ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

BRET

Géométrie analitique. Détermination de la longueur des axes principaux dans les surfaces du second ordre qui ont un centre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 33-37

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__33_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Détermination de la longueur des axes principaux dans les surfaces du second ordre qui ont un centre ;

Par M. Bret, professeur de mathématiques transcendantes au lycée de Grenoble.

L'ÉQUATION générale des surfaces du second ordre est

$$Ax^2+A'y^2+A''Z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0.$$

Si on ne considère que les surfaces qui ont un centre, on pourra, en transportant l'origine des coordonnées à ce centre, faire disparaître de cette équation les premières puissances des variables x, y, z, et on obtiendra l'équation plus simple

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=H.$$

Substituons à x, y, z, les valeurs qui servent à passer du système de coordonnées rectangulaires x, y, z, à un autre système de coordonnées aussi rectangulaires x', y', z' ; et pour cela rappelons les formules connues

$$x=x'\text{Cos.}\alpha+y'\text{Cos.}\alpha'+z'\text{Cos.}\alpha'' ,$$

$$y=x'\text{Cos.}\beta+y'\text{Cos.}\beta'+z'\text{Cos.}\beta'' ,$$

$$z=x'\text{Cos.}\gamma+y'\text{Cos.}\gamma'+z'\text{Cos.}\gamma'' ;$$

ensuite les équations de condition

$$\left.\begin{array}{r}
\mathrm{Cos.}^2\alpha+\mathrm{Cos.}^2\beta+\mathrm{Cos.}^2\gamma=1\ ,\\
\mathrm{Cos.}^2\alpha'+\mathrm{Cos.}^2\beta'+\mathrm{Cos.}^2\gamma'=1\ ,\\
\mathrm{Cos.}^2\alpha''+\mathrm{Cos.}^2\beta''+\mathrm{Cos.}^2\gamma''=1\ ;\\
\mathrm{Cos.}\alpha\,.\mathrm{Cos.}\alpha'+\mathrm{Cos.}\beta\,.\mathrm{Cos.}\beta'+\mathrm{Cos.}\gamma\,.\mathrm{Cos.}\gamma'=0\ ,\\
\mathrm{Cos.}\alpha'\,.\mathrm{Cos.}\alpha''+\mathrm{Cos.}\beta'\,.\mathrm{Cos.}\beta''+\mathrm{Cos.}\gamma'\,.\mathrm{Cos.}\gamma''=0\ ,\\
\mathrm{Cos.}\alpha''.\mathrm{Cos.}\alpha+\mathrm{Cos.}\beta''.\mathrm{Cos.}\beta+\mathrm{Cos}\,\gamma''.\mathrm{Cos.}\gamma=0\ ;
\end{array}\right\}\ (A)$$

lesquelles peuvent, comme l'on sait, être remplacées par les suivantes

$$\left.\begin{array}{r}
\mathrm{Cos.}^2\alpha+\mathrm{Cos.}^2\alpha'+\mathrm{Cos.}^2\alpha''=1\ ,\\
\mathrm{Cos.}^2\beta+\mathrm{Cos.}^2\beta'+\mathrm{Cos.}^2\beta''=1\ ,\\
\mathrm{Cos.}^2\gamma+\mathrm{Cos.}^2\gamma'+\mathrm{Cos.}^2\gamma''=1\ ;\\
\mathrm{Cos.}\alpha.\mathrm{Cos.}\beta+\mathrm{Cos.}\alpha'.\mathrm{Cos.}\beta'+\mathrm{Cos.}\alpha''.\mathrm{Cos.}\beta''=0\ ,\\
\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{Cos.}\gamma+\mathrm{Cos.}\beta'.\mathrm{Cos.}\gamma'+\mathrm{Cos.}\beta''.\mathrm{Cos.}\gamma''=0\ ,\\
\mathrm{Cos.}\gamma.\mathrm{Cos.}\alpha+\mathrm{Cos.}\gamma'.\mathrm{Cos.}\alpha'+\mathrm{Cos.}\gamma''.\mathrm{Cos.}\alpha''=0\ .
\end{array}\right\}\ (B)$$

Nous aurons, en faisant disparaître de la nouvelle équation les rectangles $x'y'$, $y'z'$, $z'x'$, ce qui est toujours possible (*), l'équation

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2=H.$$

Nous allons maintenant chercher l'équation du troisième degré qui a pour racines P, P', P''.

On trouve cette équation, de la manière la plus simple, en passant de l'équation

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2=H \qquad (I)$$

à celle-ci

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=H. \qquad (II)$$

(*) Voyez l'*Application de l'algèbre à la géométrie* de MM. *Monge* et *Hachette*; voyez aussi la *Géométrie analitique* de M. *Biot*.

(*Note des éditeurs.*)

Pour cela posons les valeurs de x', y', z', en x, y, z, ces valeurs sont

$$x'=x\text{Cos.}\alpha+y\text{Cos.}\beta+z\text{Cos.}\gamma\ ,$$
$$y'=x\text{Cos.}\alpha'+y\text{Cos.}\beta'+z\text{Cos.}\gamma'\ ,$$
$$z'=x\text{Cos.}\alpha''+y\text{Cos.}\beta''+z\text{Cos}\gamma''\ .$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (I), et comparant celle qui en résulte à l'équation (II), on trouve

$$\left.\begin{aligned}&P\text{Cos.}^2\alpha+P'\text{Cos.}^2\alpha'+P''\text{Cos.}^2\alpha''=A\ ,\\&P\text{Cos.}^2\beta+P'\text{Cos.}^2\beta'+P''\text{Cos.}^2\beta''=A'\ ,\\&P\text{Cos.}^2\gamma+P'\text{Cos.}^2\gamma'+P''\text{Cos.}^2\gamma''=A''\ ;\end{aligned}\right\}\ \text{(C)}$$

$$\left.\begin{aligned}&P\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma+P'\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.}\gamma'+P''\text{Cos.}\beta''.\text{Cos.}\gamma''=B\ ,\\&P\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha+P'\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha'+P''\text{Cos.}\gamma''.\text{Cos.}\alpha''=B'\ ,\\&P\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta+P'\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta'+P''\text{Cos.}\alpha''.\text{Cos.}\beta''=B''\ .\end{aligned}\right\}\ \text{(D)}$$

Il est visible que l'on parviendra à l'équation dont les racines sont P, P', P'', en déterminant, au moyen des équations de condition, les valeurs de $P+P'+P''$, $PP'+P'P''+P''P$, $PP'P''$.

D'abord, si l'on ajoute les équations (C) on a, en vertu des équations (A),

$$P+P'+P''=A+A'+A''.$$

Pour simplifier les calculs suivans, je ferai usage des notations que voici

$$AA'+A'A''+A''A=\int AA'\ ,$$
$$P^2\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma+P'^2\text{Cos.}^2\beta'.\text{Cos.}^2\gamma'+P''^2\text{Cos.}^2\beta''.\text{Cos.}^2\gamma''=\int P^2\text{Cos.}^2\beta\text{Cos.}^2\gamma\ ,$$

etc., etc., etc.

Cela posé, dans les équations (C), effectuons le produit AA', nous obtiendrons

$$AA'=\int P^2\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta+\int PP'(\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta'+\text{Cos.}^2\alpha'^2.\text{Cos.}^2\beta)\ ;$$

or, les équations (D) donnent

$$B''^2=\int P^2\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta+2\int PP'\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\beta'\ ;$$

retranchant donc ce dernier résultat du précédent, on aura

$$AA'-B''^2=\int PP'(\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta'-\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta)^2 ;$$

on aura pareillement

$$A'A''-B^2=\int PP'(\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma'-\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.}\gamma)^2 ,$$

$$A''A-B'^2=\int PP'(\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha'-\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha)^2 ;$$

donc

$$\int AA'-\int B^2=\int PP'\begin{cases}(\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta'-\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta)^2 ,\\ +(\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma'-\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.}\gamma)^2 ,\\ +(\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha'-\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha)^2 .\end{cases}$$

Mais, si du produit des deux premières équations (A) on retranche le quarré de la quatrième, on aura

$$(\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta'-\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta)^2+(\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma'-\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.}\gamma)^2+(\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha'-\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha)^2=1 ;$$

on a donc simplement

$$\int AA'-\int B^2=\int PP' , \qquad \text{ou} \qquad \int PP'=\int AA'-\int B^2.$$

Il nous reste encore à trouver $PP'P''$; pour y parvenir formons le produit $AA'A''$, dans les équations (C), nous aurons

$$AA'A''=\begin{cases}\int P^3\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma ,\\ +\int P^2P'(\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}\gamma'+\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}^2\alpha'+\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}\beta') ,\\ +KPP'P'' ;\end{cases}$$

K représentant la fonction de cosinus qui multiplie $PP'P''$.

Effectuons aussi le produit des équations (D), il viendra

$$BB'B''=\begin{cases}\int P^3\text{Cos.}^2\alpha\ \text{Cos}\ \beta.\text{Cos.}\gamma ,\\ +\int P^2P'(\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.}\gamma'+\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta')\\ +K'PP'P''.\end{cases}$$

K' étant le coefficient de $PP'P''$.

Les équations (C) et (D) donnent encore

$$AB^2=\begin{cases}\int P^3\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma ,\\ +\int P^2P'(\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}^2\alpha'+2\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\beta'\text{Cos.}\gamma')\\ +K''PP'P'' ;\end{cases}$$

$$A'B'^2 = \left\{\begin{array}{l} \int P^3 \text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma\ , \\ +\int P^2P'(\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta'^2 + 2\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha') \\ +K'''PP'P''\ ; \end{array}\right.$$

$$A''B''^2 = \left\{\begin{array}{l} \int P^3 \text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos}^2\gamma\ , \\ +\int P^2P'(\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma' + 2\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta') \\ +K''''PP'P''\ . \end{array}\right.$$

Avec un peu d'attention, on conclura facilement de ces trois dernières équations et des deux précédentes.

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 = F.PP'P''. \quad \text{(E)}$$

Pour obtenir la valeur de F, j'observe qu'étant simplememt une fonction de cosinus, sa valeur est indépendante de celles que l'on peut attribuer aux coefficiens A, A', A'', B, B', B''; ainsi posons

$$A=1\ , \quad A'=1\ , \quad A''=1\ , \quad B=0\ , \quad B'=0\ , \quad B''=0\ ,$$

Les équations (C), (D), deviennent les équations (B), lorsque $P=1$, $P'=1$, $P''=1$; donc l'équation (E) sera vraie, dans la même hypothèse, et comme elle se réduit à $F=1$, on en conclut que

$$PP'P'' = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2\ ;$$

partant l'équation du troisième degré qui a pour racines P, P', P'', sera

$$t^3 - (A+A'+A'')t^2 + (A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2)t + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - 2BB'B'' - AA'A'' = 0.$$