ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

PILATTE

**Analise indéterminée. Résolution, en nombres entiers positifs, de l'équation générale du premier degré à deux indéterminées**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 2 (1811-1812), p. 230-237
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__230_1>

# ANALISE INDÉTERMINÉE.

*Résolution, en nombres entiers positifs, de l'équation générale du premier degré à deux indéterminées.*

Par M. Pilatte, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.

Nous nous proposons ici de résoudre en nombres entiers positifs, lorsque cela est possible, l'équation du premier degré à deux indéterminées

$$a_1x+ax_1=b.$$

En supposant que $a$, $a_1$, $b$ sont des nombres entiers, que $a$ et $a_1$ sont premiers entre eux, et qu'on a $a>a_1$, nous aurons à considérer successivement les trois équations

$$a_1x+ax_1=b,$$

$$a_1x-ax_1=b,$$

$$ax_1-a_1x=b;$$

ce sont, en effet, les seules variétés de la proposée, compatibles avec les conditions du problème.

## §. 1.

*Solution de l'équation* $a_1x+ax_1=b$.

Opérons sur $a$ et $a_1$, comme si nous cherchions leur plus grand commun diviseur; nommons $a_2$, $a_3$, ... $a_{n-1}$, $a_n$ les restes successifs dont le dernier sera nécessairement égal à l'unité, et $q_1$, $q_2$, $q_3$, ... $q_{n-1}$, $q_n$ les quotiens, nous aurons cette suite d'équations

$$\left.\begin{array}{l} a\;\;\;=a_1\,q_1\;+a_2\;, \\ a_1\;=a_2\,q_2\;+a_3\;, \\ a_2\;=a_3\,q_3\;+a_4\;, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\;, \\ a_{n-2}=a_{n-1}q_{n-1}+a_n\;, \\ a_{n-1}=q_n\;. \end{array}\right\}\quad (\mathrm{A})$$

Mettant pour $a$ sa valeur dans la proposée, divisant par $a_1$ et transposant, on aura

$$x=\frac{b-a_2x_1}{a_1}-q_1x_1\;;$$

mais $x, x_1$ devant être des nombres entiers, et $q_1$ étant lui-même un nombre entier, en désignant par $x_2$ un nombre entier indéterminé, on devra avoir

$$x_2=\frac{b-a_2x_1}{a_1}\,,\quad \text{d'où}\quad a_2x_1+a_1x_2=b\;;$$

ainsi l'on a

$$\begin{array}{ll} \text{d'une part} & x=x_2-q_1x_1\;, \\ \text{et de l'autre} & a_2x_1+a_1x_2=b\;. \end{array}$$

Opérant sur cette dernière équation, comme sur la proposée, en continuant les mêmes raisonnemens et les hypothèses analogues, nous formerons ces deux séries d'équations

$$\left.\begin{array}{l}
a_1\,x+a\,x_1=b,\\
a_2\,x_1+a_1\,x_2=b,\\
a_3\,x_2+a_2\,x_3=b,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
a_{n-2}x_{n-3}+a_{n-3}x_{n-2}=b,\\
a_{n-1}x_{n-2}+a_{n-2}x_{n-1}=b,\\
x_{n-1}+a_{n-1}x_n=b;
\end{array}\right\}(\mathrm{B})
\qquad
\left.\begin{array}{l}
x=x_2-q_1\,x_1\,;\\
x_1=x_3-q_2\,x_2\,,\\
x_2=x_4-q_3\,x_3\,,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\,,\\
x_{n-3}=x_{n-1}-q_{n-2}x_{n-2}\,,\\
x_{n-2}=x_n-q_{n-1}x_{n-1}\,,\\
x_{n-1}=b-a_{n-1}x_n\,,
\end{array}\right\}(\mathrm{C})$$

Si maintenant on substitue la valeur de $x_{n-1}$ dans celle de $x_{n-2}$, celle-ci dans celle de $x_{n-3}$, et ainsi de suite on parviendra, à la fin, à des valeurs entières des $x_1$ et $x$; mais, en exécutant ces substitutions, on s'apèrçoit bientot qu'elles deviennent plus faciles et plus symétriques, en posant d'abord les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_{n-1}=1\,,\\
\alpha_{n-2}=\alpha_{n-1}q_{n-1}\,,\\
\alpha_{n-3}=\alpha_{n-2}q_{n-2}+\alpha_{n-1}\,,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,\\
\alpha_2=\alpha_3\,q_3+\alpha_4\,,\\
\alpha_1=\alpha_2\,q_2+\alpha_3\,,\\
\alpha=\alpha_1\,q_1+\alpha_2\,,
\end{array}\right\}(\mathrm{D})$$

Procédant alors aux substitutions, on aura pour 1.re équation

$$x_{n-1}=\alpha_{n-1}b-a_{n-1}x_n\,,$$

puis

$$x_{n-2}=-\alpha_{n-1}q_{n-1}b+(a_{n-1}q_{n-1}+1)x_n\,;$$

observant alors que, par les équations (D), $\alpha_{n-1}q_{n-1}=\alpha_{n-2}$, et que par les équations (A), $a_{n-1}q_{n-1}+1=a_{n-2}$, il viendra

$$x_{n-2}=-\alpha_{n-2}b+a_{n-2}x_n.$$

En continuant ce procédé, on formera le système d'équations

$x_{n-1}$

$$\left.\begin{array}{lll}
x_{n-1} & = +\alpha_{n-1}b-a_{n-1}x_n & , \\
x_{n-2} & = -\alpha_{n-2}b+a_{n-2}x_n & , \\
x_{n-3} & = +\alpha_{n-3}b-a_{n-3}x_n & , \\
\ldots\ldots\ldots & & , \\
x_2 & = \pm\alpha_2\ b\mp a_2\ x_n & , \\
x_1 & = \mp\alpha_1\ b\pm a_1\ x_n & , \\
x & = \pm\alpha\ b\mp a\ x_n & ;
\end{array}\right\}\ (E)$$

équations dans lesquelles il faudra prendre les signes *supérieurs* ou les signes *inférieurs*, suivant que $n$ sera *impair* ou *pair*. Cette remarque s'étendant également à tout ce qui va suivre, nous nous dispenserons de la répéter.

Pour calculer rapidement les valeurs des inconnues $x_1$ et $x$, on cherchera d'abord les quotiens $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n=a_{n-1}$ ; on écrira ensuite $\alpha_{n-1}$ ou $1$ sous le quotient $q_{n-1}$ ; on multipliera $q_{n-1}$ par $1$ et l'on aura $\alpha_{n-2}$ qu'on écrira sous $q_{n-2}$ ; on multipliera $q_{n-2}$ par $\alpha_{n-2}$, au produit on ajoutera $\alpha_{n-1}$ ou $1$, et l'on aura $\alpha_{n-3}$ qu'on écrira sous $q_{n-3}$ ; on multipliera $q_{n-3}$ par $\alpha_{n-3}$, au produit on ajoutera $\alpha_{n-2}$, et l'on aura $\alpha_{n-4}$ : on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on soit parvenu à $\alpha_1$ et $\alpha$.

Nous ne répéterons pas ici les remarques connues, sur les diverses valeurs qu'on peut obtenir pour $x$ et $x_1$ ; nous observerons seulement que, bien que le nombre entier $x_n$ puisse être pris à volonté, il est néanmoins compris entre certaines limites, déterminées par la condition que $x$ et $x_1$ soient des nombres entiers positifs ; il faudra donc qu'on ait généralement

$$x_n\left\{\begin{array}{l} <\dfrac{\alpha b}{a}\,, \\[2ex] >\dfrac{\alpha_1 b}{a_1}\,, \end{array}\right\}\ \text{si } n \text{ est impair}\,,$$

$$x_n \left\{ \begin{matrix} > \dfrac{\alpha b}{a}\,, \\ \\ < \dfrac{\alpha_1 b}{a_1}\,, \end{matrix} \right\} \text{si } n \text{ est pair.}$$

Il y aura autant de solutions différentes qu'il se trouvera de nombres entiers compris entre $\frac{\alpha b}{a}$ et $\frac{\alpha_1 b}{a_1}$ ; et, s'il ne s'en trouve aucun entre ces deux limites, la proposée n'aura aucune solution en nombres entiers positifs.

On peut, à la simple inspection de la proposée, assigner, au moins à une unité près, le nombre des solutions qu'elle peut admettre.

En effet, depuis $\frac{\alpha b}{a}$ jusqu'à $\frac{\alpha_1 b}{a_1}$, il doit y avoir au moins autant de nombres entiers ou, au plus, autant de nombres entiers plus un que la différence $\pm\left(\frac{\alpha b}{a}-\frac{\alpha_1 b}{a_1}\right)$ contient d'unités entières; mais on a

$$\begin{aligned}
\pm\left(\frac{\alpha b}{a}-\frac{\alpha_1 b}{a_1}\right) &= \pm\frac{b}{aa_1}\left(a_1\alpha-a\alpha_1\right) \\
&= \mp\frac{b}{aa_1}\left(a_2\alpha_1-a_1\alpha_2\right) \\
&= \pm\frac{b}{aa_1}\left(a_3\alpha_2-a_2\alpha_3\right) \\
&= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&= \quad \frac{b}{aa_1}\alpha_{n-1}=\frac{b}{aa_1}\ ;\ (*)
\end{aligned}$$

donc la proposée admet autant de solutions, au moins, en nombres

(*) Pour obtenir ces résultats, il faut d'abord substituer pour $a$ et $\alpha$, ensuite pour $a_1$ et $\alpha_1$, $a_2$ et $\alpha_2$ etc., leurs valeurs tirées des équations (A) et (D). Il est de plus essentiel de se rappeler qu'il faut prendre les signes *supérieurs* ou *inférieurs*, suivant que $n$ est *impair* ou *pair*.

positifs, qu'il y a d'unités entières dans $\frac{b}{aa_1}$, et elle ne peut en admettre qu'une de plus.

## §. 2.

*Solution de l'équation* $a_1x - ax_1 = b$.

La méthode à suivre dans ce second cas est exactement la même que pour le premier. En conséquence, les systèmes (A) et (D) ne subissent aucun changement, et il suffit d'indiquer les modifications qu'éprouvent les systèmes (B), (C), (E) qui deviennent alors

$$\left.\begin{array}{l}
a_1\,x\;-a\;\;x_1 = +b,\\
a_2\,x_1-a_1\,x_2 = -b,\\
a_3\,x_2-a_2\,x_3 = +b,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{n-2}x_{n-3}-a_{n-3}x_{n-2} = \pm b,\\
a_{n-1}x_{n-2}-a_{n-2}x_{n-1} = \mp b,\\
x_{n-1}-a_{n-1}x_n = \pm b;
\end{array}\right\}(B')
\qquad
\left.\begin{array}{l}
x = x_2 + q_1\,x_1,\\
x_1 = x_3 + q_2\,x_2,\\
x_2 = x_4 + q_3\,x_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-3} = x_{n-1} + q_{n-2}x_{n-2},\\
x_{n-2} = x_n + q_{n-1}x_{n-1},\\
x_{n-1} = \pm b + a_{n-1}x_n,
\end{array}\right\}(C')$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_{n-1} = \pm\alpha_{n-1}b + a_{n-1}x_n,\\
x_{n-2} = \pm\alpha_{n-2}b + a_{n-2}x_n,\\
x_{n-3} = \pm\alpha_{n-3}b + a_{n-3}x_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_2 = \pm\alpha_2\,b + a_2\,x_n,\\
x_1 = \pm\alpha_1\,b + a_1\,x_n,\\
x = \pm\alpha\;b + a\;x_n,
\end{array}\right\}(E')$$

On voit qu'ici $x_n$ ne sera susceptible que d'une seule limite. Si $n$ est impair, on pourra prendre pour $x_n$ un nombre entier positif quelconque, et même un nombre négatif, pourvu qu'il ne soit pas plus grand que la plus petite des deux quantités $\frac{\alpha b}{a}$, $\frac{\alpha_1 b}{a_1}$.

Si $n$ est pair, on ne pourra prendre pour $x_n$ qu'un nombre positif, et ce nombre ne devra pas être moindre que la plus grande des deux quantités $\frac{\alpha b}{a}$, $\frac{\alpha_1 b}{a_1}$.

## §. 3.

### *Solution de l'équation* $ax_1 - a_1x = b$.

En mettant cette équation sous la forme $a_1x - ax_1 = -b$, on voit qu'elle ne diffère de celle qui vient d'être discutée que par le signe de $b$ ; il suffira donc, pour la résoudre, de changer le signe de $b$, dans toutes les formules du §. 2 : on aura donc

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \mp\alpha_1 b + a_1 x_n\,, \\ x &= \pm\alpha\, b + a\, x_n\,. \end{aligned}\right\} \quad (E'')$$

Il faudra donc appliquer à $n$ pair ce qui a été dit de $n$ impair, *et vice versâ.*

### *Applications.*

1.° Soit l'équation $13x + 19x_1 = 1000$, qui se rapporte au §. 1. On a d'abord $\frac{b}{aa_1} = \frac{1000}{13.19} > 4$ ; il y aura donc quatre solutions au moins et cinq au plus.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Suite des diviseurs | $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ .............. | 19 | 13 | 6 | 1 |
| Suite des quotiens | $q_1$, $q_2$, $q_3$ .............. | | 1 | 2 | 6 |
| Suite des quantités | $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ .............. | 3, | 2, | 1. | |

Puisque $n = 3$ est un nombre impair, on aura, en remplaçant $x_n$ par $e$.

$$x_1 = -2.1000 + 13e\,,$$
$$x = +3.1000 - 19e\,;$$

d'où on conclura

$$e \left\{ \begin{aligned} &> \tfrac{2000}{13} = 153 + \tfrac{11}{13}\,, \\ &< \tfrac{3000}{19} = 157 + \tfrac{17}{19}\,; \end{aligned}\right.$$

on fera donc successivement $e = 154$, $155$, $156$, $157$;

et l'on aura ................ $\left\{\begin{array}{llll} x_1 = 2, & 15, & 28, & 41, \\ x = 74, & 55, & 36, & 17. \end{array}\right.$

2.° Soit encore l'équation $39x - 56x_1 = 11$, qui se rapporte au §. 2. On aura ici

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Suite des diviseurs $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$ ... | 56 | 39 | 17 | 5 | 2 | 1 |
| Suite des quotiens $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$, $q_5$ ... | | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| Suite des coefficiens $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ ... | 23 | 16 | 7 | 2 | 1 | |

Et, puisque $n = 5$ est impair, il viendra, en remplaçant toujours $x_n$ par $e$,

$$x_1 = +16.11 + 39e = +176 + 39e;$$
$$x = -23.11 + 56e = -253 + 56e;$$

faisant donc ........... $e = 5$, $6$, $7$, $8$, .....

on trouvera .......... $\left\{\begin{array}{lllll} x_1 = 371, & 410, & 449, & 488, & \ldots\ldots \\ x = 27, & 83, & 139, & 195, & \ldots\ldots \end{array}\right.$

Ces deux exemples sont tirés de l'algèbre d'Euler.