ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Questions résolues. Démonstration du théorème énoncé à la page 96 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 182-185
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__182_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème énoncé à la page 96 de ce volume ;

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

A MM. les Rédacteurs des *Annales*,

Messieurs,

Je viens de recevoir le 3.^{e} numéro du 2.^{me} volume de vos *Annales*. Pour me distraire un moment de mes occupations ordinaires, je l'ai parcouru, et je me suis arrêté sur le théorème d'analise que l'on trouve énoncé à la page 96. La démonstration n'en sera pas difficile pour ceux à qui le calcul des differences est familier. Je me contenterai d'en indiquer la marche, sans entrer dans aucun detail.

On sait que y, y_1, y_2, y_3, ... y_n, désignant les etats successifs d'une fonction y d'une variable x, on a generalement

$$\Delta^n y = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} y_{n-2} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} y_{n-3} + \ldots (A)$$

Soit

$$y = x^m ,$$

et supposons que x prenne successivement des accroissemens égaux désignés par Δx; on aura

$$y_1 = \{x + \Delta x\}^m ,$$
$$y_2 = \{x + 2\Delta x\}^m ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$y_{n-2} = \{x + (n-2)\Delta x\}^m ,$$
$$y_{n-1} = \{x + (n-1)\Delta x\}^m ,$$
$$y_n = \{x + n\Delta x\}^m .$$

Substituant donc dans l'équation (A), il viendra

$$\Delta^n y = \{x + n\Delta x\}^m - \frac{n}{1} \{x + (n-1)\Delta x\}^m + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \{x + (n-2)\Delta x\}^m - \ldots ;$$

équation qui, en y supposant $n = m$, se change en celle-ci

$$\Delta^m y = \{x + m\Delta x\}^m - \frac{m}{1} \{x + (m-1)\Delta x\}^m + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \{x + (m-2)\Delta x\}^m - \ldots\ldots (B).$$

Mais, d'un autre côté, d'après la valeur $y = x^m$, et l'égalité des accroissemens de la variable independandante x, il est connu qu'on doit avoir

$$\Delta^m y = 1.2.3.4 \ldots\ldots m\Delta x^m \quad (*) ; \qquad (C)$$

(*) Cette proposition n'est qu'un cas particulier de la suivante :

on aura donc, à cause de l'équation (B);

$$1.2.3\ldots\ldots m\Delta x^m=\{x+m\Delta x\}^m-\frac{m}{1}\{x+(m-1)\Delta x\}^m+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\{x+(m-2)\Delta x\}^m-\ldots\ldots;\quad(D)$$

équation qui, en y faisant $x=(z-m)\Delta x$, et divisant ensuite ses deux membres par Δx^m devient

---

« Si dans une fonction rationnelle et entière, telle que

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+Gx+H,\qquad(M)$$

» on substitue pour x les termes consécutifs d'une progression par différences dont » la raison soit δ; les résultats des substitutions formeront une suite dont les m.^{emes} » différences seront constantes et égales à

$$1.2.3\ldots\ldots\ldots m\,A\delta^m.$$

Cette dernière trouvant une utile application dans la recherche des limites des racines incommensurables des équations numériques, nous croyons convenable d'en présenter ici une démonstration générale purement élémentaire.

Supposons qu'elle soit déjà démontrée pour toutes les fonctions des degrés inférieurs à m, et soit k l'un quelconque des termes de la progression des nombres à substituer dans la fonction (M); le suivant sera $k+\delta$; exécutant donc la substitution de ces deux termes, et prenant la différence des résultats; il viendra

$$mA\delta k^{m-1}+\frac{m-1}{2}\,\delta\left\{2B+mA\delta\right\}k^{m-2}+\ldots\ldots;\quad(N)$$

tel est donc le terme général des premières différences de la suite dont il s'agit, et on en conclura ces premières différences, en y substituant successivement pour k la suite $k+\delta$, $k+2\delta$, $k+3\delta$, ...; mais cette suite étant une progression par différences, dont la raison est δ, et la fonction (N), dans laquelle il faut la substituer, étant une fonction entière et rationnelle du degré $m-1$, dont le premier terme a pour coefficient $mA\delta$; il résulte de l'hypothèse que les résultats des substitutions, c'est-à-dire, les premières différences de la fonction (M) formeront une suite dont les $(m-1)^{emes}$ différences, lesquelles seront par conséquent les m.^{emes} différences de la fonction (M) seront constantes et égales à

$$1.2.3\ldots\ldots(m-1)\delta\times\delta mA\times\delta^{m-1}=1.2.3\ldots\ldots mA\delta^m.$$

Il est donc prouvé, par là, que la proposition serait vraie pour une fonction du degré m, si elle était vraie pour une fonction du degré $m-1$. Or, il est très-facile de se convaincre qu'elle est vraie pour les fonctions des deux ou trois premiers degrés, d'où il faut conclure qu'elle est générale.

$$1.2.3\ldots\ldots m=z^m-\frac{m}{1}(z-1)^m+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}(z-2)^m-\ldots;$$

faisant, dans cette dernière, $z=m+1$, on obtiendra celle qu'il s'agissait de démontrer. (*)

Agréez, Messieurs, etc.

Nismes, le 2 septembre 1811.