ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Questions résolues. Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume ; première solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 293-300
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__293_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume ;

Première solution ;

Par M. LHUILIER, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

§. I.

LEMME. I. Trouver deux droites dont on connaît le rectangle et la différence des carrés ; ou, déterminer un triangle rectangle dont on connaît une des jambes de l'angle droit, et le rectangle de l'hypothénuse par l'autre jambe de l'angle droit ?

Soit ABX (fig. 3) un triangle rectangle dont on connaît une des jambes AB de l'angle droit, et le rectangle de l'hypothénuse AX par l'autre jambe BX de l'angle droit ; on demande ce triangle.

Que le rectangle donné $AX \times BX$ soit égal au rectangle du côté donné AB par une droite L, en sorte qu'on ait $AX \times BX = AB \times L$; on déduira de là

$$AX : AB = L : BX \ ,$$

et

$$AX^2 : AB^2 = L^2 : BX^2 \ ,$$

d'où

$$AX^2 : AB \times L = AB \times L : BX^2 .$$

Soit conçue la droite XZ perpendiculaire à AX et qui rencontre en Z le côté AB prolongé, on aura

$$AX^2 = AB \times AZ \ , \quad BX^2 = AB \times BZ \ ;$$

donc

$$AZ : L = L : BZ \ ;$$

donc on connaît la différence AB et le rectangle L^2 des deux droites AZ et BZ ; donc ces droites sont données.

Construction. Que le côté AB soit prolongé en Z, de manière que le rectangle $AZ \times BZ$ soit égal au carré de la droite donnée L. Sur AZ, comme diamètre, soit décrit un demi-cercle dont la circonférence rencontre en X la perpendiculaire à AB élevée depuis le point B ; en menant AX, le triangle AXB sera le triangle demandé.

En appliquant le calcul à cette construction, on trouve d'abord

$$AZ = \sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2 + L^2} + \tfrac{1}{2}AB \ ,$$

$$BZ = \sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2 + L^2} - \tfrac{1}{2}AB \ ;$$

et ensuite

$$AX^2 = AB\left\{\sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2 + L^2} + \tfrac{1}{2}AB\right\} ,$$

$$BX^2 = AB\left\{\sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2 + L^2} - \tfrac{1}{2}AB\right\} .$$

Remarque. On peut traiter ce problème d'une manière purement algébrique comme il suit.

Soient

$$AX=x\ ,\quad BX=y\ ,\quad AB=a\ ,$$

les équations du problème seront

$$x^2-y^2=a^2\quad ,\qquad xy=al\ ,$$

ajoutant au carré de la première le quadruple du carré de la seconde, il viendra, en extrayant la racine quarrée de l'équation résultante,

$$x^2+y^2=2a\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+l^2}\ ,$$

mais on a

$$x^2-y^2=a^2\ ;$$

donc

$$x^2=a\left\{\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+l^2}+\tfrac{1}{2}a\right\}\ ,$$
$$y^2=a\left\{\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+l^2}-\tfrac{1}{2}a\right\}\ .$$

§. 2.

LEMME. II. Soient deux droites parallèles entre elles, données de position ; et soit un point donné de position, sur le plan de ces droites. On demande, sur l'une des parallèles, un point duquel menant deux droites perpendiculaires entre elles, dont une passe par le point donné, et dont l'autre soit terminée à la seconde des parallèles données, la différence des carrés de ces droites soit donnée?

Soient AA', BB', (fig. 4) deux droites parallèles entre elles, données de position ; et soit P un point donné sur le plan de ces parallèles. On demande, sur l'une de ces droites, telle que AA', un point X, duquel menant deux droites, l'une XP au point donné P, et l'autre XZ, perpendiculaire à XP, et terminée en Z à l'autre parallèle ; la différence des carrés de XZ et de PX soit donnée de grandeur ?

Des points P et Z soient abaissées sur AA' les perpendiculaires

PA et ZY. L'angle PXZ étant supposé droit, les angles PXA, ZXY, valent ensemble un angle droit, et partant les triangles PXA, XZY sont equiangles ; donc

$$PA:AX=XY:ZY \quad \text{ou} \quad AP\times ZY=AX\times XY.$$

Mais les droites PA et ZY sont données de grandeur ; donc le rectangle $AX\times XY$ est aussi donné de grandeur.

Or, $$PX^2=AP^2+AX^2,$$
et $$XZ^2=ZY^2+XY^2,$$
donc $$XZ^2-PX^2=(ZY^2-AP^2)+(XY^2-AX^2).$$

Donc, on connait le rectangle des droites XY et AX, et la différence de leurs carrés ; donc (*Lemme* 1) ces droites sont l'une et l'autre connues.

§. 3.

PROBLÈME. Couper un prisme triangulaire donné par un plan, de manière que la section soit donnée d'espèce ?

Soit B (fig. 5) un point donné, sur l'une BB′ des arêtes d'un prisme triangulaire, dont les deux autres arêtes sont AA′, CC′. On demande de couper ce prisme par un plan passant par D, de manière que la section soit donnée d'espèce ?

Soit BXY la section cherchée.

Analise. Du point B soit abaissée sur le plan de la face opposée la perpendiculaire BP. Du point P soit abaissée sur la commune section XY de cette face et du plan cherché la perpendiculaire PZ ; et soit menée BZ. La droite BZ sera la hauteur de la section, en prenant XY pour base et B pour sommet.

Le triangle BXY étant donné d'espèce, le rapport de XZ à ZY est connu, et partant le point Z appartient à une droite donnée de position, parallèle à AA′ et CC′, et sur le plan de ces droites ; soit cette droite DD′.

Le rapport de XZ à BZ est aussi donné ; et partant si, sur la droite XZ, on conçoit portée une droite ZV égale à BZ, le point

V

V appartiendra aussi à une droite donnee de position, parallèle à DD′, et toujours dans le plan de AA′ et CC′. Soit EE′ cette droite.

Cela posé, la difference des carres de BZ et PZ est egale au carré de la droite donnee BP ; donc aussi la différence des carrés de ZV et de PZ est égale au carré de la droite donnée BP, et les droites PZ et ZV sont l'une perpendiculaire à l'autre ; donc (*Lemme*) ces droites sont determinees. De là découle la construction suivante :

Construction. Du point B soit abaissée sur la face opposée une perpendiculaire BP. Sur cette face soient determinées deux droites (parallèles aux arêtes du prisme) telles que, menant une droite quelconque sur le plan de cette face, les parties de cette droite, comprises entre la première parallèle et les deux arètes, soient entre elles dans le rapport donné des segmens faits sur la base de la section, par la perpendiculaire abaissée de son sommet sur cette base ; et que la partie de la même droite, comprise entre ces deux parallèles, soit à la partie de cette droite comprise entre la première et l'une des deux arêtes dans le rapport donné de la hauteur du même triangle au segment correspondant de sa base. Que DD′ et EE′ soient ces deux parallèles. Soit déterminé sur la première (*Lemme* 2) un point Z tel que, menant de ce point deux droites perpendiculaires entre elles, l'une ZP, terminée au pied P de la perpendiculaire BP, et l'autre ZV, terminée en V sur EE′, la différence des carrés de ces deux droites soit égale au carré de la perpendiculaire BP. La section XBZ qui passera par le point B et par la droite ZV, sera la section cherchée.

§. 4.

Application au problème proposé. Que la projection donnée d'espèce soit prise pour base d'un prisme droit ; soit coupé ce prisme par un plan, de manière que la section soit semblable au triangle donné. La base du prisme et la section sont entre elles comme la projection demandée du triangle proposé est à ce triangle.

Corollaire. Un parallélogramme étant proposé, on peut le projeter orthographiquement, de manière que sa projection soit un autre parallélogramme donné d'espèce. En particulier, on peut projeter un parallelogramme orthographiquement, de manière que sa projection soit un carré.

§. 5.

On peut rechercher immédiatement les angles que les côtés BX et BY font avec l'arete BB′, et partant l'inclinaison des plans du triangle projeté et de sa projection orthographique donnée d'espèce.

Que les côtés BA et BC de la section perpendiculaire aux arêtes adjacents au point B soient désignés par a et c; que l'angle compris soit designé par β; que les angles B′BX et B′BY soient désignés par x et par y; que l'angle B du triangle XBY soit désigné par b; qu'enfin le rapport des côtés BX et BY soit celui de α à γ; on aura

$$a = \mathrm{BX}\,\mathrm{Sin}.x \quad , \qquad c = \mathrm{BY}\,\mathrm{Sin}.y$$

donc

$$a : c = \alpha\,\mathrm{Sin}.x : \gamma\,\mathrm{Sin}.y \quad \text{d'où} \quad c\,\mathrm{Sin}.x = \gamma\,\mathrm{Sin}.y \ ;$$

donc

$$\mathrm{Sin}.y = \frac{c}{\gamma}\,\mathrm{Sin}.x \ , \quad \mathrm{Cos}.y = \sqrt{1 - \frac{c^2}{\gamma^2}\,\mathrm{Sin}.^2x} \ .$$

Or, dans l'angle solide triangulaire formé en B, par les angles B′BX, B′BY, XBY, on a

$$\mathrm{Cos}.\beta = \frac{\mathrm{Cos}.b - \mathrm{Cos}.x\,\mathrm{Cos}.y}{\mathrm{Sin}.x\,\mathrm{Sin}.y} \ .$$

Mettant pour Sin.y et Cos.y leurs valeurs et chassant les dénominateurs, il viendra

$$c\,\mathrm{Cos}.\beta\,\mathrm{Sin}.^2x = \gamma\,\mathrm{Cos}.b - \mathrm{Cos}.x.\sqrt{\gamma^2 - c^2\,\mathrm{Sin}.^2x} \ ,$$

dégageant cette equation de l'irrationnalité, et mettant pour Cos.^2x sa valeur $1 - \mathrm{Sin}.^2x$, elle deviendra, toutes réductions faites,

$$c^2\,\mathrm{Sin}.^2\beta\,\mathrm{Sin}.^4x - (c^2 - 2c\gamma\,\mathrm{Cos}.b\,\mathrm{Cos}.\beta + \gamma^2)\,\mathrm{Sin}.^2x + \gamma^2\,\mathrm{Sin}.^3b = 0 \ ;$$

on obtiendra de même,

$$\gamma^4 \text{Sin.}^2\beta \text{Sin.}^4 y - \gamma^2(c^2 - 2c\gamma \text{Cos}b \text{Cos.}\beta + \gamma^2)\text{Sin.}^2 y + c^2\gamma^2 \text{Sin.}^2 l = 0.$$

Lorsqu'on a déterminé les angles x et y, on a déterminé les rapports des dimensions du triangle à projeter et de sa projection; partant aussi on a determiné le rapport des surfaces de ce triangle et de sa projection. Or, ce rapport est celui du sinus total au cosinus de l'inclinaison de leurs plans entre eux; partant cette inclinaison est connue.

§. 6

Le problème qui fait l'objet du *Lemme premier* est un cas particulier d'un problème plus général, dans lequel l'angle B au lieu d'être droit est un angle quelconque.

Ce problème général est solide. Je vais en exposer la solution par l'intersection du cercle et d'une parabole.

Soit ABX un triangle (fig. 6) dont on connaît un côté AB, un angle B sur ce côté, différent d'un droit, et le rectangle des deux autres côtés AX et BX, on demande ce triangle.

Soit Ab perpendiculaire à BX; et que le rectangle donné soit égal au rectangle de la perpendiculaire Ab par une droite l donnée de grandeur.

Puisqu'on a

$$AX \times BX = Ab \times l,$$

on doit avoir

$$AX : Ab = l : BX \quad \text{d'où} \quad AX^2 : Ab^2 = l^2 . BX^2;$$

donc

$$AX^2 - Ab^2 : Ab^2 = l^2 - BX^2 : BX^2,$$

ou

$$bX^2 : Ab^2 = l^2 - BX^2 : BX^2.$$

Du point B comme centre, avec le rayon l soit décrit un cercle; et que la perpendiculaire élevée à BX depuis le point X rencontre en Y la circonférence de ce cercle ; on aura $l^2 - BX^2 = XY^2$; donc

$$bX : Ab = XY : BX ,$$

d'où
$$Ab \times XY = bX \times BX ;$$

donc le point Y est à une parabole dont Bb est une double coordonnee de l'axe, et dont le paramètre est la perpendiculaire Ab.

Remarque. La parabole qui passe par le centre B du cercle dont le rayon est l, coupe toujours en deux points, au moins, la circonférence de ce cercle ; mais elle peut aussi couper cette circonference en deux autres points, ou la toucher en un point ou ne la rencontrer en aucun autre point. Au cas du contact répond une limite, en petitesse, du rectangle proposé. Comme ce problème est seulement accessoire au but principal de ce mémoire, je ne crois pas devoir insister sur la discussion de ces différens cas.

Ce dernier problème, envisagé algébriquement, conduit à une équation du quatrième degré.

Soit $AB = a$, et que l'angle B soit désigné par φ. Soit $BX = x$, le rectangle donné est $x\sqrt{x^2 - 2ax \text{Cos.}\varphi + a^2}$; que ce rectangle soit p^2, on a l'équation

$$x^4 - 2ax^3 \text{Cos.}\varphi + a^2x^2 - p^4 = 0 ;$$

cette équation a au moins deux racines réelles.