D. ENCONTRE

Deuxième solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 300-302
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__300_1>

Deuxième solution ;

Par M. D. ENCONTRE, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier;

I. Soit ABC (fig. 7) le triangle qu'il s'agit de projeter, ses projections sur tous les plans parallèles à celui sur lequel on le projetera seront toutes égales. Nous pouvons donc supposer que le plan de projection passe par tel point qu'il nous plaira de choisir ; et nous choisirons le point A.

II. Soit menée AE parallèle à BC, les angles CAE et ACB seront égaux et les projections de BC et AE seront parallèles. Si donc nous parvenons à projeter AB, AC, AE, de manière que leurs projections forment des angles donnés, les projections de AB, AC, BC formeront aussi des angles donnés; d'où il suit que la question se réduit à trouver un plan sur lequel projetant orthogonalement deux angles adjacens donnés, compris dans un même plan, leurs projections soient des angles donnés. (*)

III. Soient BAC, CAD (fig. 8) les deux angles adjacens proposés ; prenons, à volonté, la longueur AB, et par B concevons, dans le plan BAD, une droite BCD, parallèle à la commune section AE des deux plans ; la direction de cette droite n'est pas connue.

Soient menées AF, perpendiculaire sur BD; puis Bb, Ff, Cc, Dd perpendiculaires sur le plan de projection; ces perpendiculaires seront égales, et auront leurs pieds sur une même droite bd parallèle à BD.

Joignons Ab, Af, Ac, Ad, les angles AbB, AfF, AcC, AdD seront droits, Af sera perpendiculaire à bd qui est parallèle à BD ; ainsi les droites FA et fA étant toutes deux perpendiculaires au même point A de la commune section AE des deux plans, l'angle linéaire FAf qu'elles formeront mesurera l'angle formé par ces deux plans.

IV. Faisons l'arbitraire $AB=1$; faisons en outre $\text{Sin.}BAC=\alpha$; $\text{Sin.}BAD=\beta$, $\text{Sin.}bAc=\gamma$, $\text{Sin.}bAd=\delta$.
Toutes ces quantités sont connues.

Faisons encore $Bb=Ff=Cc=Dd=x$, et $\text{Sin.}ABD=y$.
Ces quantités sont inconnues.

(*) Le problème envisagé de cette manière revient à celui-ci : *Etant données les différences tant des longitudes que des ascensions droites de trois points de l'écliptique, déterminer son inclinaison à l'équateur et le lieu de l'équinoxe ?* Les deux angles à projeter sont les différences entre les trois longitudes ; les angles que doivent former leurs projections sont les différences des ascensions droites ; enfin l'inclinaison des deux plans est l'obliquité de l'écliptique.

(*Note des éditeurs.*)

On a

$$\text{Sin.ACB}=\text{Sin.(BAC+CBA)}=\alpha\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-\alpha^2}=\text{P} \ ,$$

$$\text{Sin.ADB}=\text{Sin.(BAD+DBA)}=\beta\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-\alpha^2}=\text{Q} \ ;$$

en faisant donc entrer P et Q dans le calcul, nous n'introduirons pas de nouvelles inconnues.

V. d'après cela on a

$$\text{AF}=\frac{\text{Sin.ABF}}{\text{AB}}=y \ , \quad \text{Sin.FA}f=\frac{\text{F}f}{\text{AF}}=\frac{x}{y} \ ,$$

$$\text{Cos.FA}f=\frac{1}{y}\sqrt{y^2-x^2} \ , \quad \text{AC}=\frac{\text{AF}}{\text{Sin.ACF}}=\frac{y}{\text{P}} \ ,$$

$$\text{A}c=\sqrt{\text{AC}^2-\text{C}c^2}=\frac{1}{\text{P}}\sqrt{y^2-\text{P}^2x^2} \ ,$$

$$\text{AD}=\frac{\text{AF}}{\text{Sin.ADF}}=\frac{y}{\text{Q}} \ , \quad \text{A}b=\sqrt{1-x^2} \ ,$$

$$\text{A}d=\sqrt{\text{AD}^2-\text{D}d^2}=\frac{1}{\text{Q}}\sqrt{y^2-\text{Q}^2x^2} \ .$$

VI. Il ne s'agit plus maintenant que de trouver deux équations entre les deux inconnues x et y. Or, on sait que les aires des triangles BAC, BAD multipliées par le cosinus de l'angle FAf doivent donner pour produits les aires des triangles bAc, bAd; on sait d'ailleurs que

$$\begin{aligned}
\text{BAC}&=\tfrac{1}{2}\text{AB}\times\text{AC}\times\text{Sin.BAC} \ ,\\
b\text{A}c&=\tfrac{1}{2}\text{A}b\times\text{A}c\times\text{Sin.}\,b\text{A}c \ ,\\
\text{BAD}&=\tfrac{1}{2}\text{AB}\times\text{AD}\times\text{Sin.BAD} \ ,\\
b\text{A}d&=\tfrac{1}{2}\text{A}b\times\text{A}d\times\text{Sin.}\,b\text{A}d \ ,
\end{aligned}$$

donc

$$\alpha\sqrt{y^2-x^2}=\delta\sqrt{1-x^2}.\sqrt{y^2-\text{P}^2x^2} \ ,$$

$$\beta\sqrt{y^2-x^2}=\delta\sqrt{1-x^2}.\sqrt{y^2-\text{Q}^2x^2} \ .$$

On peut simplifier ces équations ; mais l'équation finale à laquelle on parviendra, en éliminant, sera nécessairement très-compliquée.