TÉDENAT

Troisième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 303-305
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__303_0>

Troisième solution ;

Par M. TÉDENAT, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Soit ACB le triangle à projeter, (fig. 9) et supposons, ce qui est permis, que le plan de projection passe par le point C ; soit CD l'intersection du plan de cette projection avec le plan du triangle ACB ; des points A et B soient abaissées, sur le plan de projection, les perpendiculaires AA$''$, BB$''$; en joignant CA$''$, CB$''$, A$''$B$''$, le triangle A$''$CB$''$ sera la projection du triangle ACB, et les prolongemens des droites AB, A$''$B$''$ devront rencontrer en un même point D l'intersection des plans des deux triangles. Soient enfin prolongés les droites CA$''$, CB$''$ en A$'$ et B$'$, de telle sorte que CA$'$, CB$'$ soient respectivement égales aux deux côtés de l'angle égal à C dans le triangle donné d'espèce auquel la projection de ACB doit être semblable. En joignant A$'$B$'$, cette droite sera parallèle à A$''$B$''$, et A$'$CB$'$ sera ce triangle donné d'espèce.

Les triangles ACB, A$'$CB$'$ étant donnés, posons

$$CA=a\ ,\quad CB=b\ ,\quad \text{Ang.}ACB=\gamma\ ,\quad AB=c$$
$$CA'=a'\ ,\quad CB'=b'\ ,\quad \text{Ang.}A'CB'=\gamma'\ ;\quad A'B'=c'$$

en désignant par λ le rapport inconnu entre les côtés homologues des deux triangles A$'$CB$'$, A$''$CB$''$, on aura

$$CA''=\lambda a'\ ,\quad CB''=\lambda b'\ ,\quad A''B''=\lambda c'\ ;$$

on aura de plus

$$\text{Aire de } ACB=\tfrac{1}{2}ab\text{Sin.}\gamma\ ,\quad \text{Aire de } A''CB''=\tfrac{1}{2}\lambda^2a'b'\text{Sin.}\gamma'\ ;$$

Si donc l'on désigne par θ l'inclinaison des deux plans, on aura, comme l'on sait

$$\lambda^2a'b'\text{Sin.}\gamma'=ab\text{Sin.}\gamma\text{Cos.}\theta \qquad \text{(I)}$$

Présentement, en faisant $AA''=x$, $BB''=y$, les triangles rectangles $AA''C$ et $BB''C$, et le quadrilatère bi-rectangle $AA''B''B$ donneront

$$x^2=a^2-\lambda^2a'^2\,,\quad y^2=b^2-\lambda^2b'^2\,,$$
$$(x-y)^2=c^2-\lambda^2c'^2\,;$$

La dernière de ces équations étant retranchée de la somme de deux autres, il viendra

$$2xy=a^2+b^2-c^2-\lambda^2(a'^2+b'^2-c'^2)=2ab\text{Cos.}\gamma-2\lambda^2a'b'\text{Cos.}\gamma'\,;$$

ou en divisant par 2 et quarrant

$$x^2y^2=a^2b^2\text{Cos.}^2\gamma-2\gamma^2aba'b'\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'+\lambda^4a'^2b'^2\text{Cos.}^2\gamma\,;$$

égalant cette valeur de x^2y^2 à celle qui résulte de la multiplication des deux premières équations, en changeant les cosinus en sinus, il viendra

$$\lambda^4a'^2b'^2\text{Sin.}^2\gamma-(a^2b'^2-2aa'bb'\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'+a'^2b^2)\lambda^2+a^2b^2\text{Sin.}\gamma=0\,;$$

substituant enfin pour λ^2 sa valeur donnée par l'équation (1), on aura

$$a^2a'b^2b'\text{Sin.}\gamma\text{Sin.}\gamma'\text{Cos.}^2\theta-ab(a^2b'^2-2aa'bb'\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'+a'^2b^2)\text{Cos.}\theta$$
$$+a^2a'b^2b'\text{Sin.}\gamma\text{Sin.}\gamma'=0.$$

Cette équation donnera, étant résolue, la valeur de Cosθ. (*) d'où

(*) En posant, pour abréger,

$$a^2b'^2-2aa'bb'\text{Cos.}(\gamma+\gamma')+a'^2b^2=M^2\,,$$
$$a^2b'^2-2aa'bb'\text{Cos.}(\gamma-\gamma')+a'^2b^2=N^2\,;$$

d'où

$$a^2b'^2-2aa'bb'\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'+a'^2b^2=\tfrac{1}{2}(M^2+N^2)\,;$$
$$2aa'bb'\text{Sin.}\gamma\text{Cos.}\gamma=\tfrac{1}{2}(M^2-N^2)\,;$$

les valeurs de Cos.θ prendront cette forme très-simple

$$\text{Cos.}\theta=\frac{(M\pm N)^2}{M^2-N^2}=\frac{M\pm N}{M\mp N}\,;$$

or, comme l'adoption des signes supérieurs conduirait à l'absurdité Cos.$\theta>1$, il faudra simplement écrire

$$\text{Cos.}\theta=\frac{M-N}{M+N}\,;$$

ce qui fournit cette construction très-remarquable :

ou

on conclura celle de λ, au moyen de l'equation (I); alors on aura x et y par les equations

$$x^2=a^2-\lambda^2a'^2\ ,\quad y^2=b^2-\lambda^2b'^2\ ;$$

on pourra donc connaître l'angle BCB″; cet angle étant déterminé, l'angle trièdre rectangle dont les arêtes sont CB″, CB, CD donnera

$$\text{Sin.BCD}=\frac{\text{Sin.BCB}''}{\text{Sin.}\theta}\ ,$$

et on aura enfin, dans le même angle trièdre

$$\text{Tang.B}''\text{CD}=\text{Tang.BCDCos.}\theta\ ;$$

alors on pourra sans peine construire la situation respective des deux triangles ACB et A″CB″ sur le developpement de l'angle drièdre formé par leurs plans.