ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

VECTEN

Septième solution ; construction géométrique du problème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 307-310
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__307_0>

Septième solution ;

Construction géométrique du problème ;

Par M. VECTEN, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes.

LEMME I. Si plusieurs triangles semblables ACB, A′C′B′ (fig. 11) ont leurs angles homologues C, C′ inscrits au même arc $aC'Cb$, et que, dans chacun d'eux, on mène la droite CM, C′M′ qui joint le sommet C, C′ au milieu M, M′ du côté opposé AB, A′B′; les prolongemens des droites CM, C′M′ iront tous concourir en un même point m, sur la circonférence dont l'arc $aC'Cb$ fait partie.

Démonstration. Dans les triangles semblables, les droites qui joignent les sommets homologues aux milieux des côtés opposés étant des lignes homologues, doivent faire des angles égaux avec leurs côtés homologues; les angles bCM et bC′M′ sont donc égaux, et doivent conséquemment comprendre des arcs égaux entre leurs côtés: puis donc que ces arcs ont une extrémité commune b et vont dans le même sens, ils doivent se terminer à un même point m.

Corollaire. Il suit de là que, le triangle ACB étant seulement donné d'espèce, et inconnu, tant de grandeur que de situation par rapport à la corde ab, il est néanmoins possible de déterminer le point m où l'arc amb est rencontré par la droite CM menée de son sommet C au milieu M du côté opposé AB; il suffit en effet, pour cela, de déterminer le point m pour un autre triangle A′C′B′ arbitrairement construit semblable à celui-là, et ayant son angle C′, homologue à C, inscrit comme ce dernier à l'arc $aC'b$.

LEMME II. Soient deux cercles (fig. 12) ayant la droite ab pour corde commune; soit un troisième cercle ayant son centre O sur ab, et coupant les deux premiers en m et m' et la droite ab en p et q; soient menées mp et $m'p$, prolongées jusqu'à la rencontre des deux circonférences en C et C′ ; soit enfin menée CC′ coupant ab en γ ; il s'agit de prouver que CC′ est perpendiculaire à ab.

Pour le démontrer, soit d'abord menée mm' ; par les propriétés des cordes qui se coupent dans le cercle, on aura, à la fois,

$$\left.\begin{array}{l} pC \times pm = pa \times pb \\ pC' \times pm' = pa \times pb \end{array}\right\} \text{d'où } pC \times pm = pC' \times pm' ;$$

donc les triangles CpC' et mpm' sont semblables, d'où il suit que l'angle C, égal à l'angle m', est mesuré par la moitié de l'arc pm ; mais d'un autre coté, l'angle $\gamma p C$, égal à mpq, doit être mesuré par la moitié de l'arc mq ; donc, dans le triangle $C\gamma p$, la somme des deux angles C et p est mesuré par la moitié de la demi-circonference pmq ; cette somme vaut donc un angle droit ; ce triangle est donc rectangle en γ et par conséquent CC′ est perpendiculaire à ab.

Corollaire. Si donc on proposait ce problème : » Deux points m » et m' étant donnés sur deux circonferences ayant une corde com- » mune ab ; déterminer, sur cette corde ab, un point p par lequel » et par chacun des points m et m' menant les cordes mC et $m'C'$, » la droite CC′ soit perpendiculaire à ab ? » Il faudrait, pour le résoudre, décrire un cercle dont le centre fût sur ab, et dont la circonference passât par les points m et m' ; chacune des intersections p et q de cette circonference avec la droite ab pourrait être prise pour le point cherché.

PROBLÈME. Deux triangles étant donnés, déterminer sur quel plan il faut projeter orthogonalement le premier, pour que sa projection soit semblable à l'autre; construire de plus cette projection ainsi que l'inclinaison des deux plans ; et déterminer, en outre, la situation du triangle et celle de sa projection par rapport à la commune section de ces deux plans ?

Analise. Concevons que le problème soit déjà résolu. Soient ABC (fig. 13) le triangle à projeter, A′B′C′ sa projection, semblable à un triangle donné, et ab l'intersection de leurs plans. Soient M et M' les milieux de AB et A'B'; M' sera la projection de M, et il est clair que CA, CM, CB prolongés iront concourir aux mêmes points a, p, b de ab, avec les prolongemens de C'A', C'M', C'B'. Soient enfin menées AA', BB', CC', perpendiculaires au plan de projection, et Aα, Bβ, Cγ perpendiculaires à ab; en menant A'α, B'β, C'γ, ces droites seront aussi perpendiculaires à ab.

Concevons présentement que l'on fasse tourner le plan du triangle ACB autour de la commune section ab, jusqu'à ce que ce plan soit devenu le même que celui du triangle A'C'B', comme on le voit (fig. 14); dans ce mouvement, les points a, p, b, α, β, γ demeureront immobiles, et les droites Aα, Bβ, Cγ, ne cessant pas d'être perpendiculaires à ab, deviendront les prolongemens de A'α, B'β, C'γ. Quant à la longueur de ab, comme tout plan parallèle à celui de A'B'C' peut être pris, comme lui, pour le plan de projection, il s'ensuit que cette longueur est tout à fait arbitraire.

De cette analise découle naturellement la construction suivante.

Construction. Sur l'arbitraire ab (fig. 14) soient décrits, de différens côtés, des arcs capables de deux angles correspondans C et C' tant du triangle à projeter que de sa projection. Sur les parties restantes des deux circonférences, soient déterminés (*Corollaire du Lemme* 1) les points m et m' où ces arcs seraient rencontrés par les droites joignant les sommets C, C' aux milieux des côtés opposés. Soit enfin déterminé sur ab (*Corollaire du Lemme* 2) un point p par lequel et par les points m et m' menant aux deux cercles les cordes mC et m'C', la droite CC' soit perpendiculaire en γ sur ab; alors C et C' seront les sommets cherchés: formant donc sur l'angle C un triangle ACB égal au triangle à projeter et abaissant des points A, B, sur ab des perpendiculaires Aα, Bβ prolongées jusqu'en A' et B' à leurs rencontres respectives avec C'a et C'b, le triangle A'C'B' sera la projection demandée. Quant à l'inclinaison des deux plans, elle sera l'angle aigu d'un triangle rectangle compris entre une hypothénuse égale à γC, et un côté de l'angle droit égal à γC'.

Comme le problème de la détermination du point p a deux solutions (fig. 12), savoir le point p et le point q, on pourrait croire que le problème proposé en a deux aussi ; mais, en exécutant l'operation sur le point q, on se convaincra facilement que le triangle rectangle qui doit donner l'inclinaison des deux plans ne peut être construit, de maniere que le problème n'a jamais qu'une solution au plus.

Ce problème serait meme impossible si la projection de l'un des angles du triangle à projeter devait être égale à cet angle même ; à moins cependant que les projections des deux autres ne dussent aussi leur être égales ; auquel cas les deux plans devraient être parallèles, et la situation du triangle à projeter indeterminée sur l'un de ces plans. (*)