ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Solutions du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume. Première solution

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 270-279

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__270_1>

Solutions du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume.

Première solution ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Le cas dans lequel le polygone proposé est un triangle, est de première facilité ; en particulier il se construit par fausse position de la manière la plus simple. Il n'en est plus de même lorsque le nombre des côtés du polygone proposé est plus grand que trois.

LEMME. Soient des droites données de grandeur. On demande de couper chacune d'elles en deux parties, de manière que les rapports de ces parties, deux à deux, soient donnés, sous les conditions suivantes : on connaît le rapport d'une partie de la première à une partie de la seconde ; celui de l'autre partie de la seconde à une partie de la troisième ; celui de l'autre partie de la troisième à une partie de la quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne au rapport de la seconde partie de la dernière à la seconde partie de la première.

Premier exemple. Que les droites données soient au nombre de deux seulement. Soient AB et A′B′ deux droites données de grandeur (fig. 6), à couper en X et X′, de manière que les rapports de

AX à B'X' et de A'X' à BX soient, l'un et l'autre, égaux à des rapports donnés.

Que le rapport donné de AX à B'X' soit égal au rapport de AB à B'b'; et soit porté B'b' sur B'A' de B' vers A'.

On a $AX : B'X' = AB : B'b'$,

d'où $BX : b'X' = AB : B'b'$;

si donc on pose $A'X' : BX = L : AB$,

il viendra $A'X' : b'X' = L : B'b'$;

on connaît donc la différence A'b' (s'il y a lieu) et le rapport des droites A'X' et b'X' , et conséquemment ces droites sont l'une et l'autre déterminées.

Construction. Que le rapport donné de AX à B'X' soit présenté sous la forme du rapport de AB à B'b' , et soit portée B'b' sur B'A'. Que le rapport de A'X' à BX soit aussi présenté sous la forme du rapport d'une droite L à AB. Enfin soient déterminées les droites A'X' et b'X' dont la différence A'b' est donnée , et dont le rapport est celui de L à AB.

Remarque. Pour que le problème soit déterminé , les points b' et A' ne doivent pas coïncider. En effet , si le rapport de AX à B'X' est donné égal au rapport de AB à A'B', le rapport de BX à A'X' se trouve déterminé à être égal au même rapport, et la question proposée demeure indéterminée. Cette question est impossible , si le rapport de AX à B'X' étant donné égal au rapport de AB à A'B', le rapport de BX à A'X' n'est pas donné égal au même rapport.

Second exemple. Que les droites données soient au nombre de trois. Soient AB, A'B' , A''B'' , (fig. 7) trois droites , données de grandeur , à couper en X , X' , X'' , respectivement , de manière que chacun des trois rapports $AX : B'X'$, $A'X' : B''X''$, $A''X'' : BX$ soient égaux à des rapport donnés.

Que le rapport de AX à B'X' soit égal au rapport de AB à B'a' ; et soit porté B'a' sur B'A' de B' vers A'.

On a $AX : B'X' = AB : B'a'$,

d'où $\qquad BX : a'X' = AB : B'a'$;

posant donc $\qquad A''X'' : BX = L : AB$,

il viendra $\qquad A''X'' : a'X' = L : B'a'$.

Soit en outre

$$L : B'a' = A''B'' : b'a' ;$$

donc $\qquad A''X'' : a'X' = A''B'' : b'a'$;

et $\qquad B''X'' : b'X' = A''B'' : b'a'$,

posant donc $\qquad A'X' : B''X'' = M : A''B''$,

il viendra enfin $\qquad A'X' : b'X' = M : b'a'$.

On connaît donc la somme $A'b'$ et le rapport des droites $A'X'$ et $b'X'$; donc ces droites sont l'une et l'autre connues.

Troisième exemple. Que les droites données soient au nombre de quatre. Soient AB, $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ (fig. 8), quatre droites données de grandeur, à couper en X, X', X'', X''', de manière que chacun des quatre rapports $AX : B'X'$, $A'X' : B''X''$, $A''X'' : B'''X'''$, $A'''X''' : BX$, soient égaux à des rapports donnés.

Soit fait $\qquad AX : B'X' = AB : B'a'$,

d'où $\qquad BX : a'X' = AB : B'a'$;

posant donc $\qquad A'''X''' : BX = L : AB$,

il viendra $\qquad A'''X''' : a'X' = L : B'a'$.

Soit encore $\qquad L : B'a' = A'''B''' : a'b'$,

d'où $\qquad A'''X''' : a'X' = A'''B''' : a'b'$;

et conséquemment $\qquad B'''X''' : b'X' = A'''B''' : a'b'$;

posant donc $\qquad A''X'' : B'''X''' = M : A'''B'''$,

il viendra $\qquad A''X'' : b'X' = M : a'b'$.

Partant, on connait, de grandeur, les droites $A'b'$ et $A''B''$, et les rapports $A'X' : B''X''$, $A''X'' : b'X'$; donc la question proposée sur quatre droites est ramenée à la question correspondante sur deux droites. Et, comme cette dernière est susceptible d'indétermination et d'impossibilité, aussi la question proposée sur quatre droites est susceptible d'indétermination et d'impossibilité.

On montrera précisément, de la même manière, que la question proposée

proposée sur cinq droites est ramenée à la question correspondante sur trois droites; et partant la question est toujours possible, déterminée et susceptible d'une seule solution. On montrera aussi que la question proposée sur six droites est ramenée à la question correspondante sur quatre droites, et partant qu'elle est susceptible d'impossibilité et d'indétermination.

En général, la question étant proposée sur un nombre quelconque de droites (plus grand que deux), elle est toujours ramenée à la question correspondante sur des droites dont le nombre est inférieur de deux unités. Si donc le nombre des droites données est impair, le problème est finalement ramené à trouver deux droites dont on connait la difference et le rapport. Afin donc que, dans ce cas, le problème soit possible et déterminé, la différence ne doit pas évanouir, et le rapport donné ne doit pas être un rapport d'égalité. Si la différence évanouit, le rapport est déterminé à être celui d'égalité, et alors la question est indéterminée.

Remarque. On résout sensiblement de la même manière les cas dans lesquels les droites données sont, en tout ou en partie, des différences des droites cherchées. Le nombre des droites données étant quelconque, pair ou impair, si le nombre de celles auxquelles répond une somme est pair, la question est susceptible d'indétermination ou d'impossibilité.

PROBLÈME. A un polygone donné, inscrire un polygone de même nom, dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données de position ?

Solution. Dans chacun des triangles retranchés par les côtés du polygone inscrit, lesquels ont pour bases les cotés de ce polygone et pour sommets les sommets correspondans du polygone donné; dans ces triangles, dis-je, les angles sont donnés; partant, ces triangles sont donnés d'espèce, et en particulier les rapports de ceux de leurs côtés qui font partie des côtes du polygone proposé, sont donnes. Delà la question est immédiatement ramenée au *lemme* qui vient de nous occuper.

Savoir : désignons par A, A', A'',....A^{N-1}, A^N, les sommets du polygone donné, et par X, X', X'',....X^{N-1}, X^N, les sommets du polygone cherché, de manière que le sommet X soit sur A^NA, le sommet X' sur AA', et ainsi de suite. On connaît les droites A^NA, AA', $A'A''$,....$A^{N-1}A^N$, et les rapports $AX:XA'$, $A'X':X'A''$, $A''X'':X''A'''$,....$A^NX^N:X^NA$ de leurs parties.

Puisque cette inscription est ramenée à notre *lemme*, elle est possible et unique, lorsque le nombre des côtés du polygone proposé est impair; elle est susceptible d'impossibilité ou d'indétermination, lorsque le nombre des côtés de ce polygone est pair.

Je crois devoir éclaircir l'indétermination, si elle a lieu, par quelques exemples.

Premier exemple. Soit un quadrilatère $AA'A''A'''$, (fig. 9) dont AA'' et $A'A'''$ soient les diagonales. A la diagonale $A'A'''$ soit menée arbitrairement une parallèle, se terminant en X et X''' aux côtés AA' et AA''' de ce quadrilatère. Par les points X et X''' soient menées à l'autre diagonale AA'' des parallèles, se terminant en X' et X'' aux côtés $A''A'$ et $A''A'''$, et soit enfin menée $X'X''$. J'affirme que cette droite sera, comme XX''', parallèle à la diagonale $A'A'''$; et partant que le quadrilatère $XX'X''X'''$ est un parallélogramme.

On a, en effet, par construction,

$$\begin{aligned} A''X':AX &= A''A':A'A \quad, \\ AX:AX''' &= A'A:AA''' \quad, \\ AX''':A''X'' &= AA''':A''A''' \quad; \end{aligned}$$

donc
$$A''X':A''X''=A''A':A''A''' \quad;$$

donc $X'X''$ est parallèle à $A'A'''$.

Ou bien, les rapports $X'A':A'X$, $XA:AX'''$, $X'''A''':A'''X''$ étant respectivement égaux aux rapports $A''A':A'A$, $A'A:AA'''$, $AA''':A''A'''$, le rapport $A''X':A''X''$ est déterminé à être égal au rapport $A''A':A''A'''$: et le nombre des polygones équiangles inscriptibles au quadrilatère proposé est illimité.

Second exemple. Soit $AA'A''A'''A''''A^V$ un hexagone. (fig. 10) Soient menées les diagonales AA'', $A'A'''$, $A''A''''$, $A'''A^v$, $A''''A$, qui retranchent deux côtés. Par un point X, pris arbitrairement sur l'un AA' des côtés, soit menée à la diagonale AA'' une parallèle terminée en X' au côté $A'A''$; par X' soit menée à la diagonale $A'A'''$ une parallèle terminée en X'' au côté $A''A'''$; soient de même menées $X''X'''$ parallèle à $A''A''''$, $X'''X''''$ parallèle à $A'''A^v$, $X''''X^v$ parallèle à $A''''A$, et soit enfin menée X^vX ; j'affirme que cette dernière droite est parallèle à la diagonale $A'A^v$.

On a, en effet, par construction

$$XA' : A'X' = AA' : A'A'' ,$$
$$A'X' : X''A''' = A'A'' : A''A''' ,$$
$$X''A''' : A'''X''' = A''A''' : A'''A'''' ,$$
$$A'''X''' : X''''A^v = A'''A'''' : A''''A^v ,$$
$$X''''A^v : X^vA^v = A''''A^v : AA^v ,$$

donc
$$XA' : X^vA^v = AA' : AA^v ;$$

donc la droite XX^v est parallèle à la diagonale $A'A^v$.

Partant, les rapports $XA':A'X'$, $A'X':X''A'''$, $X''A''':A'''X'''$, $A'''X''':X''''A^v$, $X''''A^v:X^vA^v$ étant respectivement égaux aux rapports $AA':A'A''$, $A'A'':A''A'''$, $A''A''':A'''A^v$, $A'''A'''':A''''A^v$, $A''''A^v:AA^v$, le rapport $XA':X^vA^v$ se trouve déterminé à être égal au rapport $AA':AA^v$ ou encore, dans le polygone $XX'X''X'''X''''X^v$, les côtés XX', $X'X''$, $X''X'''$, $X'''X''''$, $X'''X^v$ étant respectivement parallèles aux diagonales AA'', $A'A'''$, $A''A''''$, $A'''A^v$, $A''''A$, le côté restant X^vX se trouve déterminé à être parallèle à la diagonale A^vA'; et le nombre des hexagones, équiangles entre eux, inscriptibles à l'hexagone proposé, sous les conditions données, demeure illimité.

Cette propriété s'étend à tous les polygones d'un nombre de côtés pair, en menant des parallèles aux diagonales qui joignent les extrémités des côtés des angles du polygone donné.

Scholie. Le problème proposé trouve une application qui mérite d'être mentionnée. Qu'on demande d'*inscrire à un polygone donné un polygone de même nom dont le contour soit le plus petit ?* Il est aisé de démontrer que les deux côtés de chacun des angles du polygone cherché doivent faire des angles égaux avec le coté du polygone donné sur lequel est situé le sommet de cet angle (*). Si le polygone proposé a un nombre impair de cotés, ces angles sont determines par les angles du polygone proposé, et l'inscription demandee est unique et determinée. Mais, si le polygone propose a un nombre pair de cotés, pour que le problème soit possible, la somme des angles de rang pair du polygone proposé, à partir de l'un quelconque, doit être egale à la somme de ses angles de rang impair (**). Cette égalité étant supposée, le nombre des polygones à inscrire est illimité; et ils ont tous le même plus petit contour. Cette application remarquable fait l'objet d'une dissertation qui est à la suite de mon ouvrage intitulé : *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum.*

(*) Voyez le tome 1 des *Annales*, page 375, *lemme I.*

(**) Cette proposition revient à la suivante : *si entre* n *inconnues* x_1, x_2, x_3 ; ... x_{n-1}, x_n, *on a* n *équations de la forme*

$$
\begin{gathered}
x_1+x_2=A_1 \\
x_2+x_3=A_2 \\
\cdots\cdots \\
x_{n-1}+x_n=A_{n-1} \\
x_n+x_1=A_n
\end{gathered}
$$

et que n *soit un nombre impair, ces inconnues seront déterminées. Si, au contraire,* n *est pair, le problème ne sera possible que sous certaine relation entre les données; relation qui, si elle a lieu, rendra ce problème indéterminé.*

On a, en effet, 1.° dans le cas de n impair

$$(A_1+A_3+\ldots+A_n)-(A_2+A_4+\ldots+A_{n-1})=2x_1\,;$$

2.° Dans le cas de n pair.

$$(A_1+A_3+\ldots+A_{n-1})-(A_2+A_4+\ldots+A_n)=0$$

équation de condition qui, suivant qu'elle aura ou n'aura pas lieu, rendra le problème indéterminé ou impossible.

(*Notes des éditeurs.*)

La différence que présentent, à l'égard du sujet de ce mémoire, les polygones rectilignes, suivant que le nombre de leurs côtés est pair ou impair, n'est pas la seule qui distingue ces deux classes de polygones. Je vais encore en donner deux exemples.

Qu'on demande d'inscrire à un cercle donné un polygone dont les angles soient donnés. Cette condition suffit pour determiner le polygone cherché, lorsque le nombre de ses côtés est impair, de manière que l'inscription est toujours possible. Au contraire, le nombre des côtés étant pair, l'inscription est possible seulement, lorsque la somme des angles donnés de rang pair est égale à celle des angles donnés de rang impair. L'égalité entre ces deux sommes ayant lieu en effet, le nombre des polygones inscriptibles, sous les conditions données, demeure illimité; et, pour que le problème soit determiné, on doit ajouter quelque condition indépendante de la connaissance des angles, et qui soit, par exemple, relative au contour ou à la surface.

De même, qu'on demande de circonscrire à un cercle donné un polygone (dont le nombre des côtés est plus grand que trois) ayant des côtés donnés; ce problème est susceptible d'une seule solution, si le nombre des côtés du polygone à construire est impair. Mais, que le nombre des côtés de ce polygone soit pair, une condition essentielle, pour que le problème soit possible, est que la somme des côtés de rang pair soit égale à la somme des côtés de rang impair. Cette égalité étant supposée, le problème est susceptible d'un nombre illimité de solutions.

Le procédé que j'ai suivi pour résoudre le problème proposé, consiste à diminuer successivement de deux unités le nombre des côtés du polygone à construire, et partant à réduire finalement la question proposée à l'inscription d'un triangle, d'une part, pour les polygones impairs, et à celle du quadrilatère, pour les polygones pairs. On peut aussi traiter chaque polygone immédiatement, sans ramener la question à un polygone d'un moindre nombre de côtés. Il me suffira d'exposer ce procédé sur un quadrilatère.

Soit $AA'A''A'''$ un quadrilatère auquel on doit inscrire un autre quadrilatère $XX'X''X'''$, dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données.

Que les angles du premier quadrilatère soient désignés par A A', A'', A''' et soient faits

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{Ang.}A\,X\,X'''=\alpha\ , & \mathrm{Ang.}A'\,X\,X'=\beta\ , \\
\mathrm{Ang.}A'\,X'\,X=\alpha'\ , & \mathrm{Ang.}A''\,X'\,X''=\beta'\ , \\
\mathrm{Ang.}A''\,X''\,X'=\alpha''\ , & \mathrm{Ang.}A'''X''\,X'''=\beta''\ , \\
\mathrm{Ang.}A'''X'''X''=\alpha'''\ , & \mathrm{Ang.}A\,X'''X=\beta'''\ ;
\end{array}$$

soit enfin $XA'=x$, on aura

$$A'X'=x.\frac{\mathrm{Sin.}\beta}{\mathrm{Sin.}\alpha'}\ , \qquad A''X'=A'A''-x.\frac{\mathrm{Sin.}\beta}{\mathrm{Sin.}\alpha'}\ ,$$

$$A''X''=A'A''.\frac{\mathrm{Sin.}\beta'}{\mathrm{Sin.}\alpha''}-x.\frac{\mathrm{Sin.}\beta.\mathrm{Sin.}\beta'}{\mathrm{Sin.}\alpha'.\mathrm{Sin.}\alpha''}\ , \quad A'''X''=A''A'''-A'A''.\frac{\mathrm{Sin.}\beta'}{\mathrm{Sin.}\alpha''}+x.\frac{\mathrm{Sin.}\beta.\mathrm{Sin.}\beta'}{\mathrm{Sin.}\alpha'.\mathrm{Sin.}\alpha''}\ ,$$

$$A'''X'''=A''A'''.\frac{\mathrm{Sin.}\beta''}{\mathrm{Sin.}\alpha'''}-A'A''.\frac{\mathrm{Sin.}\beta'\,\mathrm{Sin}\,\beta''}{\mathrm{Sin.}\alpha''\mathrm{Sin.}\alpha'''}+x.\frac{\mathrm{Sin.}\beta.\mathrm{Sin.}\beta'.\mathrm{Sin.}\beta''}{\mathrm{Sin}\alpha'.\mathrm{Sin}\alpha''.\mathrm{Sin.}\alpha'''}\ ,$$

$$A\,X'''=A'''A-A''A'''.\frac{\mathrm{Sin.}\beta''}{\mathrm{Sin.}\alpha'''}+A'A''.\frac{\mathrm{Sin.}\beta'.\mathrm{Sin.}\beta''}{\mathrm{Sin.}\alpha''.\mathrm{Sin}\alpha'''}-x.\frac{\mathrm{Sin.}\beta.\mathrm{Sin.}\beta'.\mathrm{Sin.}\beta''}{\mathrm{Sin}\alpha'.\mathrm{Sin}\alpha''.\mathrm{Sin.}\alpha'''}\ ,$$

$$A\,X=A'''A.\frac{\mathrm{Sin.}\beta'''}{\mathrm{Sin.}\alpha}-A''A'''.\frac{\mathrm{Sin.}\beta''.\mathrm{Sin.}\beta'''}{\mathrm{Sin.}\alpha.\mathrm{Sin.}\alpha'''}+A'A''.\frac{\mathrm{Sin.}\beta'.\mathrm{Sin.}\beta''.\mathrm{Sin.}\beta'''}{\mathrm{Sin.}\alpha.\mathrm{Sin.}\alpha'''.\mathrm{Sin.}\alpha''}$$

$$-x.\frac{\mathrm{Sin.}\beta.\mathrm{Sin.}\beta'.\mathrm{Sin.}\beta''.\mathrm{Sin}\,\beta'''}{\mathrm{Sin.}\alpha.\mathrm{Sin.}\alpha'''.\mathrm{Sin.}\alpha''.\mathrm{Sin.}\alpha'}=AA'-x.$$

Cette dernière équation donne

$$\left\{1-\frac{\mathrm{Sin}\,\beta.\mathrm{Sin.}\beta'.\mathrm{Sin.}\beta''.\mathrm{Sin.}\beta'''}{\mathrm{Sin.}\alpha.\mathrm{Sin.}\alpha'.\mathrm{Sin.}\alpha''.\mathrm{Sin.}\alpha'''}\right\}x=$$

$$AA'-A'A''.\frac{\mathrm{Sin.}\beta'.\mathrm{Sin.}\beta''.\mathrm{Sin}\,\beta'''}{\mathrm{Sin.}\alpha.\mathrm{Sin.}\alpha'''.\mathrm{Sin.}\alpha''}+A''A'''.\frac{\mathrm{Sin.}\beta''.\mathrm{Sin.}\beta'''}{\mathrm{Sin.}\alpha.\mathrm{Sin.}\alpha'''}-A'''A.\frac{\mathrm{Sin.}\beta'''}{\mathrm{Sin.}\alpha}\ ;$$

d'où on tire

$$x=\frac{\begin{array}{c}AA'.\text{Sin}.\alpha.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''-A'A''.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\beta'.\text{Sin}.\beta''.\text{Sin}.\beta'''\\+A''A'''.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha'''.\text{Sin}.\beta''\,\text{Sin}.\beta'''-A'''A.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''.\text{Sin}.\beta'''\end{array}}{\text{Sin}.\alpha.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''-\text{Sin}.\beta.\text{Sin}.\beta'.\text{Sin}.\beta''.\text{Sin}.\beta'''}.$$

Le problème est impossible si, entre les données, on a la seule équation

$$\text{Sin}.\alpha.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''.=\text{Sin}.\beta.\text{Sin}.\beta'.\text{Sin}.\beta''.\text{Sin}.\beta'''.$$

Mais si l'on a, en outre,

$$\left.\begin{array}{l}AA'.\text{Sin}.\alpha.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''\\+A''A'''.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha'''.\text{Sin}.\beta''.\text{Sin}.\beta'''\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}A'A''.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\beta'.\text{Sin}.\beta''.\text{Sin}.\beta'''\\+A'''A.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''.\text{Sin}.\beta'''\end{array}\right.$$

le problème est indéterminé.

Si, en particulier, on a

$$\alpha=\beta\,,\qquad \alpha'=\beta'\,,\qquad \alpha''=\beta''\,,\qquad \alpha'''=\beta'''\,,$$

la première condition est d'elle-même satisfaite, et la seconde devient

$$AA'.\text{Sin}.\alpha+A''A'''.\text{Sin}.\alpha''=A'A''.\text{Sin}.\alpha'+A'''A.\text{Sin}.\alpha'''.$$

Il faut donc alors que cette condition soit remplie pour que le problème soit possible ; et, si elle l'est en effet, ce problème demeure indéterminé.

Le procédé est exactement le même pour les polygones d'un plus grand nombre de côtés, et ne diffère de celui-ci que pour la longueur.

Lorsque le nombre des côtés du polygone proposé est impair, le dénominateur de la fraction qui exprime la valeur de x, au lieu d'être la différence de deux produits, en est la somme ; et conséquemment il n'y a lieu alors ni à impossibilité ni à indétermination.

Scholie. On peut réunir, sous un même énoncé, le problème qui fait l'objet de ce mémoire, et celui qui est résolu à la page 115 de ce volume, comme il suit : *A un polygone donné, inscrire un polygone de même nom dont quelques-uns des côtés passent par des points donnés de position, et dont les autres soient parallèles à des droites données de position ?*