ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ROCHAT

Géométrie analitique. Construction des formules qui servent à déterminer directement la grandeur et la situation des diamètres principaux, dans les courbes du second degré rapportées à deux axes rectangulaires quelconques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 331-335
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__331_1>

On voit, par la manière dont nous avons déterminé la constante dans d.x^m, que notre méthode peut être employée à déterminer la forme d'une fonction inconnue qui doit satisfaire à une relation donnée.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Construction des formules qui servent à déterminer directement la grandeur et la situation des diamètres principaux, dans les courbes du second degré rapportées à deux axes rectangulaires quelconques.

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

On donne, dans plusieurs ouvrages élémentaires, des méthodes propres à la recherche des diamètres principaux des courbes du second degré, rapportées à deux axes rectangulaires quelconques; mais, les calculs relatifs à cette recherche n'y étant point terminés, j'ai pensé qu'il pouvait être utile de remplir cette lacune, en donnant des formules propres à ramener directement l'équation

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \qquad (1)$$

à la forme

$$\pm A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \;,$$

si b^2-4ac n'est pas zéro; et à la forme

$$y^2=Px \;,$$

dans le cas contraire.

Pour parvenir à ce but, changeons d'abord, dans l'équation (1), x en $x'+m$, et y en $y'+n$, et ensuite x' en $x''\text{Cos.}\alpha-y''\text{Sin.}\alpha$, et y' en $x''\text{Sin.}\alpha+y''\text{Cos.}\alpha$; la transformée en x'' et y'' sera

$$\left.\begin{array}{r} a\,\mathrm{Cos.}^2\alpha \\ -b\,\mathrm{Sin.}\alpha\,\mathrm{Cos.}\alpha \\ +\,c\,\mathrm{Sin.}^2\alpha \end{array}\right| y''^2 + \left.\begin{array}{r} 2a\,\mathrm{Sin.}\alpha\,\mathrm{Cos.}\alpha \\ -2c\,\mathrm{Sin.}\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha \\ +b\,\mathrm{Cos}^2\alpha \\ -b\,\mathrm{Sin.}^2\alpha \end{array}\right| x''y'' + \left.\begin{array}{r} a\,\mathrm{Sin.}^2\alpha \\ +b\,\mathrm{Sin.}\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha \\ +\quad c\,\mathrm{Cos.}^2\alpha \end{array}\right| x''^2 + \left.\begin{array}{r} d'\,\mathrm{Cos.}\alpha \\ -e'\,\mathrm{Sin}\,\alpha \end{array}\right| y'' + \left.\begin{array}{r} d'\,\mathrm{Sin.}\alpha \\ +e'\,\mathrm{Cos.}\alpha \end{array}\right| x'' + f' = 0;$$

équation dans laquelle on a

$$d' = 2an + bm + d\ ,\qquad e' = 2cm + bn + e\ ,\qquad f' = an^2 + bmn + cn^2 + dn + em + f.$$

Posons présentement

$$b(\mathrm{Cos.}^2\alpha - \mathrm{Sin.}^2\alpha) + 2(a - c)\,\mathrm{Sin.}\alpha\,\mathrm{Cos.}\alpha = 0\ ,$$
$$a\,\mathrm{Cos.}^2\alpha - b\,\mathrm{Sin.}\alpha\,\mathrm{Cos.}\alpha + c\,\mathrm{Sin.}^2\alpha = M\ ,$$
$$a\,\mathrm{Sin.}^2\alpha + b\,\mathrm{Sin.}\alpha\,\mathrm{Cos.}\alpha + c\,\mathrm{Cos.}^2\alpha = N\ ;$$

nous trouverons (*Voyez* Biot ou Garnier)

$$\mathrm{Tang.}2\alpha = -\frac{b}{a-c}\ ,\qquad M = \tfrac{1}{2}\left\{(a+c) + \sqrt{b^2 + (a-c)^2}\right\}\ ,\qquad N = \tfrac{1}{2}\left\{(a+c) - \sqrt{b^2 + (a-c)^2}\right\}\ ;$$

et la transformée sera

$$My''^2 + Nx''^2 + (d'\,\mathrm{Cos.}\alpha - e'\,\mathrm{Sin.}\alpha)y'' + (d'\,\mathrm{Sin.}\alpha + e'\,\mathrm{Cos.}\alpha)x'' + f' = 0. \quad (2)$$

Soit, en premier lieu $b^2 - 4ac$ positif ou négatif, différent de zéro; en posant

$$d'\,\mathrm{Cos.}\alpha - e'\,\mathrm{Sin.}\alpha = 0\ ,\qquad d'\,\mathrm{Sin.}\alpha + e'.\mathrm{Cos.}\alpha = 0\ ,$$

il viendra (*Voyez* les Auteurs cités)

$$a = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}\ ,\qquad b = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}\ ;$$

et la transformée sera simplement

$$My''^2 + Nx''^2 + f' = 0.$$

Si nous désignons respectivement par A et B, dans cette équation, les valeurs de x'' et y'' qui répondent à $y'' = 0$ et $x'' = 0$, nous aurons

$$M=-\frac{f'}{B^2}\ ,\quad N=-\frac{f'}{A^2}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant et chassant les dénominateurs,

$$A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2.$$

Si présentement nous portons les valeurs déterminées ci-dessus pour a et b dans celle de f', elle deviendra, toutes réductions faites,

$$f'=\frac{ae^2+cd^2-bde}{b^2-4ac}+f\ ,$$

et de là nous conclurons

$$A=\sqrt{\frac{2[bde-ae^2-cd^2-(b^2-4ac)f]}{(b^2-4ac)[(a+c)-\sqrt{b^2+(a-c)^2}]}}\ ,$$

$$B=\sqrt{\frac{2[bde-ae^2-cd^2-(b^2-4ac)f]}{(b^2-4ac)[(a+c)+\sqrt{b^2+(a-c)^2}]}}\ .$$

Ainsi le centre sera donné par les valeurs de a et b, les grandeurs des axes par celles de A et B, et leurs directions par celle de $\text{Tang.}2\alpha$

Soit, en deuxième lieu, $b^2-4ac=0$, d'où $M=a+c$, $N=0$; nous supposerons alors, dans l'équation (2)

$$f'=an^2+bmn+cm^2+dn+em+f=0\ ,\quad d'\text{Cos.}\alpha-e'\text{Sin.}\alpha=0\ ;$$

et la transformée sera

$$My''^2+(d'\text{Sin.}\alpha+e'\text{Cos.}\alpha)x''=0.$$

Présentement comme nous avons trouvé ci-dessus

$$\text{Tang.}2\alpha=-\frac{b}{a-c}\ ,$$

puisqu'on a d'ailleurs

$$\text{Tang.}2\alpha=\frac{2\text{Tang.}\alpha}{1-\text{Tang.}^2\alpha}\ ,$$

il viendra, en égalant ces deux valeurs

$$b\text{Tang.}^2\alpha-2(a-c)\text{Tang.}\alpha-b=0\ ,$$

d'où

$$\text{Tang.}\alpha=\frac{(a-c)\pm\sqrt{b^2+(a-c)^2}}{b}=\frac{(a-c)\pm(a+c)}{b}\,,$$

c'est-à-dire,

$$\text{Tang.}\alpha=\frac{2a}{b}\,,\qquad \text{Tang.}\alpha=-\frac{2c}{b}\,,$$

d'un autre côté l'équation $d'\text{Cos.}\alpha-e'\text{Sin.}\alpha=0$ donne

$$\text{Tang.}\alpha=\frac{d'}{e'}=\frac{2an+bm+d}{2cm+bn+e}\,;$$

valeurs qui ne saurait s'accorder avec $\text{Tang.}\alpha=\frac{2a}{b}$, parce qu'elles conduiraient à la condition $bd-2ae=0$ qui, jointe à $b^2-4ac=0$, exprime, comme l'on sait, que la courbe degenère dans le système de deux droites. Il faudra donc prendre $\text{Tang.}\alpha=-\frac{2c}{b}$; en égalant cette valeur à la précédente, et résolvant l'équation résultante par rapport à m, il viendra

$$m=-\frac{2b(a+c)n-(bd+2ce)}{b^2+4c^2}\,.$$

En mettant cette valeur dans l'équation $f'=0$, et se rappelant la relation $b^2-4ac=0$, le coefficient de n^2 disparaitra, et il viendra

$$n=\frac{c^2e^2+abde+2ace^2-acd^2-4cf(a+c)^2}{2(a+c)^2(2cd-be)}\,,$$

et par suite

$$m=\frac{a^2d^2+bcde+2acd^2-ace^2-4af(a+c)^2}{2(a+c)^2(2ae-bd)}\,.$$

On a en outre

$$d'\text{Sin.}\alpha+e'\text{Cos.}\alpha=(d'\text{Tang.}\alpha+e')\text{Cos.}\alpha$$

or, $\qquad \text{Tang.}\alpha=-\frac{2c}{b}$, d'où $\text{Cos.}\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+4c^2}}$; donc

$$d'\text{Sin.}\alpha+e'\text{Cos.}\alpha=-\frac{2cd-be}{\sqrt{b^2+4c^2}}\,;$$

posant donc

$$P=\frac{2cd-be}{(a+c)\sqrt{b^2+4c^2}}\,;$$

la transformée sera

$$y''^2=Px''.$$

Ainsi les coordonnées du sommet seront données par les valeurs de m et n, la direction de l'axe par celle de Tang.α, et le paramètre par celle de P.

Au surplus, comme, dans certains cas particuliers, ces formules pourraient devenir illusoires, il sera convenable d'y remplacer b par $2\sqrt{ac}$; on aura ainsi

$$\text{Tang.}\alpha=-\sqrt{\frac{c}{a}}\,,\quad P=\frac{d\sqrt{c}-e\sqrt{a}}{(a+c)\sqrt{a+c}}\,,$$

$$m=\frac{ad^2\sqrt{a}+2cde\sqrt{c}+2cd^2\sqrt{a}-ce^2\sqrt{a}-4f(a+c)^2\sqrt{a}}{4(a+c)^2(e\sqrt{a}-d\sqrt{c})}\,,$$

$$n=\frac{ce^2\sqrt{c}+2ade\sqrt{a}+2ae^2\sqrt{c}-ad^2\sqrt{c}-4f(a+c)^2\sqrt{c}}{4(a+c)^2(d\sqrt{c}-e\sqrt{a})}\,;$$

sous cette forme leur application n'entrainera plus aucune difficulté.