SERVOIS

Analise. Remarques relatives à la formule logarithmique qui se trouve à la page 70 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 178-179
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__178_0>

ANALISE.

Remarques relatives à la formule logarithmique qui se trouve à la page 70 de ce volume ;

Par M. SERVOIS, professeur de mathématiques aux écoles d'artillerie de Lafère.

A MM. LES RÉDACTEURS DES *ANNALES* ;

MESSIEURS,

EN cherchant à me démontrer, d'une manière purement élémentaire, la formule donnée par M. Dubourguet à la page 70 du 2.e volume des *Annales*, il m'a paru que cette formule était entachée d'une petite inexactitude que j'ai cru nécessaire de faire remarquer, et dont j'indiquerai la source, après avoir exposé brièvement le moyen fort simple que j'ai employé pour parvenir à la formule exacte.

Soit la série

$$y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\ldots\ldots+\frac{1}{2n-1}y^{2n-1}+\frac{1}{2n+1}y^{2n+1}+\ldots\ldots$$

Si on la multiplie par $1-y^2$, le terme général du produit sera

$$-\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}y^{2n+1},$$

en sorte qu'on a

$$\left\{y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\ldots\ldots\right\}\left\{1-y^2\right\}=y-\frac{2}{1.3}y^3-\frac{2}{3.5}y^5-\frac{2}{5.7}y^7-\ldots\ ;$$

mais, dans le système de logarithmes de Neper, on a aussi

$$l\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=2\left\{y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\tfrac{1}{7}y^7+\ldots\right\}.$$

Formant le produit de ces deux équations, l'équation résultante deviendra, par la suppression de la série commune à ses deux membres, et la division par $1-y^2$

$$l\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=\frac{2}{1-y^2}\left\{y-\frac{2}{1.3}y^3-\frac{2}{3.5}y^5-\frac{2}{5.7}y^7-\ldots\right\}.$$

Posant alors

$$\frac{1+y}{1-y}=x, \quad \text{d'où} \quad y=\frac{x-1}{x+1}, \qquad \frac{2}{1-y^2}=\frac{(x+1)^2}{2x};$$

il viendra

$$lx=\frac{(x+1)^2}{2x}\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{2}{1.3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3-\frac{2}{3.5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5-\ldots\right\}.$$

Formule qui revient à

$$lx=\frac{x-1}{x}\left\{\frac{x+1}{2}-\left[\frac{1}{1.3}\,\frac{(x-1)^2}{(x+1)}+\frac{1}{3.5}\,\frac{(x-1)^4}{(x+1)^3}+\frac{1}{5.7}\,\frac{(x-1)^6}{(x+1)^5}+\ldots\right]\right\}.$$

La formule donnée par M. Dubourguet est

$$lx=\frac{x-1}{x}\left\{\frac{x+1}{2}-\left[\frac{1}{1.3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{3.5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4+\frac{1}{5.7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\ldots\right]\right\}$$

et son calcul est exact jusqu'au bout ; de manière que l'erreur ne peut venir uniquement que de ce que, dans la substitution de la valeur de $\dfrac{2z^3}{\sqrt{1+z^2}}$, il aura sans doute écrit $\dfrac{(x-1)^3}{2x(x+1)^2}$, au lieu de $\dfrac{(x-1)^3}{2x(x+1)}$.

Il est fâcheux, au surplus, que cette formule doive avoir la forme que je viens d'indiquer, attendu qu'elle perd ainsi un peu de sa convergence.

Agréez, Messieurs, etc.

Lafère, 2 octobre 1811.