ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

DUBOURGUET

# Formule nouvelle pour calculer les logarithmes

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 2 (1811-1812), p. 69-72
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__69_0>

# ANALISE.

## *Formule nouvelle pour calculer les logarithmes ;*

Par M. Dubourguet, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial.

On sait qu'en représentant par l la caractéristique des logarithmes naturels, on a généralement

$$\mathrm{l}x=\frac{(x-1)}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots\quad\text{(A)}.$$

Cette série, qui ne peut converger lorsque $x>2$, a cependant été mise par Lagrange sous une forme très-convergente, en substituant à $x$ la quantité $\sqrt[n]{x}$; ce qui a donné à ce grand géomètre l'équation

$$\mathrm{l}x=n\left\{\frac{(\sqrt[n]{x}-1)}{1}-\frac{(\sqrt[n]{x}-1)^2}{2}+\frac{(\sqrt[n]{x}-1)^3}{3}-\ldots\right\}\quad\text{(B)}$$

dont le second membre converge rapidement lorsqu'on prend $n$ assez grand pour que $\sqrt[n]{x}$ n'excède l'unité que d'une très-petite fraction; mais la longueur du calcul qu'exige l'extraction de la racine $n$ de $x$, lors même qu'on prend $n$ égale à une puissance exacte de 2, afin de n'avoir que des extractions de racines quarrées à effectuer, a fait rejeter cette formule, lorsqu'on a voulu calculer des tables de logarithmes.

Si l'on substitue successivement $1+y$ et $1-y$ à la place de $x$ dans l'équation (A), qu'ensuite on retranche la seconde équation trouvée de la première ; en posant $\frac{1+y}{1-y}=x$, d'où $y=\frac{x-1}{x+1}$, on obtiendra la formule déjà connue

$$\mathrm{l}x=2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\ldots\ldots\right\}, \quad \text{(C)}$$

qui est convergente et assez simple.

Voilà les seules formules de ce genre, du moins à ma connaissance, qui ont été trouvées jusqu'à présent. Mais mes recherches sur cet objet m'ont conduit à la formule suivante

$$\mathrm{l}x=\frac{x-1}{x}\left\{\frac{x+1}{2}-\left[\frac{1}{1.3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{3.5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4+\frac{1}{5.7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^6+\ldots\right]\right\} \text{(D)}$$

qui est beaucoup plus convergente que la formule (C), et qui se démontre comme je vais l'expliquer (*).

On sait qu'en prenant l'intégrale de la formule $\mathrm{d}z\sqrt{1+z^2}$, de manière que cette intégrale s'évanouisse lorsque $z=0$, on a complètement

$$\int \mathrm{d}z\sqrt{1+z^2}=\frac{1}{2}\left\{z\sqrt{1+z^2}+\mathrm{l}(z+\sqrt{1+z^2})\right\},$$

(*) Si, dans les formules (C), (D), on fait $x=\frac{u}{t}$, elles deviendront

$$\mathrm{l}u=\mathrm{l}t+2\left\{\left(\frac{u-t}{u+t}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^5+\ldots\ldots\right\} \quad \text{(C')}$$

$$\mathrm{l}u=\mathrm{l}t+\frac{u-t}{ut}\left\{\frac{u+t}{2t}-\left[\frac{1}{1.3}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^2+\frac{1}{3.5}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^4+\frac{1}{5.7}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^6+\ldots\right]\right\} \quad \text{(D')}$$

formules qui convergeront rapidement, si l'on prend pour $t$ et $u$ deux nombres très-grands et très-peu différens, et qui seront susceptibles de toutes les applications qui ont été détaillées dans ce recueil ( tom. 1, pag. 79 et suivantes ). Mais, ce qui rend sur-tout précieux le concours de ces deux formules, c'est que, la première étant toujours fautive par défaut et la seconde par excès, leur emploi simultané peut seul faire connaître la limite de l'erreur que peut donner l'usage de l'une ou de l'autre.

( *Note des éditeurs.* )

d'où l'on tire

$$\mathrm{l}(z+\sqrt{1+z^2})=2\int dz\sqrt{1+z^2}-z\sqrt{1+z^2}. \qquad \text{(E)}$$

Mais, en se servant de la méthode d'intégration par approximation que j'ai donnée au chapitre IV de la première section de mon calcul intégral ( art. 257 et 258 ) (*), et que je crois nouvelle, on a

$$\int dz\sqrt{1+z^2}=z\sqrt{1+z^2}-\frac{z^3}{\sqrt{1+z^2}}\left\{\frac{1}{3}+\frac{z^2}{3.5(1+z^2)}+\frac{z^4}{5.7(1+z^2)^2}+\ldots\right\}, \quad \text{(F)}$$

en prenant, comme précédemment, l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $z=0$.

Substituant cette valeur de $\int dz\sqrt{1+z^2}$ dans l'équation (E), on a

$$\mathrm{l}(z+\sqrt{1+z^2})=z\sqrt{1+z^2}-\frac{2z^3}{\sqrt{1+z^2}}\left\{\frac{1}{3}+\frac{z^2}{3.5(1+z^2)}+\frac{z^4}{5.7(1+z^2)^2}+\ldots\right\} \text{(G)}$$

Soit fait $\sqrt{x}=z+\sqrt{1+z^2}$, d'où $z=\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$,

$$\sqrt{1+z^2}=\sqrt{x}-z=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}, \qquad z\sqrt{1+z^2}=\frac{x^2-1}{4x},$$

$$\frac{2z^3}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{(x-1)^3}{2x(x+1)}, \qquad \frac{z^2}{1+z^2}=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (G), en observant que $\mathrm{l}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\mathrm{l}x$, et multipliant toute l'équation par 2, on obtiendra la formule (D) qu'il s'agissait de démontrer.

Si, après avoir divisé les deux membres de l'équation (D) par $\frac{x-1}{x}$, on y suppose $x=0$, elle deviendra en transposant

(*) Cet ouvrage se trouve à Paris, chez l'Auteur, rue St-Jacques, n.° 121, et chez Courcier, quai des augustins, n.° 57.

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{9.11}+\ldots,$$

résultat assez remarquable (*).