# ANNALES
# DE MATHÉMATIQUES
# PURES ET APPLIQUÉES.


TÉDENAT

## Note communiquée aux rédacteurs des Annales, sur la lettre de M. Kramp, insérée à la page 319 de ce volume

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 1 (1810-1811), p. 349-352

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__349_0>

# NOTE

## *Communiquée aux rédacteurs des* Annales, *sur la lettre de M.* Kramp, *insérée à la page* 319 *de ce volume;*

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Toute équation du second degré à deux indéterminées peut toujours, par des transformations, se réduire à la forme suivante :

$$y^2-Ax^2=B.$$

La résolution de cette équation, en nombres entiers, lorsqu'elle est possible, peut se ramener à l'intégration d'une équation aux différences finies de cette forme :

$$y''-2my'+y=0\ ;$$

son intégration donne

$$(1)\qquad y=\frac{Y+X\sqrt{A}}{2}\left\{m+n\sqrt{A}\right\}^{z-1}+\frac{Y-X\sqrt{A}}{2}\left\{m-n\sqrt{A}\right\}^{z-1},$$

$$(2)\qquad x=\frac{Y+X\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\left\{m+n\sqrt{A}\right\}^{z-1}-\frac{Y-X\sqrt{A}}{2\sqrt{A}}\left\{m-n\sqrt{A}\right\}^{z-1}.$$

Dans ces formules $Y$, $X$, sont les plus petites valeurs entières de $y$, $x$, qui satisfassent à l'équation $y^2-Ax^2=B$.

$m$, $n$, sont deux nombres entiers satisfaisant à l'équation $m^2-An^2=1$.

Je me propose, dans une autre circonstance, de démontrer toutes ces propositions, ainsi que beaucoup d'autres sur les fractions-continues.

L'équation que M. *Kramp* se propose de résoudre (pag. 283) est celle-ci

$$y^2-11x^2=49.$$

Les plus petites valeurs entières de $m$, $n$, qui satisfassent à l'équation $m^2-11n^2=1$ sont $m=10$, $n=3$; celles de $Y$, $X$, sont $Y=7$, $X=0$.

En substituant ces valeurs dans les formules générales données ci-dessus, et y faisant ensuite $z=1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$, on trouve

$$y=7\ ,\ 70\ ,\ 1393\ ,\ 27790\ ,\ \ldots\ldots$$
$$x=0\ ,\ 21\ ,\ 420\ ,\ 8379\ ,\ \ldots\ldots$$

comme on le voit dans le mémoire de M. Kramp ( pag. 285 ).

Si l'on met l'équation $y^2-11x^2=49$ sous cette forme

$$\frac{y^2}{49}-11\frac{x^2}{49}=1\ ,$$

en posant

$$\frac{y}{7}=y'\ , \qquad \frac{x}{7}=x'\ ,$$

on aura à résoudre l'équation

$$y'^2-11x'^2=1.$$

Si l'on en cherchait les solutions en nombres entiers, on trouverait, comme ci-dessus, $y'=10$, $x'=3$.

Mais, si l'on cherche les valeurs fractionnaires qui peuvent y satisfaire, on en trouvera plusieurs parmi celles-ci qui auront l'avantage de donner, pour $y$ et $x$, des nombres entiers essentiellement différens de ceux qui ont déjà été déterminés. De ce nombre sont les valeurs

$$\left.\begin{array}{l} y'=\frac{15}{7}\ , \\ x'=\frac{4}{7}\ ; \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} y=15\ , \\ x=\ 4\ ; \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} y'=\frac{18}{7}\ , \\ x'=\frac{5}{7}\ ; \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} y=18 \\ x=\ 5\ . \end{array}\right.$$

Prenant successivement ces deux systèmes de valeurs pour $Y$ et $X$, on formera les deux nouvelles séries de valeurs correspondantes que voici

$$y=15\ ,\ 282\ ,\ 5625\ ,\ \ldots\ldots$$
$$x=\ 4\ ,\ 85\ ,\ 1696\ ,\ \ldots\ldots$$

$$y=18\ ,\ 345\ ,\ 6882\ ,\ \ldots\ldots$$
$$x=\ 5\ ,\ 104\ ,\ 2075\ ,\ \ldots\ldots$$

comme l'indique M. Kramp dans sa lettre insérée à la page 319.

On voit donc que l'existence des deux dernières séries de valeurs dont parle M. Kramp, et qui, comme les premières, résolvent l'équation, tient 1.° à ce que le terme 49 est un quarré, ce qui permet de mettre l'équation proposée sous la forme

$$y'^2-11x'^2=1\;;$$

2.° à ce que, parmi les systèmes de valeurs fractionnaires de $y'$, $x'$, qui satisfont à cette dernière, il s'en trouve deux qui, à cause de leur dénominateur 7, donnent pour $y$ et $x$ des nombres entiers. On voit en effet que

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{15}{7}\right)^2-11\left(\frac{4}{7}\right)^2=1\,,\\ \left(\frac{18}{7}\right)^2-11\left(\frac{5}{7}\right)^2=1\,,\end{array}\right\}\ \text{donnent}\ \left\{\begin{array}{l}15^2-11.4^2=49\,,\\ 18^2-11.5^2=49\,.\end{array}\right.$$

Si, au contraire, on posait

$$y'=\tfrac{6}{5}\,,\qquad x'=\tfrac{1}{5}\,,$$

on satisferait bien à l'équation

$$y'^2-11x'^2=1\;;$$

mais il en résulterait pour $y$ et $x$ les valeurs fractionnaires

$$y=\tfrac{42}{5}\,,\qquad x=\tfrac{7}{5}.$$

Les formules (1), (2), sont donc très-générales; elles contiennent toutes les séries de valeurs qui peuvent satisfaire à l'équation $y^2-Ax^2=B$, tant en nombres entiers qu'en nombres fractionnaires.

---

N. B. *Pendant que ceci s'imprimait, les rédacteurs ont reçu de* M. Kramp *la lettre suivante :*

Messieurs,

Mes recherches sur la solution complette, en nombres entiers, de l'équation $ay^2+b=x^2$, m'ont conduit à quelques remarques que je m'empresse d'autant plus de vous communiquer qu'elles doivent servir à rectifier ce que j'ai eu l'honneur de vous écrire dans ma dernière lettre.

On sait que, si l'on connaît un cas qui remplisse la condition de cette équation, tel que $aq^2+b=p^2$ ; et que, de plus, on connaisse deux nombres entiers $m$, $n$, tels que $an^2+1=m^2$ ; on peut de cette seule solution en déduire une infinité d'autres. Les $x$, aussi bien que les $y$, formeront deux séries recurrentes soumises à l'échelle de relation *plus* $2m$ et *moins* 1 ; et, en désignant par $p'$, $p''$, $p'''$,.... les termes de la première des deux séries, et par $q'$, $q''$, $q'''$,.... les termes correspondants de l'autre, on aura

$$p'=mp+anq\,,\ p''=2mp'-p\,,\ p'''=2mp''-p'\,,\ldots\ldots$$
$$q'=np+mq\,,\ q''=2mq'-q\,,\ q'''=2mq''-q'\,,\ldots\ldots$$

Par les lettres $p$, $q$, nous désignons toujours les termes *initiaux* des deux séries, qui en même temps sont moindres que tous les suivants; et il y aura autant de ces séries que l'on pourra trouver de valeurs de $p$ et $q$, différentes, et indépendantes entre elles.

Je remarque maintenant que les termes initiaux $p$ et $q$ existent toujours *par couples*, tellement qu'il leur répondra toujours deux autres termes initiaux $P$ et $Q$, liés avec les premiers par les deux équations qui suivent.

$$-p^2+2mpP-P^2=an^2b\ ,$$
$$+q^2+2mqQ+Q^2=n^2b\ ;$$

et autant que ces deux équations admettent de solutions en nombres entiers et positifs, autant aussi il y aura de séries, indépendantes entre elles, dont les termes peuvent résoudre en nombres entiers l'équation $ay^2+b=x^2$. Ces équations, elles-mêmes, à cause de $m^2-1=an^2$, admettent une solution parfaitement rationnelle; il en résultera

$$P=mp-anq\ , \qquad Q=np-mq.$$

Faisant $q=0$, on aura $Q=n\sqrt{b}$; ainsi $b$ doit être un nombre *quarré*. Si on fait $b=r^2$, ce qui donne l'équation $aq^2+r^2=p^2$, on voit d'abord que $p=r$ et $q=0$ est toujours une des valeurs de $y$; on aura ensuite $P=mr$, $Q=nr$, et ces valeurs, qui se déduisent immédiatement de la solution de l'équation $an^2+1=m^2$, sont les seules que le procédé employé dans mon dernier mémoire peut faire découvrir, tant qu'on se bornera à prendre des nombres entiers pour les valeurs de la quantité que dans ce mémoire j'ai désignée par $q$. La suite de l'ouvrage apprendra à trouver la liste complette des autres; et je me bornerai pour le moment à en donner quelques exemples.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pour $11y^2+5^2=x^2$, | on a | $q=8$, | $Q=8$, | $p=6$, | $P=27$, |
| $11y^2+7^2=x^2$, | | $q=4$, | $Q=5$, | $p=15$, | $P=18$, |
| $11y^2+19^2=x^2$, | | $q=7$, | $Q=20$, | $p=30$, | $P=69$, |
| $11y^2+37^2=x^2$, | | $q=15$, | $Q=36$, | $p=62$, | $P=125$, |
| $11y^2+43^2=x^2$, | | $q=4$, | $Q=95$, | $p=45$, | $P=318$, |
| $11y^2+53^2=x^2$, | | $q=16$, | $Q=65$, | $p=75$, | $P=222$. |

Le coefficient 11 donne d'ailleurs

$$m=10\ , \qquad n=3.$$

Le nombre des termes initiaux, indépendans entre eux et des séries qui en dérivent, est encore beaucoup plus grand, lorsque $b$ n'est pas un nombre quarré. Dans l'équation $5y^2+6061=x^2$, je trouve les termes initiaux qui suivent :

| | $p$ | $q$ | $P$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|
| I. | 79 | 6 | 591 | 262. |
| II. | 81 | 10 | 529 | 234. |
| III. | 129 | 46 | 241 | 102. |
| IV. | 159 | 62 | 191 | 78. |
| V. | 831 | 370 | 79 | 6. |
| VI. | 929 | 414 | 81 | 10. |

on a d'ailleurs ici $m=9$. $n=4$.

Agréez, Messieurs, etc.

Strasbourg, le 28 mars 1811.