}{2}\text{Log.}k-q\varphi-\Gamma 1+B_2\frac{\text{Cos.}\varphi}{k}+B_4\frac{\text{Cos.}3\varphi}{3k^3}+\ldots\ldots,$$

$$N=-q+\tfrac{1}{2}\varphi+q\text{Log.}k-B_2\frac{\text{Sin.}\varphi}{k}-B_4\frac{\text{Sin.}3\varphi}{3k^3}+\ldots\ldots,$$

on aura

$$\text{Log.}(+iq)!=M+iN\ ,\quad \text{Log.}(-iq)!=M-iN\ ,$$

ce qui donnera encore

$$\text{Log.}(+iq)!\times(-iq)!=2M\ ,\quad \text{Log.}\frac{(+iq)!}{(-iq)!}=2iN.$$

14. Le logarithme de $y!$ pouvant toujours être développé en une série de la forme

$$Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots\ldots,$$

on aura dans le cas actuel de $a=r=1$,

$$\begin{aligned}
-A&=\Lambda 1 &&=B_1+B_2+B_4+B_6+\ldots.,\\
+2B&=1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\ldots. &&=\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+2B_2+4B_4+6B_6+\ldots.,\\
-3C&=1+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{64}+\ldots. &&=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+3B_2+10B_4+21B_6+\ldots.,\\
+4D&=1+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{81}+\tfrac{1}{256}+\ldots. &&=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}+4B_2+20B_4+56B_6+\ldots.,\\
-5E&=1+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{243}+\tfrac{1}{1024}+\ldots. &&=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+5B_2+35B_4+126B_6+\ldots.,\\
+6F&=1+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{729}+\tfrac{1}{4096}+\ldots. &&=\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{2}+6B_2+56B_4+252B_6+\ldots.,
\end{aligned}$$

. . . .

Les valeurs numériques de toutes ces sommes de puissances sont connues et calculées ; quant à celle de $\Lambda 1$, elle est

$$0,\ 57721\ 56649\ldots..$$

On sait de plus que les sommes à indice *pair* sont réductibles aux puissances *paires* de ϖ ; d'où l'on obtient

$$B = +2\,B_2 \cdot \frac{\varpi^2}{1.2}\,,$$

$$D = -2^3 B_4 \cdot \frac{\varpi^4}{1.2.3.4}\,,$$

$$F = +2^5 B_6 \cdot \frac{\varpi^6}{1.2.3.4.5.6}\,,$$

$$H = -2^7 B_8 \cdot \frac{\varpi^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quant aux autres coefficiens A, C, E, ... l'analise ne nous offre pas les mêmes moyens de les obtenir ; il faudrait, pour y parvenir, interpoler la série des nombres de Bernoulli, d'après une loi probablement fort simple, mais que nous ne connaissons pas encore.

15. Ayant

$$\text{Log.}(+y)! = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots\ldots\,;$$

on doit avoir

$$\text{Log.}(-y)! = -Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \ldots\ldots\,;$$

de là résulte

$$\text{Log.}(+y)! \times (-y)! = 2By^2 + 2Dy^4 + 2Fy^6 + \ldots.\,;$$

en changeant y en iy, on aura de même

$$\text{Log}\,(+iy)! \times (-iy)! = -2By^2 + 2Dy^4 - 2Fy^6 + \ldots\ldots$$

16. On a vu (8) que

$$B_2 \cdot \frac{y^2}{1.2} + B_4 \cdot \frac{y^4}{1.2.3.4} + B_6 \cdot \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots = \text{Log.}\,\frac{e^{\frac{1}{2}y} - e^{-\frac{1}{2}y}}{y}\,,$$

En remplaçant y par iy, on aura, après les réductions connues,

$$-B_2 \cdot \frac{y^2}{1.2} + B_4 \cdot \frac{y^4}{1.2.3.4} - B_6 \cdot \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots = \text{Log.}\left(\frac{2}{y}\,\text{Sin.}\,\frac{y}{2}\right).$$

Les réductions appliquées aux valeurs des logarithmes de $(+y)!(-y)!$ et de $(+iy)!(-iy)!$ qu'on vient de trouver, conduisent aux deux théorèmes très-importans qui suivent :

THÉORÈME I. $(+y)!(-y)! = \frac{\varpi y}{\text{Sin.}\,\varpi y}$.

THÉORÈME II. $(+iy)!(-iy)! = \frac{2\varpi y}{e^{\varpi y} - e^{-\varpi y}}$.

Les principes généraux étant posés, proposons-nous la solution générale des deux problèmes qui suivent :

17. *PROBLÈME I. Évaluer numériquement le produit*

$$\left\{1-\frac{x^2}{a^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{(a+r)^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{(a+2r)^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{(a+3r)^2}\right\}\ldots\ldots$$

continué à l'infini ?

Solution. Ce produit se décompose dans ceux-ci

$$\frac{a-x}{a}\cdot\frac{a-x+r}{a+r}\cdot\frac{a-x+2r}{a+2r}\cdot\frac{a-x+3r}{a+3r}\ldots\ldots,$$

$$\frac{a+x}{a}\cdot\frac{a+x+r}{a+r}\cdot\frac{a+x+2r}{a+2r}\cdot\frac{a+x+3r}{a+3r}\ldots\ldots;$$

dans mon *Analise des réfractions*, je les ai réduit respectivement à

$$\frac{(a-x)^{\frac{x}{r}|r}}{(\text{infin.}r)^{\frac{x}{r}}}, \qquad \frac{(a+x)^{-\frac{x}{r}|r}}{(\text{infin.}r)^{-\frac{x}{r}}},$$

ce qui rend le produit cherché égal au simple produit des deux factorielles

$$(a-x)^{\frac{x}{r}|r}, \quad (a+x)^{-\frac{x}{r}|r};$$

il ne reste donc plus qu'à réduire ces factorielles aux facultés, ce qui se fait à l'aide des formules ci-dessus (12). En posant, pour abréger, $\frac{a}{r}-1=f$, on trouvera

$$(a-x)^{\frac{x}{r}|r} = \frac{f!}{\left(f-\frac{x}{r}\right)!}\,r^{\frac{x}{r}}, \quad (a+x)^{-\frac{x}{r}|r} = \frac{f!}{\left(f+\frac{x}{r}\right)!}\,r^{-\frac{x}{r}};$$

d'où on conclura

$$(a-x)^{\frac{x}{r}|r}.(a+x)^{-\frac{x}{r}|r}=\frac{f!f!}{\left(f-\frac{x}{r}\right)!\left(f+\frac{x}{r}\right)!};$$

la solution du problème proposé sera donc réduite à la détermination des trois facultés $f!$, $\left(f-\frac{x}{r}\right)!$, $\left(f+\frac{x}{r}\right)!$ dont on trouvera les valeurs numériques toutes calculées, dans la table donnée à la page 6 de ce volume. (*)

18. *PROBLÈME II. Évaluer numériquement le produit*

$$\left\{1+\frac{x^2}{a^2}\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(a+r)^2}\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(a+2r)^2}\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(a+3r)^2}\right\}\ldots\ldots$$

continué à l'infini ?

Solution. En continuant de faire $\frac{a}{r}-1=f$, il suffira de remplacer x par ix, dans la formule qu'on vient de trouver. Le produit demandé deviendra égal à

(*) Depuis l'impression de la table de M. Bessel, nous nous sommes aperçu que M. Legendre dans ses *Exercices de calcul intégral* (Paris, 1811), avait publié une table du même genre, et nous venons d'apprendre qu'une pareille table venait aussi d'être calculée par M. Gauss. Voilà donc trois géomètres du premier ordre qui, faute de moyens rapides de communication, ont consommé un temps précieux en de pénibles calculs, pour parvenir aux mêmes résultats.

M. Legendre, dans sa table, désigne par $a-1$ ce que M. Kramp représente par y, et par Γ ce que M. Kramp désigne par $y!$. Cette table, calculée par une méthode analogue à celle qui a été indiquée dans la note de la page 12 de ce volume, ne contient les logarithmes de la faculté $y!$ qu'à sept décimales seulement, et encore la septième décimale n'y est pas toujours exacte ; on n'y trouve pas non plus les différences des logarithmes qu'elle renferme ; mais ces logarithmes y sont calculés pour les valeurs de y de millième en millième, ce qui rend à la fois les interpolations plus faciles et moins fréquemment nécessaires. Les détails dans lesquels entre M. Legendre, sur le calcul de cette table, et sur la nature, les propriétés et les usages des nombres qu'elle renferme, sont d'ailleurs du plus grand intérêt.

J. D. G.

$$\frac{f!f!}{\left(f-\frac{ix}{r}\right)!\left(f+\frac{ix}{r}\right)!}.$$

Les logarithmes des deux facultés du dénominateur sont réductibles aux formes $M-iN$ et $M+iN$, ce qui rend le logarithme de leur produit égal à $2M$. Il serait fort à desirer que quelque calculateur courageux voulût calculer les binômes $M+iN=\text{Log.}(iy)!$, pour toutes les valeurs de y depuis o jusqu'à 1, de même que nous devons à M. le professeur Bessel une table des logarithmes de $y!$, dans le cas d'une base réelle. En attendant, la série (13), qui a l'avantage d'être convergente à volonté, nous fournit un moyen très-expéditif de trouver la valeur numérique de $2M$, logarithme du produit $\left(f-\frac{ix}{r}\right)!\left(f+\frac{ix}{r}\right)!$. Il faudra, pour en faire usage, déterminer l'angle φ et le coefficient k de manière qu'on ait

$$\text{Tang.}\varphi=\frac{x}{a}\quad,\qquad k^2=\frac{a^2+x^2}{r^2}\ ,$$

ce qui donne

$$k=\frac{a}{r\,\text{Cos.}\varphi}\ ;$$

et on aura

$$M=-\frac{a}{r}+1+\left(\frac{a}{r}-\frac{1}{2}\right)\text{Log.}k-\frac{x}{r}\,\varphi-\Gamma 1+B_2\frac{\text{Cos.}\varphi}{k}+B_4\frac{\text{Cos.}3\varphi}{3k^3}+\ldots,$$

19. Appliquant la solution de ces deux problèmes au cas particulier de $a=r=\varpi$, qui donne $f=0$, et qui rend (15) la variable $y=\frac{x}{\varpi}$, d'où $\varpi y=x$, on sera conduit aux théorèmes très-connus, démontrés par EULER (*Introd. in. anali. infin.*, 1.re partie, n.os 156 et suivans.) ; savoir :

$$\text{Sin.}\varphi=\varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{4\varpi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{9\varpi^2}\right)\ldots\ ,$$

$$\frac{e^{\phi}-e^{-\phi}}{2}=\phi\left(1+\frac{\phi^2}{\varpi^2}\right)\left(1+\frac{\phi^2}{4\varpi^2}\right)\left(1+\frac{\phi^2}{9\varpi^2}\right)\ldots\ldots$$

20. Si dans (17) on fait $a=\frac{\varpi}{2}$, $r=\varpi$, on aura, d'un côté, le produit

$$\left(1-\frac{4x^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\varpi^2}\right)\ldots\ldots$$

continué à l'infini, lequel, par conséquent, sera égal à ce que devient la fraction

$$\frac{f!f!}{\left(f-\frac{x}{r}\right)!\left(f+\frac{x}{r}\right)!},$$

par cette supposition qui donne

$$f=-\tfrac{1}{2}=-1+\tfrac{1}{2},$$

$$f+\frac{x}{r}=-\tfrac{1}{2}+\frac{x}{r}=\quad-\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{r}\right),$$

$$f-\frac{x}{r}=-\tfrac{1}{2}-\frac{x}{r}=-1+\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{r}\right).$$

La faculté $f!$ devient ainsi $2(\frac{1}{2})!=\sqrt{\varpi}$. La faculté $\left(f-\frac{x}{r}\right)!$ deviendra

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\varpi}\right)!}{\frac{1}{2}-\frac{x}{\varpi}},$$

et le produit des deux facultés $\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{\varpi}\right)!$ et $\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\varpi}\right)!$ sera (16)

$$\frac{\frac{\varpi}{2}-x}{\text{Sin.}\left(\frac{\varpi}{2}-x\right)}=\frac{\frac{\varpi}{2}-x}{\text{Cos.}x}.$$

Après avoir employé toutes ces réductions, on sera conduit au théorème très-connu,

$$\text{Cos.}\varphi=\left(1-\frac{4\varphi^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\varphi^2}{9\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\varphi^2}{25\varpi^2}\right)\ldots\ldots$$

21. Et si, dans cette dernière formule, on change φ en $i\varphi$, elle deviendra

$$\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}=\left(1+\frac{4\varphi^2}{\varpi^2}\right)\left(1+\frac{4\varphi^2}{9\varpi^2}\right)\left(1+\frac{4\varphi^2}{25\varpi^2}\right)\left(1+\frac{4\varphi^2}{49\varpi^2}\right)\ldots\ldots;$$

formule connue depuis l'analise d'Euler.

22. Les formules (17) et (19) nous conduisent aux deux théorèmes qui suivent

$$h!(1-h)!=\frac{h(1-h)}{\text{Sin.}h\varpi}.\varpi\ ;$$

$$(\tfrac{1}{2}-h)!(\tfrac{1}{2}+h)!=\frac{(\frac{1}{2}-h)(\frac{1}{2}+h)}{\text{Cos.}h\varpi}.\varpi\,.$$

Ces deux formules, qui sont identiques entre elles, procureront à ceux qui voudront s'occuper de la construction d'une table des facultés, pour les fractions décimales comprises entre o et 1, l'avantage précieux de diminuer leur travail de moitié, en ne les obligeant à le pousser que jusqu'à $h=\frac{1}{2}=0{,}5$; ce qui donnera, en outre, une grande convergence à la série qu'on est obligé d'employer pour le calcul de cette table. En changeant h en ih, on aura pareillement

$$(ih)!(1-ih)!=\frac{2h(1-ih)}{e^{h\varpi}-e^{-h\varpi}}.\varpi\ ;$$

$$(\tfrac{1}{2}-ih)!(\tfrac{1}{2}+ih)!=\frac{2(\frac{1}{2}-ih)(\frac{1}{2}+ih)}{e^{h\varpi}+e^{-h\varpi}}.\varpi=\frac{2(\frac{1}{4}+h^2)}{e^{h\varpi}+e^{-h\varpi}}.\varpi\,.$$

23. Le théorème suivant mérite d'être remarqué ; il concerne le produit $x!y!$ de deux facultés dans lesquelles la somme $x+y$ des exposans est un nombre entier quelconque, *pair* ou *impair*.

Dans le cas d'une somme *paire*, soient $x=a+h$, $y=a-h$, et par conséquent $x+y=2a$; la lettre a pourra alors désigner un nombre entier quelconque, et h une fraction moindre que l'unité. Cela posé, on a

$(a+h)!$

$$(a+h)!=(+h)!(1+h)^{a|1}\ ,$$
$$(a-h)!=(-h)!(1-h)^{a|1}\ ,$$

ou

$$(a+h)!=(+h)!(1+h)(2+h)(3+h)\ldots\ldots(a+h)\ ,$$
$$(a-h)!=(-h)!(1-h)(2-h)(3+h)\ldots\ldots(a-h)\ ;$$

on aura donc (16)

$$x!y!=\frac{h\varpi}{\text{Sin.}h\varpi}(1-h^2)(4-h^2)(9-h^2)\ldots\ldots(a^2-h^2).$$

Dans le cas d'une somme *impaire*, soient posés

$$x=a+\tfrac{1}{2}+h\ ,\qquad y=a+\tfrac{1}{2}-h\ ,$$

ce qui donnera

$$x+y=2a+1\ ;$$

a pouvant désigner un nombre entier quelconque. On aura alors

$$x!=(a+\tfrac{1}{2}+h)!=(\tfrac{1}{2}+h)!(\tfrac{3}{2}+h)^{a|1}\ ,$$
$$y!=(a+\tfrac{1}{2}-h)!=(\tfrac{1}{2}+h)!(\tfrac{3}{2}-h)^{a|1}\ ,$$

ou

$$x!=(\tfrac{1}{2}+h)!(\tfrac{3}{2}+h)(\tfrac{5}{2}+h)(\tfrac{7}{2}+h)\ldots\ldots\left(\frac{2a+1}{2}+h\right),$$
$$y!=(\tfrac{1}{2}-h)!(\tfrac{3}{2}-h)(\tfrac{5}{2}-h)(\tfrac{7}{2}-h)\ldots\ldots\left(\frac{2a+1}{2}-h\right);$$

donc (22)

$$x!y!=\frac{\varpi}{\text{Cos.}h\varpi}(\tfrac{1}{4}-h^2)(\tfrac{9}{4}-h^2)(\tfrac{25}{4}-h^2)(\tfrac{49}{4}-h^2)\ldots\ldots\left\{\frac{(2a+1)^2}{4}-h^2\right\}.$$

Si, dans le cas de $x+y$ *pair*, h se change en ih, ce qui donnera toujours $x+y=2a$, a étant un nombre entier quelconque, il viendra

$$x!y!=\frac{2h\varpi}{e^{h\varpi}-e^{-h\varpi}}(1+h^2)(4+h^2)(9+h^2)\ldots\ldots(a^2+h^2)\ .$$

Si le même changement arrive, dans le cas de $x+y$ impair, en sorte qu'on ait toujours $x+y=2a+1$, a étant un nombre entier quelconque, il viendra

$$x!y!=\frac{2\varpi}{e^{h\varpi}+e^{-h\varpi}}\left(\tfrac{1}{4}+h^2\right)\left(\tfrac{2}{4}+h^2\right)\left(\tfrac{25}{4}+h^2\right)\left(\tfrac{49}{4}+h^2\right)\ldots\left\{\frac{(2a+1)^2}{4}+h^2\right\}.$$

24. L'analise que nous venons de développer n'est nullement bornée au cas proposé; et si l'on demandait soit la valeur du produit

$$\left\{1+\frac{x^n}{a^n}\right\}\left\{1+\frac{x^n}{(a+r)^n}\right\}\left\{1+\frac{x^n}{(a+2r)^n}\right\}\left\{1+\frac{x^n}{(a+3r)^n}\right\}\ldots,$$

soit celle du produit

$$\left\{1-\frac{x^n}{a^n}\right\}\left\{1-\frac{x^n}{(a+r)^n}\right\}\left\{1-\frac{x^n}{(a+2r)^n}\right\}\left\{1-\frac{x^n}{(a+3r)^n}\right\}\ldots,$$

continué à l'infini, on la trouverait encore, en suivant rigoureusement les mêmes principes.

25. Jusqu'ici nous avons supposé que les facteurs de nos factorielles constituaient toujours une progression arithmétique du *premier* ordre; c'est-à-dire, une progression ayant ses *premières* différences constantes; et ces sortes de fonctions peuvent être appelées *Factorielles du premier ordre*. On peut aussi imaginer une suite de facteurs constituant une progression arithmétique du *second* ordre; c'est-à-dire, une progression ayant ses *secondes* différences constantes, telle que

$$\begin{array}{l} a, \\ a+b, \\ a+2b+c, \\ a+3b+3c, \\ a+4b+6c, \\ a+5b+10c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le terme qui répondrait à l'indice n serait alors

$$a+\frac{n-1}{1}b+\frac{n-1}{1}.\frac{n-3}{2}c.$$

Un semblable produit pourrait être appelé *Factorielles du second ordre* ; et, pour peu qu'on suive le développement de la plupart de nos séries, on verra que ces factorielles, de même que celles des ordres supérieurs, c'est-à-dire, celles dans lesquelles se sont les différences d'un ordre plus élevé que le second, qui sont constantes, doivent se rencontrer très-fréquemment. Heureusement toutes ces factorielles sont réductibles à celles du premier ordre, moyennant une décomposition analitique fort simple. On peut toujours, en effet, pour le second ordre, déterminer les deux premiers termes A, A', et les deux premières différences r, r', de manière que le terme général

$$a+\frac{n-1}{1}b+\frac{n-1}{1}.\frac{n-2}{2}c\,;$$

devienne équivalent au produit

$$[A+(n-1)r][A'+(n-1)r']\ ,$$

indépendamment de l'indice n. Il faudra, pour cela, résoudre les trois équations

$$AA'=a\ ,\quad Ar'+A'r=b-\tfrac{1}{2}c\ ,\quad rr'=\tfrac{1}{2}c\ ;\ (*)$$

on aura alors

$$\begin{aligned} a&=AA'\ ,\\ a+b&=A+r)(A'+r')\ ;\\ a+2b+c&=(A+2r)(A'+2r')\ ,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

en sorte que la factorielle proposée du second ordre deviendra le simple produit

$$A^{n|r}\times A'^{n|r'}$$

(*) Les inconnues A, A', r, r' de ces trois équations étant au nombre de quatre, on pourra disposer de l'une d'elles pour rendre les valeurs des autres les plus simples possibles.

J. D. G.

de deux factorielles du premier ordre, et rentrera, comme telle, dans la théorie qui vient d'être développée. (*)

(*) Ce que M. Kramp appelle ici *Factorielles de différens ordres* est ce que Vandermonde avait déjà appelé *Puissances de différens ordres*, avec cette différence seulement que les factorielles de l'ordre n sont des puissances de l'ordre $n+1$. Ainsi, suivant le langage de M. Kramp, les puissances du premier ordre, c'est-à-dire, les simples puissances que l'on considère dans les élémens, sont des factorielles de l'ordre *zéro*.

J. D. G.