THOMAS-LAVERNÈDE

Méthode facile pour exécuter le développement des puissances des polynomes ; pour faire suite à l'article précédent

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 208-217
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__208_1>

tera donc pour la m^{me} puissance, si elle a lieu pour la $(m-1)^{me}$; et, puisqu'elle se vérifie pour les premières, on en doit conclure qu'elle est générale; le terme général du développement de $(x+a)^m$ est donc

$$P.\frac{m}{n}a^nx^{m-n}\ ,$$

ou, en remettant pour P sa valeur,

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n}a^nx^{m-n}\ ;$$

c'est-à-dire, le même que ci-dessus.

Parvenu ainsi au terme général du développement de $(x+a)^m$, il est facile d'en déduire celui du développement de $(a+b+c+....+r)^m$, duquel, par une marche inverse de celle que nous avons suivie dans ce qui précède, on pourra conclure les diverses formules de la théorie des permutations et combinaisons. Il est très-utile à ceux qui étudient les sciences, d'apprendre à parcourir ainsi, en divers sens, la chaîne des propositions dont elles se composent.

Méthode facile pour exécuter le développement des puissances des polynomes;

Pour faire suite à l'article précédent;

Par M. Thomas-Lavernède.

1. Dans le mémoire qui précède, M. Gergonne est parvenu, d'une manière simple et élégante, au terme général du développement d'une puissance quelconque d'un polynome. Je me propose

ici de donner des règles faciles pour effectuer ce développement d'après la connaissance de son terme général.

2. Il vient d'être prouvé que le terme général du développement de $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m$ est

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(m-2)(m-1)m}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots;$$

avec la condition $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=m$; or, ce terme peut être écrit comme il suit:

$$\frac{1.2.3\ldots\alpha.(\alpha+1)\ldots(m-2)(m-1)m}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots\ldots,$$

et deviendra conséquemment, en réduisant,

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots(\alpha+2)(\alpha+1)}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times1\ldots}b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots a^\alpha.$$

Mais, par ce qui précède, on a

$$\alpha=m-\beta-\gamma-\delta-\ldots\ldots;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-\beta-\gamma-\delta-\ldots\ldots+1)}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\ldots\delta\times\ldots\ldots\ldots\ldots}b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots\ldots a^{m-\beta-\gamma-\delta\ldots},$$

ce qui fournit la règle suivante:

Le coefficient d'un produit quelconque des lettres a, b, c, d,.... *dans le développement de* $(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}+\ldots\ldots)^m$ *est une fraction qui a pour numérateur le produit d'autant de termes consécutifs de la suite* m, m—1, m—2,.... *qu'il y a d'unités dans la somme des exposans des lettres qui multiplient* a, *et pour dénominateur le produit d'autant de termes consécutifs de la suite naturelle, à partir de l'unité, pour chaque lettre qui multiplie* a, *qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette lettre.*

3. Concevons présentement que le développement soit ordonné par rapport à a, et considérons, comme un terme unique, l'ensemble de tous ceux qui sont affectés d'une même puissance de cette

lettre. Dans le $n.^{me}$ terme, a^{m-n+1} sera multiplié par tous les produits de $n-1$ dimensions que l'on peut faire avec les lettres b, c, d, ...; et, dans le $(n+1)^{me}$, a^{m-n} sera multiplié par tous les produits de n dimensions que l'on peut faire avec ces mêmes lettres. Or, en supposant déjà formés les produits de $n-1$ dimensions que peuvent fournir les lettres b, c, d, ..., il est évident qu'en les multipliant par b, on aura tous ceux de n dimensions qui doivent contenir cette lettre comme facteur; et on aurait de même tous ceux de n dimensions qui doivent renfermer la lettre c, en les multipliant par cette dernière lettre, au lieu de les multiplier par b; mais, comme parmi ces derniers, il y aurait des produits qui renfermeraient le facteur b et que ceux-ci sont déjà determinés par la première multiplication, il est clair qu'en multipliant par c, il faudra opérer seulement sur les termes de $n-1$ dimensions qui ne contiendront pas le facteur b; réunissant donc les derniers résultats aux premiers, on aura ainsi tous ceux des termes de n dimensions dans lesquels doivent entrer les lettres b et c. Par un semblable raisonnement on trouvera qu'en réunissant à ces termes les produits par d de tous ceux des termes de $n-1$ dimensions qui ne renferment ni b, ni c; les produits par e tous ceux qui ne renferment ni b, ni c, ni d, et ainsi de suite, on parviendra à obtenir tous les produits de n dimensions qu'il est possible de faire avec les lettres b, c, d,..... Nous déduirons de là la règle suivante pour former le $(n+1)^{me}$ terme de la $m.^{me}$ puissance du polynome $a+b+c+d+$......, ordonnée par rapport à a, lorsque le $n.^{me}$ terme de cette puissance est déjà connu.

Multipliez par $\frac{b}{a}$ *tous les produits des lettres* a, b, c, ... *qui entrent dans le* n.^{me} *terme, par* $\frac{c}{a}$ *tous ceux des ces produits qui ne contiennent pas le facteur* b, *par* $\frac{d}{a}$ *tous ceux de ces mêmes produits qui ne contiennent ni* b, *ni* c, *par* $\frac{e}{a}$ *tous ceux qui ne contiennent ni* b, *ni* c, *ni* d, *et ainsi de suite; enfin, donnez* *à chacun des produits obtenus le coefficient que lui assigne la règle prescrite* (2).

Cette règle étant générale, et le premier terme du développement de $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m$ étant toujours connu et égal à a^m; il est évident que son application fera trouver successivement tous les autres; elle suffira donc pour développer $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m$ en une suite de monomes.

4. Examinons présentement, d'une manière plus particulière, la loi que suivra le développement; et, pour cela, considérons un produit quelconque $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots a^{m-\beta-\gamma-\delta\ldots\ldots}$ dans lequel, β, γ, δ, ... étant des nombres entiers ou zéro, on ait $\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots \leqq m$. Si nous supposons la somme $\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots$ constante et égale à n, quelles que soient d'ailleurs les valeurs particulières des exposans β, γ, δ, ...; il est visible que $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots a^{m-n}$ sera l'expression générale des produits des lettres a, b, c, ... qui doivent entrer dans le terme du développement de $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m$ dont le rang est désigné par $\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots+1$ ou $n+1$. Or, nous avons vu (2) que le coefficient de $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots a^{m-n}$ est

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(m-2)(m-1)m}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots\ldots\times1.2\ldots\ldots(m-n)},$$

ou ce qui revient au même

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots3.2.1}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots\times1.2\ldots(m-n)},$$

ou encore

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots3\,2.1}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots}\times\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m-n)};$$

et, comme on a évidemment

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m-n)}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

on pourra écrire encore

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3.2.1}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots}\times\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n};$$

d'où il suit que la formule

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2.\ldots\beta\times 1.2.\ldots\gamma\times 1.2.\ldots\delta\times\ldots}b^{3}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots\times\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ldots\frac{m-n+1}{n}a^{m-n}$$

représentera généralement les quantités monomes qui doivent composer le $(n+1)^{\text{me}}$ terme du développement. Or, dans cette expression, le facteur

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ldots\ldots\ldots\frac{m-n+1}{n}a^{m-n},$$

est constant, et son co-facteur

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2.\ldots\beta\times 1.2.\ldots\gamma\times 1.2.\ldots\delta\times\ldots}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots,$$

qui est variable, à cause des exposans variables α, β, γ, ..., est, d'après le précédent mémoire, le terme général du développement de $(b+c+d+\ldots\ldots)^n$; donc le $(n+1)^{\text{eme}}$ terme du développement de $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m$ sera

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ldots\frac{m-n+1}{n}(b+c+d+\ldots)^n a^{m-n},$$

et conséquemment, en posant $b+c+d+\ldots\ldots=s$, ce développement est

$$a^m+\frac{m}{1}sa^{m-1}+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}s^2a^{m-2}+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}s^3a^{m-3}+\ldots$$

comme il résulte d'ailleurs du développement de $(a+s)^m$, par la formule du binome.

5. Il résulte de ce que nous venons de dire, que, m étant un nombre entier positif, le développement de $(a+b+c+\ldots\ldots)^m$, donné par la règle (3), revient à celui qu'on obtiendrait par l'application de la formule du binome; puis donc qu'il est démontré que cette formule a lieu quel que soit l'exposant m, il paraît légitime d'en conclure que la règle dont il s'agit, pourra également être appliquée quel que soit m; ce qui se vérifie, en effet, pour des cas particuliers.

6. Il suit de tout ce qui vient d'être dit 1.°, que p, exprimant le

le nombre des termes du polynome, et m étant un nombre entier positif, la somme des coefficiens des monomes qui composent le développement de $(a+b+c+d+......)^m$ est p^m, ce qu'on aperçoit d'ailleurs sur-le-champ, en supposant $a=b=c=d=.....=1$; 2.° que lorsque l'on connaît, abstraction faite de leurs coefficiens, les monomes qui doivent composer le développement de $(a+b+c+d+...)^m$, on en peut déduire ceux qui doivent entrer dans le développement de $(a+b+c+d....)^{m+1}$, toujours abstraction faite de leurs coefficiens, en les multipliant d'abord tous par a, puis par b tous ceux qui ne contiennent pas a, puis par c ceux qui ne contiennent ni a ni b, par d ceux qui ne contiennent ni a, ni b, ni c, et ainsi de suite; de manière qu'il ne sera plus question alors que d'affecter chacun des termes obtenus du coefficient convenable.

7. Le sujet que nous venons de traiter nous conduit à nous occuper de la recherche des formules qui expriment les puissances entières, et de degrés déterminés, d'un polynome $a+b+c+d+......$, quel que soit le nombre de ses termes. Ces formules peuvent être écrites d'une manière fort simple, et les considérations qui précèdent, fournissent un moyen très-facile de les construire.

8.° Il est d'abord à remarquer que, parmi les termes du développement de $(a+b+c+d+.....)^m$, ceux qui ne diffèrent que par l'ordre suivant lequel se succèdent les mêmes exposans α, β, γ, δ, ..., tels, par exemple, que les termes $a^\alpha b^\beta c^\gamma....$, $a^\beta b^\alpha c^\gamma....$, $a^\gamma b^\alpha c^\beta....$, ... doivent être affectés des mêmes coefficiens, ainsi qu'il résulte de la forme assignée au coefficient du terme général, dans le mémoire précédent, et comme on peut aussi le déduire, *a priori*, de ce que $(a+b+c+d+.....)^m$ est une fonction symétrique des quantités a, b, c, d, ...

Cela posé, désignons par $(\alpha\beta\gamma\delta.....)$ la somme des produits des facteurs a, b, c, d, et de leurs puissances, dans lesquels les exposans sont α, β, γ, δ, ... quelles que soient d'ailleurs les lettres que ces exposans affectent. Dans le développement de $(a+b+c+d+...)^m$, il y aura, outre la classe de produits comprise dans l'expression $(\alpha\beta\gamma.....)$, autant d'autres classes de produits qu'il y aura d'autres manières de satisfaire à la condition $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots=m$ avec des nombres entiers positifs ou nuls, c'est-à-dire, autant qu'il y aura d'autres manières de former le nombre m, par addition, avec des nombres compris dans la suite naturelle, depuis 1 jusqu'à m inclusivement. Nous voilà donc conduits d'abord à cette question : *trouver toutes les manières de former par addition de nombres entiers positifs un nombre donné* m ?

Nous indiquerons ici, pour résoudre cette question, deux règles fort simples; et d'abord, pour fixer les idées, nous supposerons que le nombre m qu'il s'agit de former par addition, est 8. Alors toutes les manières de le former seront comprises dans le tableau suivant, dans lequel les chiffres écrits les uns à côté des autres, sans aucune interposition de signe, doivent être considérés comme séparés entre eux par le signe +, et conséquemment comme devant être ajoutés ensemble pour former le nombre demandé.

11111111,	1111112,	111122,	11222,	2222,	224,	26,	8.
		111113,	11123,	1223,	233,	35	
			11114,	1124,	125,	44	
				1133,	134,	17	
				1115,	116,		

La formation de ce tableau présente peu de difficultés. Sa première colonne verticale à gauche n'a qu'un seul terme, et, quel que soit le nombre proposé, ce terme est toujours composé d'autant d'unités que ce nombre en contient. Quant aux autres colonnes, elles se déduisent successivement les unes des autres par la règle que voici :

Pour former la colonne du rang r, *changez deux unités en* 2 *dans les termes de la* $(r-1)^{me}$ *colonne, trois unités en* 3 *dans ceux de la* $(r-2)^{me}$ *qui ne renferment pas* 2, *quatre unités en* 4 *dans ceux de la* $(r-3)^{me}$ *qui ne renferment ni* 2 *ni* 3, *et ainsi* *de suite, jusqu'à ce que vous soyez parvenu à la première colonne dans laquelle vous changerez* r *unités en* r.

Cette règle étant générale pour toutes les colonnes qui suivent la première, et celle-ci étant toujours connue, il est clair qu'elle fera trouver successivement toutes les colonnes qui doivent composer le tableau, et par conséquent toutes les manières de former, par addition, le nombre donné.

On peut encore disposer le tableau des diverses manières de former le nombre 8 dans l'ordre suivant.

11111111,	1111112,	111122,	11222,	2222;
	111113,	11123,	1223	
	11114,	1124,	224	
	1115,	125,	233	
	116,	26,		
	17,	1133,		
	8,	134,		
		35,		
		44,		

alors chaque colonne dépend uniquement de celle qui la précède, et on forme celle du rang r par la règle qui suit : *changez dans les termes de la* $(r-1)^{me}$ *colonne deux unités en* 2, *puis trois unités en* 3 *dans tous ceux de ces termes qui ne renferment pas* 2, *puis quatre unités en* 4 *dans tous ceux qui ne renferment ni* 2 *ni* 3, *et ainsi de suite; l'ensemble des termes obtenus par ce procédé formera la colonne du rang* r.

On doit observer, dans l'application de l'une ou de l'autre règle, que, si un terme d'une colonne sur laquelle on opère ne contient pas le nombre d'unités nécessaire pour faire l'échange prescrit, ce terme ne doit point être employé dans la recherche de ceux de la colonne que l'on calcule.

Lorsqu'on a obtenu toutes les différentes manières de faire, par addition, le nombre m, on a, d'après la convention établie, toutes les classes de produits qui doivent entrer dans la $m.^{me}$ puissance du polynome $a+b+c+d+\ldots\ldots$; mais nous avons vu que tous les produits d'une même classe doivent avoir le même coefficient; on aura donc une formule qui exprimera le développement de $(a+b+c+d+\ldots)^m$ en donnant à chacune des manières de former le nombre m le coefficient qui convient aux produits dont elle représente la somme. En posant donc, pour abréger

$$a+b+c+d+\ldots\ldots=P$$

on trouvera

$$P^1=(1),$$

$$P^2=(2)+2\ (11),$$

$$P^3=(3)+3\ (12)+6(111),$$

$$\begin{aligned}P^4=(4)&+4\ (13)+12(112)+24(1111),\\ &+6\ (22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P^5=(5)&+5\ (14)+20(113)+60(1112)+120(11111),\\ &+10(23)+30(122)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P^6=(6)&+6(15)+30(114)+120(1113)+360(11112)+720(111111),\\ &+15(24)+60(123)+180(1122)\\ &+20(33)+90(222)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P^7=(7)&+7(16)+42(115)+210(1114)+840(11113)+2520(111112)+5040(1111111)\\ &+21(25)+105(124)+420(1123)+1260(11122)\\ &+35(34)+140(133)+630(1222)\\ &+210(223)\end{aligned}$$

P^8=(8)+ 8(17)+ 56(116)+ 336(1115)+1680(11114)+ 6720(111113)+20160(1111112)+40320(11111111)
+28(26)+ (125)+ 840(1124)+3360(11123)+10080(111122)
+56(35)+280(134)+1120(1133)+5040(11222)
+70(44)+420(224)+1680(1223)+
+560(283)+2520(2222)

P^9=(9)+ 9(18)+ 72(117)+ 504(1116)+ 3024(11115)+15120(111114)+60480(1111113)+181440(11111112)
+ 36(27)+ 252(126)+1512(1125)+ 7560(11124)+30240(111123)+90720(1111122)
+ 84(36)+ 504(135)+2520(1134)+10080(11133)+45360(111222)
+126(45)+ 756(225)+3780(1224)+15120(11223) +362880(111111111)
+ 630(144)+5040(1233)+22680(12222)
+1260(234)+7560(2223)+
+1680(333)

et ainsi de suite.

9. Je terminerai par les deux observations suivantes. p désignant le nombre des termes du polynome, m le degré de la puissance à développer, et n le nombre des lettres différentes qui doivent entrer dans une même série de termes, 1.° si l'on a $p<m$, toutes les classes dans lesquelles on a $n>p$ doivent être regardées comme nulles, parce que les produits qui leur appartiennent, doivent avoir zéro pour facteur ; 2.° si, dans une classe quelconque, représentée par $(\alpha\alpha\ldots\beta\beta\ldots\gamma\gamma\ldots)$ les exposans α, β, γ, ..., sont répétés des nombres de fois exprimés respectivement par α', β', γ', ..., le nombre des produits de cette classe aura pour expression

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots\alpha'\times 1.2\ldots\beta'\times 1.2\ldots\gamma'\times\ldots}.$$

Cette dernière remarque, qui se déduit aisément de la théorie des combinaisons, offre un moyen de s'assurer que l'on n'omet aucun des produits qui doivent entrer dans la puissance cherchée.