# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.



GERGONNE


## Statique. Sur une nouvelle forme de l'équation de la chaînette uniformément pesante


*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 1 (1810-1811), p. 58-62

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__58_1>

# STATIQUE.

## *Sur une nouvelle forme de l'équation de la chaînette uniformément pesante.*

Par M. GERGONNE.

ON sait qu'en désignant par $x$ les coordonnées horisontales, et par $y$ les coordonnées verticales, et prenant $x$ pour la variable indépendante, l'équation différentielle de la chaînette uniformément pesante est :

$$b\mathrm{d}^2y+\mathrm{d}x\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=o$$

dans laquelle $b$ est une constante arbitraire.

On intègre ordinairement cette équation, en rendant ses deux membres, par des transformations, des différentielles exactes; on obtient ainsi pour l'équation primitive de la courbe :

$$x=b\left\{\text{Log.}\left[(a-y)-\sqrt{(a-y)^2-b^2}\right]+c\right\}\text{ (1).}$$

Cette équation, bien qu'assez simple, est d'une forme assez peu symétrique, tandis que, par une autre voie que je vais indiquer, on peut en obtenir une qui me paraît beaucoup plus élégante, et qui, pour cette raison, serait peut-être plus propre à mettre en évidence la nature et les propriétés de la courbe funiculaire.

En changeant, dans l'équation différentielle ci-dessus, $b$ en $-\frac{1}{a}$, ce qui est permis, et formant les coefficiens différentiels, il vient :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

faisant ensuite $\frac{dy}{dx}=p$, on a :

$$\frac{dp}{dx}=a\sqrt{1+p^2}\qquad\text{d'où}\qquad a\,dx=\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

ce qui donne en intégrant :

$$ax=b-\text{Log.}\left(\sqrt{1+p^2}-p\right)$$

d'où

$$\sqrt{1+p^2}=p+e^{b-ax}$$

Quarrant et tirant la valeur de $p$, il vient :

$$p\text{ ou }\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left\{e^{-(b-ax)}-e^{(b-ax)}\right\}$$

ce qui donne, en intégrant de nouveau :

$$2ay+c=e^{(b-ax)}+e^{-(b-ax)}$$

---

(1) Voyez le *Traité élémentaire de Méchanique* de M. Francœur.

Telle est la forme sous laquelle se présente alors l'équation primitive de la courbe ; elle renferme, comme l'on voit, trois constantes arbitraires qui ne peuvent être déterminées que par un même nombre de conditions distinctes. On peut, au surplus, à cette équation substituer la suivante dont la forme est assez remarquable :

$$e^{-(b-ax)} = \cfrac{1}{2ay+c-\cfrac{1}{2ay+c-\cfrac{1}{2ay+c-\cfrac{1}{2ay+c-\text{etc.}}}}}$$

En faisant dans l'équation, considérée sous sa première forme, $e^{(b-ax)} = z$, on en déduit ces deux-ci :

$$\text{Log. } z = b - ax \qquad\qquad z^2 - (2ay + c)z + 1 = 0$$

ce qui offre le moyen de construire la courbe par points, à l'aide d'une logarithmique et d'une hyperbole équilatérale, lorsque les constantes $a$, $b$, $c$, sont connues.

Les conditions qui se présentent à la fois le plus naturellement et le plus utilement pour la détermination de ces trois constantes, sont la longueur de la chaînette et la situation de ses deux extrémités ; soit donc pris l'une de ces extrémités pour origine ; soit $x'$ et $y'$ les coordonnées de l'autre, et soit $k$ la longueur de la courbe entre ces deux points, en différentiant l'équation de la courbe, il vient, comme nous l'avons déjà vu :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{e^{-(b-ax)} - e^{(b-ax)}\right\}$$

d'où

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\left\{e^{-(b-ax)} + e^{(b-ax)}\right\}^2$$

donc

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}dx\left\{e^{-(b-ax)} + e^{(ba-x)}\right\}$$

en intégrant entre $x=o$ et $x=x'$, $s$ devra se changer en $k$, et il viendra :

$$\text{(I)} \qquad 2ak = e^{-b}\left(e^{ax'}-1\right) - e^{b}\left(e^{-ax'}-1\right)$$

de plus, les coordonnées des deux extrémités de la courbe devant satisfaire à son équation, on aura :

$$\text{(II)} \quad c = e^{b} + e^{-b} \qquad \text{(III)} \quad 2ay' + c = e^{(b-ax')} + e^{-(ba-x')}$$

Telles sont les équations qui serviront à déterminer les trois constantes $a$, $b$, $c$.

En prenant la différence entre les deux dernières, il vient :

$$\text{(IV)} \qquad 2ay' = e^{-b}\left(e^{ax'}-1\right) + e^{b}\left(e^{-ax'}-1\right)$$

prenant alors la demi-somme et la demi-différence des équations (I) et (IV), il viendra :

$$\text{(V)} \quad e^{-b}\left(e^{ax'}-1\right) = a(y'+k) \qquad \text{(VI)} \quad e^{b}\left(e^{-ax'}-1\right) = a(y'-k)$$

multipliant enfin ces deux dernières équations membre à membre, on aura :

$$e^{ax'} + e^{-ax'} = 2 - a^2(y'^2 - k^2)$$

Or on a, comme l'on sait (1):

$$e^{ax'} = 1 + \frac{ax'}{1} + \frac{a^2x'^2}{1\cdot 2} + \ldots\ldots \qquad e^{-ax'} = 1 - \frac{ax'}{1} + \frac{a^2x'^2}{1\cdot 2} - \ldots\ldots$$

---

(1) Voyez le *Complément d'Algèbre* de M. Lacroix.

on aura donc, en substituant, réduisant et transposant :

$$k^2-(x'^2+y'^2)=\frac{x'^4}{3\cdot4}a^2+\frac{x'^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6}a^4+\frac{x'^8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}a^6+\ldots\ldots$$

par la méthode inverse des séries, on pourra tirer de cette équation la valeur de $a$; l'équation (V) donnera ensuite :

$$b=\text{Log.}\left(e^{ax'}-1\right)-\text{Log.}\,a\,(y'+k)$$

et on aura enfin $c$ par l'équation (II).