
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Addition au précédent mémoire

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 335-338

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__335_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1811-1812, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Addition au précédent mémoire ;

Par M. GERGONNE.



ON peut atteindre au but que vient de remplir M. Rochat par une autre méthode, moins élémentaire il est vrai, mais qui a l'avantage de n'exiger aucune transformation de coordonnées, et qui peut fournir une agréable et utile application de la doctrine des *Maximis et Minimis* à ceux qui étudient le calcul différentiel ; je vais l'exposer brièvement.

Soit reprise l'équation

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 ; \quad (M)$$

et, outre le point de la courbe dont les coordonnées sont x et y , considérons-en un autre dont les coordonnées soient x' et y' ; nous aurons pour ce nouveau point.

$$ay'^2 + bx'y' + cx'^2 + dy' + ex' + f = 0 ; \quad (M')$$

posons

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 = \text{maximum} ; \quad (N)$$

nos deux points seront alors les extrémités de la plus grande corde de la courbe.

L'équation (N) revient à

$$(x-x')(\delta x - \delta x') + (y-y')(\delta y - \delta y') = 0 ; \quad (n)$$

d'un autre côté, on tire des équations (M) et (M')

$$(2ay + bx + d)\delta y + (2cx + by + e)\delta x = 0 , \quad (m)$$

$$(2ay' + bx' + d)\delta y' + (2cx' + by' + e)\delta x' = 0 ; \quad (m')$$

ajoutant les produits de ces deux dernières par les multiplicateurs indéterminés λ et $-\lambda'$ à l'équation (n) il viendra

$$\left. \begin{aligned} & [(x-x') + \lambda(2cx + by + e)]\delta x - [(x-x') + \lambda'(2cx' + by' + e)]\delta x' \\ & + [(y-y') + \lambda(2ay + bx + d)]\delta y - [(y-y') + \lambda'(2ay' + bx' + d)]\delta y' \end{aligned} \right\} = 0 ;$$

donc

$$(x-x') + \lambda(2cx + by + e) = 0 , \quad (x-x') + \lambda'(2cx' + by' + e) = 0 ,$$

$$(y-y') + \lambda(2ay + bx + d) = 0 , \quad (y-y') + \lambda'(2ay' + bx' + d) = 0 ;$$

éliminant λ et λ' entre ces équations, elles deviendront

$$(2ay + bx + d)(x-x') = (2cx + by + e)(y-y') , \quad (P)$$

$$(2ay' + bx' + d)(x-x') = (2cx' + by' + e)(y-y') . \quad (P')$$

On satisfait à ces équations, quel que soit le premier des points pris sur la courbe, en supposant que le second se confond avec lui, ce qui donne sur-le-champ la direction de la tangente en ce point, ainsi que cela doit être.

Rejetant cette hypothèse et retranchant l'équation (P') de l'équation (P) il vient

$\{2a'y-y'\}+b(x-x')\}(x-x')=\{2c(x-x')+b(y-y')\}(y-y')$;
 mais, en désignant par α l'angle que fait la corde que nous considérons ici avec l'axe des x , on a

$$\text{Tang.}\alpha = \frac{y-y'}{x-x'}, \quad \text{d'où } y-y' = (x-x')\text{Tang.}\alpha,$$

substituant donc, il viendra, en réduisant, transposant et divisant par $x-x'$

$$\text{Tang.}^2\alpha - 2\frac{a-c}{b} \text{Tang.}\alpha - 1 = 0. \quad (\text{K})$$

Ainsi, dans les lignes du deuxième ordre, les cordes dont la variation est nulle, n'affectent que deux directions, et les tangentes des angles qu'elles forment avec l'axe des x se trouvent déterminées par l'équation précédente. On voit de plus que ces directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, puisque le produit des deux tangentes est égal à -1 .

En ajoutant, au contraire, l'une à l'autre les équations (P), (P'), substituant pour $y-y'$, dans l'équation résultante, sa valeur $(x-x')\text{Tang.}\alpha$ et divisant par $x-x'$, il vient

$$(2a-b\text{Tang.}\alpha)(y+y') - (2c\text{Tang.}\alpha-b)(x+x') + 2(d-e\text{Tang.}\alpha) = 0. \quad (\text{G})$$

D'un autre côté, en retranchant l'équation (M') de l'équation (M), le double de l'équation résultante peut être mis sous cette forme

$$\left. \begin{aligned} & [2a(y+y')+b(x+x')+2d](y-y') \\ & + [2c(x+x')+b(y+y')+2e](x-x') \end{aligned} \right\} = 0;$$

ou, en chassant encore $y-y'$ et divisant par $x-x'$,

$$(2a\text{Tang.}\alpha+b)(y+y') + (2c+b\text{Tang.}\alpha)(x+x') + 2(d\text{Tang.}\alpha+e) = 0. \quad (\text{H})$$

Les équations (G) et (H) donnent

$$\frac{1}{2}(x+x') = \frac{2ae-bd}{b^2-4ac}, \quad \frac{1}{2}(y+y') = \frac{2cd-ae}{b^2-4ac};$$

ainsi, les cordes des lignes du second ordre dont la variation est

nulle, ont leurs milieux au même point qu'on appelle leur *centre*; et, puisque ces cordes doivent d'ailleurs se couper perpendiculairement, elles sont au nombre de deux seulement. On les appelle les *axes de la courbe*.

Ces axes ont donc pour équation commune

$$y - \frac{2cd - ae}{b^2 - 4ac} = \left\{ x - \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac} \right\} \text{Tang. } \alpha ,$$

équation double, à cause des deux valeurs de $\text{Tang. } \alpha$; cette équation combinée avec celle de la courbe fera connaître les longueurs de ces mêmes axes.
