SERVOIS
LHUILIER
ROCHAT
LABROUSSE
FAUQUIER

Démonstrations du théorème énoncé à la page 384 du I.er volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 94-96
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__94_0>

Démonstrations du théorème énoncé à la page 384 *du* 1.er *volume des* Annales ;

Par MM. Servois, Lhuilier, Rochat, Labrousse, Fauquier, etc.

THÉORÈME. *Le volume d'un tronc de prisme quelconque, droit ou oblique, s'obtient en multipliant l'aire de l'une quelconque de ses bases par la perpendiculaire abaissée sur son plan du centre de gravité de l'aire de l'autre base.*

Toutes les démonstrations qu'on a données de ce théorème reposent sur les deux propositions suivantes.

1.° Le volume d'un tronc de prisme triangulaire, droit ou oblique, s'obtient en multipliant l'aire de l'une quelconque de ses bases par la perpendiculaire abaissée sur son plan du centre de gravité de l'aire de l'autre base.

2.° Si l'on décompose les deux bases d'un tronc de prisme quelconque en triangles, par des diagonales correspondantes, les aires des triangles homologues seront dans un rapport constant qui sera celui des aires des bases elles-mêmes.

La première de ces propositions est une suite de ce que le volume d'un tronc de prisme triangulaire est le produit de l'aire de l'une quelconque de ses bases par le tiers de la somme des perpendiculaires abaissées sur son plan des sommets de l'autre base, et de ce que la distance du centre de gravité de l'aire d'un triangle à un plan quelconque est le tiers de la somme des distances de ses sommets au même plan (*).

(*) La vérité de cette dernière proposition s'aperçoit sur-le-champ, en remarquant que le centre de gravité de l'aire d'un triangle est le même que le centre commun de gravité de trois masses égales situées à ses sommets.

La seconde proposition n'est pas plus difficile à démontrer. Qu'on imagine en effet une section perpendiculaire aux arêtes latérales, et que cette section soit décomposée en triangles correspondants à ceux des deux bases; comme ces derniers seront les projections des premiers sur le plan coupant, ils seront à la fois entre eux dans le rapport des triangles de l'une des bases et dans le rapport des triangles de l'autre; d'où il suit que les triangles correspondants de l'une et de l'autre base seront eux-mêmes dans un rapport constant.

Pour parvenir, d'après ces principes, à la démonstration du théorème, MM. *Labrousse*, maître de mathématiques à Nismes, et *Fauquier*, élève du lycée de la même ville, ont démontré, par la composition des forces parallèles, que, si la proposition était vraie pour un tronc de prisme ayant des bases de $n-1$ côtés, elle devait l'être aussi pour un tronc de prisme ayant des bases de n côtés; et ils en ont conclu que la proposition étant vraie, en effet, pour des troncs de prismes triangulaires, elle devait être vraie pour des troncs de prismes quelconques.

Les démonstrations données par MM. *Servois*, *Lhuilier* et *Rochat* reviennent au fond à ce qui suit:

Soient Π la base supérieure du tronc et G la distance de son centre de gravité au plan de la base inférieure; soient θ, θ', θ'',..., les triangles résultant de la décomposition de cette base et g, g', g'',..., les distances de leurs centres de gravité particuliers au plan de la base inférieure; soit P cette base et t, t', t'',..., les triangles résultant de sa décomposition et correspondant à θ, θ', θ'',...; soit enfin V le volume du tronc, on aura d'abord

$$V=tg+t'g'+t''g''+\ldots\ldots;$$

mais, m étant un nombre constant choisi convenablement, on doit avoir

$$P=m\Pi\,,\qquad t=m\theta\,,\qquad t'=m\theta'\,,\qquad t''=m\theta''\,,\ldots\ldots,$$

ce qui donne d'abord

$$V=m(\theta g+\theta' g'+\theta'' g''+\ldots\ldots)\,,$$

mais on a, par le principe des momens,

$$\varrho g+\varrho' g'+\varrho'' g''+\ldots\ldots=\Pi G\,,$$

donc enfin

$$V=m\Pi G=PG\,.$$

Les rédacteurs des *Annales* ont reçu diverses autres démonstrations du même théorème qui rentrent toutes dans les précédentes. Les auteurs de quelques-unes d'entre elles ont remarqué que la même proposition pouvait être étendue aux troncs de cylindres droits ou obliques à bases quelconques. L'un d'eux a observé, en outre, qu'il suivait de cette proposition qu'on ne change pas le volume d'un tronc de prisme ou de cylindre, droit ou oblique, à base quelconque, en substituant à l'une de ses bases une autre base passant par le centre de gravité de l'aire de celle-là.

Le théorème qui fait le sujet de cet article se trouve traité par M. *Blondat*, dans le dernier cahier de la *Correspondance sur l'école polytechnique* (janvier 1811, pag. 267).