ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie. Mémoire sur le tétraèdre, présentant la solution de diverses questions proposées dans les Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 353-367
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__353_0>

GÉOMÉTRIE.

Mémoire sur le tétraèdre, présentant la solution de diverses questions proposées dans les Annales ;

Par M. J. L....., abonné (*).

1. *Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et ceux des deux diagonales passent toutes trois par le même point où elles sont coupées en deux parties égales* (**).

Soient en effet AB, BC, CD, DA, (fig. 1) les quatre côtés consécutifs d'un quadrilatère, plan ou gauche, ayant leurs milieux respectifs en Q, P, N, M ; soient, en outre, R, S, les milieux respectifs des deux diagonales BD, AC, de ce quadrilatère, et soient joints ces points, deux à deux, par des droites. Par ce que R et Q sont les milieux respectifs de BD et BA, la droite RQ est moitié de DA et lui est parallèle ; pour de semblables raisons NS est aussi moitié de DA et lui est parallèle ; donc les deux droites RQ et NS sont égales et parallèles, et conséquemment le quadrilatère RQSN est un parallélogramme ; d'où il résulte que les droites NQ, RS, se coupent réciproquement en deux parties égales. On prouvera, par un semblable raisonnement, que les droites MP, RS se coupent aussi réciproquement en deux parties égales ;

(*) Ce mémoire renferme quelques propositions déjà démontrées ailleurs ; mais, comme elles s'y trouvent liées avec beaucoup d'autres qui sont propres à l'auteur, on a cru nécessaire de publier le tout sans en rien retrancher.

(**) Voyez les pag. 311 et suivantes de ce volume.

(*Notes des éditeurs.*)

d'où l'on doit conclure que les trois droites NQ, RS, MP, passent par un même point O qui est leur milieu commun.

2. Il suit de là que, *dans tout tétraèdre, les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées passent toutes trois par un même point qui est leur milieu commun* (*).

3. *Le point où se coupent les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre est le centre de gravité du volume de ce tétraèdre.*

Que l'on conçoive, en effet, le tétraèdre partagé en une infinité de triangles élémentaires dont les plans soient parallèles à l'une de ses faces; si, par le milieu de l'un quelconque des côtés de cette face et par l'arête opposée, l'on conçoit un plan, ce plan, coupant chaque triangle élémentaire suivant la droite qui joint son sommet au milieu de sa base, contiendra son centre de gravité; il contiendra donc aussi le centre de gravité du tétraèdre; ce dernier point est donc à l'intersection de trois plans conduits par les arêtes d'une même face et par les milieux des arêtes qui leur sont respectivement opposées: or, comme chacun de ces plans contient une des droites qui joignent les milieux des arêtes opposées, il s'ensuit que le point d'intersection de ces trois droites n'est autre que le point d'intersection des trois plans, c'est-à-dire, le centre de gravité du tétraèdre.

4. A l'avenir nous appellerons *axes* d'un tétraèdre, les trois droites qui joindront les milieux de ses arêtes opposées; le point où ces axes se couperont sera le *centre* du tétraèdre; les trois plans conduits par les axes, pris deux à deux, seront les *plans principaux* et détermineront, dans le tétraèdre, les *sections principales*, lesquelles seront toutes trois des parallélogrammes ayant deux des axes pour leur diagonales, et ayant, pour les deux côtés d'un même angle, des parallèles aux deux arêtes opposées du tétraèdre que le plan de la section ne rencontre pas. Chaque plan principal partage le tétraèdre en

---

(*) Voyez la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tome II, n.° 1, pag. 1.re, et n.° 2, pag. 96.

(*Note des éditeurs.*)

deux troncs de prismes triangulaires que nous verrons bientôt être équivalens.

5. Deux arêtes opposées du tétraèdre, n'étant point comprises dans un même plan, peuvent toujours, et d'une manière unique, être comprises dans deux plans parallèles. Le plan principal qui passe par les milieux des quatre autres arêtes, est évidemment parallèle à ceux-là; il en est de plus équidistant.

6. Le système des six plans, parallèles deux à deux, qui contient les arêtes opposées d'un tétraèdre, forme le *parallélipipède circonscrit*. Les diagonales non parallèles des faces opposées de ce parallélipipède sont les arêtes opposées du tétraèdre; les droites qui joignent les centres des faces opposées du parallélipipède en sont les axes; enfin les plans menés par le centre du parallélipipède, parallèlement à ses faces opposées, déterminent les sections principales du tétraèdre (*).

7. Si deux arêtes opposées d'un tétraèdre sont égales, les faces du parallélipipède circonscrit qui comprendront ces arêtes, seront rectangulaires : si, dans le tétraèdre, il y a deux couples d'arêtes opposées égales, chacune à chacune, deux couples de faces opposées du parallélipipède circonscrit seront rectangulaires : enfin, si les arêtes opposées du tétraèdre sont égales, chacune à chacune, le parallélipipède circonscrit sera rectangulaire.

8. De là il est facile de conclure que, *dans un tétraèdre, deux des axes sont perpendiculaires entre eux, ou l'un des axes est, à la fois, perpendiculaire aux deux autres, ou enfin les trois axes sont perpendiculaires deux à deux, suivant que ce tétraèdre a une, deux ou trois couples d'arêtes opposées égales.*

9. Lorsqu'on fait passer des plans par les extrémités des axes du tétraèdre, ces plans déterminent un *octaèdre inscrit* MNRQSP; les quatre *tétraèdres excédans* MAQS, RQBP, NSPC, DMRN, sont

---

(*) Voyez, sur cela, un mémoire de M. *Monge*, inséré dans la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tom. 1, n.° 10, pag. 440.

(*Note des éditeurs.*)

égaux et superposables, car ils sont terminés par des faces égales, chacune à chacune, et rangées dans le même ordre. Chacun de ces tétraèdres est le 8.me du grand tétraèdre dont il fait partie, car il lui est semblable et a ses arêtes moitié des siennes ; d'où il résulte que le volume total de ces quatre tétraèdres est moitié de celui du grand tétraèdre, et qu'ainsi celui de l'octaèdre inscrit en est aussi moitié.

10. Chacun des plans principaux partage l'octaèdre en deux parties équivalentes ; car ces deux parties sont des pyramides quadrangulaires ayant base commune, et ayant leurs sommets sur des plans parallèles à celui de leur base, et également éloignés de part et d'autre de ce plan.

11. Il suit de là que *chacun des plans principaux d'un tétraèdre le partage en deux troncs de prismes triangulaires équivalens.* Chacun de ces troncs de prismes est, en effet, composé d'une moitié de l'octaèdre et de deux des tétraèdres excédans.

12. Il suit de ce qui vient d'être dit (10) que le produit de l'aire de chacune des sections principales d'un tétraèdre par la plus courte distance entre les arêtes opposées parallèles à cette section est une quantité constante, pour un même tétraèdre, quelle que soit celle des trois sections principales que l'on considère (*). Donc *celle des trois sections principales dont l'aire est la plus petite est celle dont le plan est parallèle aux arêtes opposées les plus distantes.* Ceci répond à la note 3.me de la page 230 de ce volume; mais il est essentiel de remarquer que, généralement parlant, comme nous le verrons bientôt, ces sections ne sont pas des *minima* (**).

(*) Il a déjà été remarqué, par M. *Servois*, professeur aux écoles d'artillerie, à Lafère, que les deux tiers de ce produit expriment le volume du tétraèdre, ainsi qu'il résulte évidemment de ce qui précède.

(**) Lorsque les rédacteurs des *Annales* reçurent la solution mentionnée ici, pressés par le temps, ils se bornèrent à vérifier, par l'analise, si cette solution rendait nulle la fonction prime de l'aire de la section ; et elle la fait, en effet, évanouir ; mais on sait que cette condition *nécessaire* est *insuffisante*. Ils eurent tort de ne point pousser plus loin la vérification, et ils remercient M. J. L..... de les avoir détrompés sur ce point.

(*Notes des éditeurs.*)

13. Les trois plans principaux du tétraèdre divisent l'octaèdre inscrit en *huit* tétraèdres équivalens, et symétriques deux à deux ; puis donc que leur somme est la même que celle des *quatre* tétraèdres excédans, on en doit conclure que chacun de ces derniers est double de chacun de ceux qui résultent de la division de l'octaèdre par les plans principaux ; d'où il suit encore que *les droites qui joignent le centre du tétraèdre à ses sommets, sont coupées par les faces de l'octaèdre inscrit au tiers de leur longueur*.

14. Les quatre tétraèdres excédans peuvent être considérés comme un même tétraèdre appliqué successivement à l'octaèdre par chacune de ses faces, lesquelles deviennent ainsi quatre des huit triangles qui terminent cet octaèdre ; ces quatre triangles ne sont pas égaux, en général, mais chacun d'eux a son égal sur la face opposée de l'octaèdre ; celui-ci reste à découvert et fait partie de la surface du tétraèdre total. Si l'on enlève les quatre tétraèdres excédans pour les transporter sur celles des faces de l'octaèdre, qui, en premier lieu, étaient à découvert, ces tétraèdres, ainsi disposés, formeront avec l'octaèdre le *tétraèdre conjugué* du tétraèdre total, ayant cet octaèdre pour sa partie commune avec lui. Les deux tétraèdres conjugués seront inscrits au même parallélipipède ; leur douze arêtes seront les diagonales de ses faces, et leurs sommets correspondans seront les sommets de ses angles opposés.

15. Deux tétraèdres conjugués forment un système symétrique relativement à leur centre commun ; car toute droite qui y passe, se terminant à des faces ou arêtes parallèles, a son milieu en ce point. Un plan quelconque, passant par le centre, divise d'abord l'octaèdre en deux parties symétriques et rencontre ensuite les tétraèdres excédans sur leurs arêtes homologues, à des distances égales de leurs sommets ; le système est donc divisé, par ce plan, en deux parties égales et symétriques. Les sections principales sont les mêmes pour les deux tétraèdres conjugués, parce qu'elles ne rencontrent pas les tétraèdres excédans. Enfin, les sections, passant par une arête de l'un des tétraèdres, passent par l'arête correspondante de son conjugué, et sont figurées par deux triangles égaux et renversés.

16. Si, par les extrémités de la plus courte distance entre deux arêtes opposées de l'un des tétraèdres et par leur centre commun, on conduit deux droites, elles se termineront aux arêtes correspondantes de son conjugué. La droite qui joindra les points de rencontre sera donc égale et parallèle à cette plus courte distance ; elle sera donc, comme elle, perpendiculaire à deux faces opposées du parallélipipède circonscrit, et sera ainsi la plus courte distance des arêtes du conjugué auxquelles elle se terminera.

17. En conduisant un plan par l'arête BD et le milieu S de l'arête opposée AC, le triangle BSD donne $2(\overline{BS}^2+\overline{DS}^2)=\overline{BD}^2+4\overline{RS}^2$ (*) ; d'un autre côté les deux triangles ABC, ADC donnent $2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2)=2\overline{AC}^2+4(\overline{BS}^2+\overline{DS}^2)$; mettant donc, dans cette dernière équation, pour $2(\overline{BS}^2+\overline{DS}^2)$, la valeur que donne la première, on obtiendra le *théorème d'Euler* :

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{RS}^2.$$

Les deux autres axes donnant des équations analogues, si on les ajoute à celle-ci, on parviendra à la formule connue :

$$(a)\qquad \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=4(\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2).$$

18. Dans un triangle dont C, C′, C″, sont les côtés et S, S′, S″, les droites qui joignent leurs milieux respectifs aux sommets des an-

---

(*) On a, en effet, dans les deux triangles RSB, RSD

$$\overline{RS}^2+\overline{BR}^2-\overline{BS}^2=2RS\cdot BR\cdot \text{Cos. } BRS,$$
$$\overline{RS}^2+\overline{DR}^2-\overline{DS}^2=2RS\cdot DR\cdot \text{Cos. } DRS;$$

Si l'on remarque que BR=DR, que Cos. BRS + Cos. DRS=0 et que $2\overline{BR}^2+2\overline{DR}^2=4\overline{BR}^2=\overline{BD}^2$; en prenant le double de la somme de ces deux équations, on obtiendra celle qui est annoncée dans le texte.

(*Note des éditeurs.*)

gles opposés, on a $4(s^2+s'^2+s''^2)=3(c^2+c'^2+c''^2)$ (*); les faces d'un tétraèdres donnant quatre formules pareilles, si l'on nomme S^2 la somme des quarrés des 12 droites menées de chaque sommet aux milieux des trois côtés de la face opposée, on aura $4S^2=6(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2)$; donc (17)

$$S^2=6(\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2).$$

19. Il est facile de voir que les quatre diagonales de l'un quelconque des huit petits parallélipipèdes formés, dans le parallélipipède circonscrit, par les plans principaux, sont égales aux quatre distances du centre du tétraèdre à ses sommets; puis donc que, dans tout parallélipipède, la somme des quarrés des quatre diagonales est égale à la somme des quarrés des douze arêtes, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2=\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2.$$

20. Cette proposition, qui a évidemment lieu pour le quadrilatère gauche, est vraie aussi pour le quadrilatère plan. Soit en effet ABCD ce quadrilatère (fig. 2); par le point O d'intersection des droites MP, NQ, RS, qui joignent les milieux de ses côtés opposés et de ses diagonales, soient menées à ses quatre sommets les droites OA, OB; OC, OD; les six triangles AOB, BOC, COD, DOA, AOC, BOD, donneront

$$2(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2)=\overline{AB}^2+4\overline{OQ}^2,$$
$$2(\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)=\overline{BC}^2+4\overline{OP}^2,$$
$$2(\overline{OC}^2+\overline{OD}^2)=\overline{CD}^2+4\overline{ON}^2,$$

(*) On a, en effet, par ce qui a été démontré dans la note précédente,

$$2(C'^2+C''^2)=C^2+4S^2,$$
$$2(C''^2+C^2)=C'^2+4S'^2,$$
$$2(C^2+C'^2)=C''^2+4S''^2;$$

ce qui, en ajoutant et transposant, donne l'équation annoncée dans le texte.

(*Note des éditeurs.*)

$$2(\overline{OD}^2+\overline{OA}^2)=\overline{DA}^2+4\overline{OM}^2,$$

$$2(\overline{OA}^2+\overline{OC}^2)=\overline{AC}^2+4\overline{OS}^2,$$

$$2(\overline{OB}^2+\overline{OD}^2)=\overline{BD}^2+4\overline{OR}^2;$$

en ajoutant ces six équations on aura $6(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2)$ $=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+2(\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2)$; d'où on conclura (17)

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2=\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2.$$

Si l'on ajoute la première équation avec la troisième, la seconde avec la quatrième et la troisième avec la sixième, il viendra

$$(b)\quad 2(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2)=\overline{AB}^2+\overline{DC}^2+2\overline{NQ}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+2\overline{MP}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+2\overline{RS}^2.$$

Ainsi, *dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des quarrés de deux côtés opposés, plus deux fois le quarré de la droite qui joint leurs milieux, est une quantité constante et égale à deux fois la somme des quarrés des distances des sommets au point d'intersection des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.*

21 Ces formules ont encore lieu pour un triangle, en considérant un point pris arbitrairement sur l'un quelconque des côtés comme le quatrième sommet du quadrilatère. Mais, si l'on divise un côté AB (fig. 3) en quatre parties égales, aux points n, M, q, et si l'on joint les milieux m, p, des autres côtés avec les points de division n, q, les triangles AOM, MOB, BOC, COA, donneront

$$2(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OM}^2)=\overline{AM}^2+\overline{BC}^2+2\overline{mn}^2=\overline{BM}^2+\overline{AC}^2+2\overline{pq}^2.$$

donc

$$2(\overline{mn}^2-\overline{pq}^2)=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2;$$

le parallélogramme $pmqn$ donne d'ailleurs

$$2(\overline{mn}^2+\overline{pq}^2)=\overline{AB}^2+\overline{CM}^2;$$

et,

et, si l'on tire les droites Cn, Cq, on trouvera

$$2(\overline{Cn}^2-\overline{Cq}^2)=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2.$$

22. Si, dans le tétraèdre ABCD (fig. 1), on suppose droits les angles plans DAB, DAC, ce qui donnera

$$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2, \qquad \overline{AC}^2=\overline{CD}^2-\overline{AD}^2,$$

on conclura de l'équation (b), au moyen de celles-ci, $NQ=RS$; donc, si l'angle trièdre A est trirectangle, on aura

$$NQ=MP=RS.$$

Ainsi, *dans le tétraèdre rectangle, les trois axes sont égaux.*

Désignant donc par p l'un de ces axes, la formule (a) donnera

$$3(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2)=4.3p^2, \text{ d'où } p=\tfrac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2}.$$

Ainsi, *chacun des axes d'un tétraèdre rectangle est moitié de la distance du sommet de l'angle droit trièdre au point qui aurait les trois arêtes rectangulaires pour ses coordonnées.*

Il est facile de voir que les axes se coupent sur cette ligne, au quart de leur longueur, à partir du sommet. Les sections principales sont alors des rectangles; l'aire de chacune d'elles est le quart du produit des deux arêtes opposées qui lui sont parallèles; et, comme elle est aussi égale à la moitié du produit des deux axes qui lui servent de diagonales par le sinus de l'angle qu'ils font entre eux, si on désigne cet angle par a, et par α l'angle que fait $2p$ avec AB, on aura $\tfrac{1}{4}AB.DC = \tfrac{1}{2}p^2.\text{Sin}.a$; on tire de là

$$\sin.a=2.\frac{AB}{2p}.\frac{DC}{2p}=2\text{Cos}\alpha.\text{Sin}.\alpha=\text{Sin}.2\alpha;$$

ainsi l'angle de deux axes est double de celui que fait la ligne $2p$ avec l'arête rectangulaire qui passe par le troisième.

23. Soient donc α, β, γ, les trois angles que fait respectivement la ligne $2p$ avec les arêtes rectangulaires AB, AC, AD; on aura

$$\text{Cos}.\alpha=\frac{AB}{\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2}}, \qquad \text{Cos}.2\alpha=\frac{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2},$$

$$\text{Cos}.\beta=\frac{AC}{\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2}}, \qquad \text{Cos}.2\beta=\frac{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2-\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2},$$

$$\text{Cos}.\gamma=\frac{AD}{\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2}}; \qquad \text{Cos}.2\gamma=\frac{\overline{AD}^2-\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2};$$

d'où on conclut

$$\text{Cos}.2\alpha+\text{Cos}.2\beta+\text{Cos}.2\gamma=-1\ ;$$

les trois angles que font deux à deux les axes du tétraèdre rectangulaire sont donc liés entre eux par la condition que la somme de leurs cosinus est égale au cosinus de la demi-circonférence.

24. En nommant S l'aire de la face hypothénusale, on a $S^2=\frac{1}{4}(\overline{AB}^2.\overline{AC}^2+\overline{AB}^2.\overline{AD}^2+\overline{AC}^2.\overline{AD}^2)$; équation à laquelle on peut donner les trois formes suivantes :

$$S^2-\tfrac{1}{4}\overline{AC}^2.\overline{AD}^2=\tfrac{1}{4}\overline{AB}^2.\overline{CD}^2,$$

$$S^2-\tfrac{1}{4}\overline{AB}^2.\overline{AD}^2=\tfrac{1}{4}\overline{AC}^2.\overline{BD}^2,$$

$$S^2-\tfrac{1}{4}\overline{AB}^2.\overline{AC}^2=\tfrac{1}{4}\overline{AD}^2.\overline{BC}^2;$$

si l'on ajoute ces trois équations en observant que leurs seconds membres sont égaux à quatre fois les quarrés des aires des sections principales, on trouvera, en désignant ces sections par s, s', s'',

$$S^2=2(s^2+s'^2+s''^2)\ ;$$

donc, *dans tout tétraèdre rectangulaire, le quarré de l'aire de la face hypothénusale est double de la somme des quarrés des aires des sections principales.*

25. *Tout plan passant par l'un des axes d'un tétraèdre quelconque, divise ce tétraèdre en deux parties équivalentes.*

Soit, en effet, $aNbQ$ (fig. 4) le plan coupant conduit par l'axe NQ. Le plan principal RNSQ partage le tétraèdre (11) en deux parties équivalentes; et le plan $aNbQ$ ôte à l'une de ces parties le tétraèdre bNQS, pour le donner à l'autre, et ôte à celle-ci le tétraèdre aNQR, pour le donner à la première; or, il est facile de voir que ces deux tétraèdres sont équivalens; car, outre qu'ils ont pour bases les deux moitiés d'un même parallélogramme RNSQ, il résulte de ce qui a été dit (6) que leurs sommets a, b, sont à une même distance de part et d'autre du plan de leurs bases.

26. On peut aussi se convaincre aisément (6) que, dans toutes les situations du plan aNbQ, sa diagonale mobile ab demeurera constamment parallèle au plan principal MRPS qui ne contient pas sa diagonale fixe NQ, et que celle-ci coupera toujours l'autre en h en deux parties égales; si donc cd est l'intersection du plan coupant avec le plan principal MRPS, la diagonale ab sera parallèle à cd.

27. Le plan aNbQ, supposé mobile autour de l'axe NQ, peut prendre successivement quatre positions remarquables. S'il passe par l'un ou l'autre des axes RS, MP, la section est un parallélogramme; si, au contraire, il passe par l'une ou l'autre des deux arêtes opposées AB, CD, la section est un triangle. Dans tous les autres cas, la section est un quadrilatère.

28. La diagonale mobile ab étant variable de grandeur, comme de position, on peut desirer de savoir quelle devra être la situation du plan coupant pour qu'elle soit la plus petite possible. Il est aisé de voir que cela arrivera lorsque l'intersection cd de ce plan avec le plan principal MRPS sera perpendiculaire à MP. Concevons, en effet, qu'il en soit ainsi, et imaginons par ab un plan parallèle à MRPS; ce plan coupera celles des faces opposées du parallélipipède circonscrit, qui contiennent les arêtes AC, BD, suivant deux droites parallèles entre elles et à MP; et ab sera une perpendiculaire commune entre ces parallèles. Que l'on conçoive ensuite tant d'autres plans qu'on voudra, conduits par NQ; les diagonales mobiles correspondantes étant constamment (26) parallèles au plan MRPS, si l'on transporte ces diagonales, parallèlement à elles-mêmes, jusqu'à ce que leurs milieux viennent coïncider avec le milieu h de ab, leurs extrémités se trouveront alors sur les parallèles menées à MN par a et b; mais elles

seront obliques entre ces parallèles, et conséquemment plus longues que leur perpendiculaire commune ab.

29. Soit designé par α l'angle des deux diagonales NQ, ab, d'une section quelconque, faite par l'axe NQ; l'aire de cette section sera $\frac{1}{2}NQ \times ab.\mathrm{Sin}.\alpha$; mais si, du point a, on abaisse une perpendiculaire p sur NQ, cette perpendiculaire aura pour expression $\frac{1}{2}ab.\mathrm{Sin}.\alpha$; en sorte que l'aire de la section deviendra $p \times NQ$; et, comme NQ est constant, pour toutes les sections que l'on considère ici, il s'ensuit que les aires des sections sont proportionnelles à p, et qu'ainsi la plus petite répondra au cas où p sera la plus courte distance entre BD et NQ ou, ce qui revient au même, lorsque p sera la moitié de la plus courte distance entre les arêtes opposées AC et BD ou, ce qui est encore la même chose, lorsque le plan aNbQ sera perpendiculaire au plan principal MNPQ. Ainsi *De tous les plans qui, passant par un même axe, coupent les deux mêmes couples d'arêtes opposées, celui qui donne la plus petite section est le plan perpendiculaire à celui des plans principaux, qui contient, avec l'axe dont il s'agit, celui des deux autres qui se termine aux milieux des arêtes opposées que le plan coupant ne doit pas rencontrer.*

30. Mais il faut bien observer que le problème ne sera possible qu'autant que le plan conduit par NQ, perpendiculairement au plan MNPQ, rencontrera les arêtes opposées AC, BD, entre leurs extrémités, et non sur leurs prolongemens. On doit remarquer aussi que si, par l'arête RS, on conduit un plan perpendiculaire à la section principale MRPS, ce plan qui, comme le premier, divisera le tétraèdre en deux parties équivalentes et coupera comme lui les deux couples d'arêtes opposées AB, DC, AC, DB, donnera aussi, comme lui, une section *minimum*. En général, cette section ne sera pas égale à la première; car il suivrait de leur égalité que les longueurs de deux axes seraient proportionnelles aux plus courtes distances des arêtes opposées auxquelles ils se terminent, ce qui n'est point vrai pour un tétraèdre quelconque. On voit donc que, généralement parlant, il y aura *deux* sections qui jouiront de la propriété du *minimum*,

si les arêtes que le plan coupant doit rencontrer sont désignées, et qu'il y en aura *six*, si au contraire elles ne le sont pas. Il est aisé de voir (16) que les plans qui donnent les sections *minima*, pour un tétraèdre, les donnent aussi pour son conjugué. Celles de ses sections qui sont déterminées par le même plan, sont égales, car leurs diagonales mobiles sont des parallèles comprises entre des plans parallèles. Les quadrilatères qui représentent ces sections sont égaux et renversés.

31. Lorsque deux arêtes opposées du tétraèdre sont égales, des deux sections *minima* faites sur les arêtes égales et sur deux des autres, celle qui passe par l'axe qui se termine à ces dernières est (8) perpendiculaire à l'axe qui se termine aux arêtes inégales que le plan coupant ne rencontre pas. Si le tétraèdre a deux couples d'arêtes opposées égales, les deux sections *minima* faites sur ces arêtes viennent (8) se confondre avec la section principale; et, des deux faites sur les arêtes inégales et sur deux arêtes égales, l'une est la section principale, et l'autre est perpendiculaire à l'axe qui se termine aux deux arêtes égales que le plan coupant ne rencontre pas; cette dernière est moindre que l'autre, car leur rapport est celui de l'axe qui se termine aux arêtes égales à la plus courte distance entre ces arêtes. Si enfin le tétraèdre a ses trois couples d'arêtes opposées égales, les sections *minima* se confondent, deux à deux, (8) avec les sections principales, elles ne sont donc plus alors qu'au nombre de trois seulement.

32. Lorsque le tétraèdre est rectangulaire (22) les six sections *minima* sont distinctes et égales deux à deux. Si de plus les trois arêtes rectangulaires sont égales, les six sections *minima*, toujours distinctes, sont toutes égales, et les diagonales mobiles coupent les arêtes et les axes au quart de leur longueur.

33. Voilà donc le problème proposé à la page 127 de ce volume résolu, pour le cas particulier où le plan coupant serait assujetti à passer par l'un des axes du tétraèdre, et conséquemment aussi pour le cas où l'on exigerait simplement que ce plan passât par son centre : car *De tous les plans conduits par le centre d'un tétraèdre, il n'y*

a uniquement que ceux qui passent par quelqu'un de ses axes qui le divisent en deux parties équivalentes.

Dans la démonstration de cette proposition, nous distinguerons deux cas, savoir : celui où le plan coupant rencontre deux couples d'arêtes opposées, et donne conséquemment une section quadrangulaire, et celui où au contraire ce plan, rencontrant les trois arêtes d'un même angle trièdre, fournit une section triangulaire.

Soit donc, en premier lieu, $mnpq$ (fig. 5) une section faite au tétraèdre ABCD par un plan passant par son centre O et rencontrant en m, n, p, q, ses arêtes DC, DB, AB, AC, sans comprendre aucun de ses axes. Par son intersection cd avec l'un MRPS des deux plans principaux qui coupent les arêtes AD, BC, et par l'axe NQ qui n'est pas compris dans ce plan, soit conduit un plan aNbQ, ce plan (25) partageant le tétraèdre en deux parties équivalentes, il ne s'agira que de prouver que les portions de ce tétraèdre comprises, de part et d'autre, entre ce plan et le premier, ne sont pas équivalentes. Pour cela soient menées Nc, Nd, mc, md; il est facile de s'assurer que les tétraèdres mNcd et pQdc, qui ont pour bases les deux triangles égaux Ncd et Qdc, ont aussi même hauteur, et sont par conséquent équivalents; or le dernier de ces tétraèdres forme, à lui seul, une des parties du tétraèdre total comprises entre les plans coupants, tandis que, pour former l'autre, il faut ajouter à son égal mNcd les deux polyèdres mdNbqm, mcNanm, lesquels ne seront jamais nuls, tant que le plan $mnpq$ ne contiendra aucun des axes. Les portions de tétraèdre comprises entre les plans aNbQ et $mnpq$ sont donc inégales; ce dernier plan ne divise donc pas le tétraèdre en deux parties équivalentes.

Supposons, en second lieu, que le plan coupant rencontre les trois arêtes d'un même angle trièdre du tétraèdre, en passant toujours par son centre. Si d'abord ce plan est parallèle à celui de la face qu'il ne rencontre pas, il est aisé de voir (3) qu'il divisera le tétraèdre en deux parties dont le rapport sera celui de 27 à 37 et qui conséquemment ne seront pas équivalentes.

Admettons donc qu'il n'en soit pas ainsi, et soit ABCD (fig. 6) un tétraèdre coupé par un plan *abc*, passant par son centre et coupant l'angle trièdre D, sans être parallèle à la face opposée ABC ; les distances des points A, B, C, au plan *abc* ne pouvant alors être égales, il y aura toujours deux B, C, de ses points dont les distances à ce plan ne seront pas plus grandes que celle du point A au même plan, et, parmi ces deux, il y en aura au moins un C pour lequel cette distance sera moindre. Cela étant ainsi, la perpendiculaire abaissée sur le plan *abc*, d'un point pris entre A et B, sera au moins égale à celle qu'on abaisserait du point B sur le même plan ; mais la perpendiculaire abaissée sur le plan *abc*, d'un point pris entre A et C, sera plus grande que celle qu'on abaisserait du point C sur le même plan. Or, la somme des perpendiculaires abaissées des points A, B, C, sur le plan *abc* étant (3) égale à la perpendiculaire abaissée du point D sur le même plan, on en doit conclure que cette dernière est moindre que la somme des perpendiculaires abaissées, sur le plan *abc*, du point A et de deux autres points pris sur AB et AC.

Cela posé, par *bc* soit conduit un plan *bfgc* parallèle à l'arête DA ; le prisme triangulaire *abc*A*fg* aura pour expression l'aire du triangle *abc* multipliée par le tiers de la somme des distances des points A, *f*, *g*, au plan de ce triangle ; ce prisme sera donc plus grand que le tétraèdre D*abc*, qui a pour expression l'aire du même triangle multipliée par le tiers de la distance du point D à son plan ; donc, à plus forte raison, le volume du tétraèdre D*abc* sera moindre que celui du tronc de tétraèdre *abc*ABC, dont le prisme *abc*A*fg* fait seulement partie ; donc enfin le plan *abc* partage le tétraèdre DABC en deux parties inégales (*).

Paris, le 28 février 1811.

(*) Il résulte de tout ceci que le problème proposé à la page 127 de ce volume, pris dans le sens le plus général, est encore à résoudre. On doit espérer que M. J. L..., qui a su y jeter tant de jour, ne voudra pas laisser à d'autres le soin d'en compléter la solution.

(*Note des éditeurs.*)