ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Analise indéterminée. Recherches sur les fractions-continues périodiques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 261-285

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__261_0>

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Recherches sur les fractions-continues périodiques ;

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. Désignons par les lettres a, b, c, d, ..., qui sont supposées se succéder dans l'ordre alphabétique, soit directe soit rétrograde, et sans omission d'aucun intermédiaire, une série de nombres entièrement pris à volonté, et n'étant liés entre eux par aucune loi quelconque. Ces nombres étant donnés, formons la série qui suit :

$$1=1\,,\ P=a\,,\ Q=bP+1\,,\ R=cQ+P\,,\ S=dR+Q\,,\ S=eS+R\,,\ldots.$$

D'après la marche de cette série, l'on voit que l'unité, quand même elle ne serait pas formellement exprimée, est cependant considérée comme en faisant partie et comme précédant tous ses autres termes. Cela étant, nous donnerons le nom de *médiateurs* aux fonctions littérales désignées par les lettres P, Q, R, S, T, ..., et nous nommerons *bases des médiateurs*, les nombres même que nous avons représentés par les lettres a, b, c, d, e, ... Nous aurons ainsi :

Le premier médiateur $P=a$,

Le second médiateur $Q=ab+1$,

Le troisième .... $R=abc+a+c$,

Le quatrième .... $S=abcd+ab+ad+cd+1$,

....

2. D'après cette convention, pour désigner un médiateur quelconque, il suffira d'indiquer, parmi ses bases, la première et la dernière, en sous-entendant les intermédiaires qui seront censées se succéder de l'une à l'autre, suivant l'ordre alphabétique, et sans omission d'aucune.

Ainsi, par exemple, pour désigner le médiateur qui a, pour les première et dernière de ses bases, celles qui sont marquées par les lettres h et m, nous écrirons simplement (HM), et cette notation sera équivalente à

$$hiklm+him+hlm+klm+hik+h+k+m.$$

Nous substituerons des lettres majuscules aux autres, pour prévenir l'équivoque, et nous enfermerons le tout entre deux parenthèses.

3. Tout médiateur, tel que (AN), sera donc déterminé par les deux (AM) et (AL) qui le précèdent, moyennant la formule suivante, que l'on peut regarder comme fondamentale, et tenant lieu de définition.

$$(AN)=n(AM)+(AL)\quad(*).$$

(*) Quelque facile qu'il puisse paraître, d'après ce principe, de déduire les uns des autres les médiateurs (AB), (AC), (AD), ... ; cependant, lorsqu'on n'a besoin que du dernier, et que le nombre des bases est considérable, l'obligation d'écrire tous les médiateurs qui précèdent celui qu'on cherche, peut entraîner des longueurs, et doit faire désirer quelque méthode au moyen de laquelle on puisse directement écrire un médiateur quelconque, dont les bases sont données, sans que préalablement il soit nécessaire d'en former aucun autre ; c'est à quoi l'on peut facilement parvenir, au moyen des observations suivantes :

1.° Tout médiateur ne doit renfermer que des termes de dimensions *paires* seulement ou des termes de dimensions *impaires* seulement, suivant que le nombre de ses bases est lui-même *pair* ou *impair*; de sorte qu'en général, n représentant le nombre de ces bases, les termes du médiateur seront successivement de n, $n-2$, $n-4$, ..., $n-2k$, ..., dimensions ; cette suite se terminant à *zéro* dimensions ou à *une* dimension, suivant que n est *pair* ou *impair*.

2.° Tout médiateur n'a jamais qu'un terme unique de n dimensions, lequel est le produit de toutes ses bases. Si n est pair, le médiateur n'aura pareillement qu'un terme unique de zéro dimensions, et ce terme sera l'unité.

Si l'on prend, au contraire, les bases dans un ordre rétrograde, on aura

$$(NA)=a(NB)+(NC).$$

3.° Les termes intermédiaires sont des produits des diverses bases multipliées $n-2$ à $n-2$, $n-4$ à $n-4$, ..., $n-2k$ à $n-2k$; mais ils ne sont pas tous les produits de cette nature, comme on va le dire tout-à-l'heure.

4.° Dans tout médiateur, les termes sont positifs et sans coefficiens; et, comme jamais la même base n'entre deux fois dans un même terme, ces termes sont aussi sans exposant.

5.° Enfin on reconnaîtra qu'un produit de $n-2k$ facteurs, choisis parmi les n bases, doit ou ne doit pas faire partie du médiateur cherché, au moyen de la règle suivante:

Soient écrits les facteurs de ce produit suivant l'ordre de leur succession alphabétique; soit aussi écrit le produit de toutes les bases suivant le même ordre, et soit divisé le second produit par le premier, en écrivant le quotient toujours de la même manière.

Suivant que, dans ce quotient, *il y aura* ou *il n'y aura pas* des facteurs, *en nombre impair*, se succédant sans interruption de la même manière qu'ils le font dans l'alphabet, le produit soumis à l'épreuve devra être *rejeté* ou *admis.*

Ainsi, par exemple, le produit $abcg$ *ne peut* faire partie du médiateur (AH); car $\frac{abcdefgh}{abcg}=defh$, et l'on voit, dans ce quotient, les *trois* lettres consécutives def, et la lettre *unique* h; au contraire, le produit cdi *doit* faire partie du médiateur (AI); car $\frac{abcdefghi}{cdi}=abefgh$, et l'on ne voit dans ce quotient que les *deux* lettres consécutives ab et les *quatre* lettres consécutives $efgh$.

D'après ces diverses observations, rien n'est plus aisé que de former immédiatement un médiateur dont les bases sont données, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple suivant.

Exemple. Soit proposé de former le médiateur (AF)?

Ce médiateur doit contenir des termes de 6, 4, 2, 0, dimensions, et son seul terme de six dimensions est, comme nous l'avons vu ci-dessus,

$$abcdef;$$

divisant ce premier terme successivement, et de toutes les manières possibles, par *un* produit de deux lettres consécutives, c'est-à-dire, par ab, bc, cd, de, ef, et prenant la somme des quotiens, on formera la totalité des termes de *quatre* dimensions, lesquels seront ainsi

L'analise des médiateurs fournit plusieurs théorèmes intéressans que nous nous contenterons ici d'énoncer, attendu que nous en avons donné la démonstration ailleurs. (*Arith. univ. chap. VIII.*)

4. *Théorème I.* Un médiateur ne change pas de valeur, lorsqu'on renverse l'ordre de ses bases; ainsi, par exemple, les médiateurs (AN) et (NA) sont identiques entre eux.

5. *Théorème II.* Si la première ou la dernière base d'un média-

---

$$cdef+adef+abef+abcf+abcd\,;$$

divisant ensuite successivement le même premier terme, de toutes les manières possibles, par *deux* produits de deux lettres consécutives, c'est-à-dire, par ab et cd, ab et de, ab et ef, bc et de, bc et ef, cd et ef, et prenant la somme des quotiens, on formera la totalité des termes de *deux* dimensions, lesquels seront ainsi

$$ef+cf+cd+af+cd+ab\,;$$

divisant, enfin, le même premier terme par *trois* produits de deux lettres consécutives, ce qui ne pourra avoir lieu que d'une manière unique, savoir ab, cd, ef, le quotient 1 de cette division sera le terme de *zéro* dimensions, c'est-à-dire, le dernier terme du médiateur; en sorte qu'on aura

$$(AF)=\begin{cases} abcdef \\ +cdef+adef+abef+abcf+abcd \\ +ef+cf+cd+af+ad+ab \\ +1. \end{cases}$$

On peut désirer, comme moyen de vérification, de connaître, à l'avance, combien de termes de chaque sorte de dimensions un médiateur doit renfermer; ce nombre de termes est, pour n bases et $n-2k$ dimensions,

$$\frac{n-k}{1}\cdot\frac{n-k-1}{2}\cdot\frac{n-k-2}{3}\cdot\ldots\ldots\frac{n-2k+1}{k}.$$

Le nombre total des termes d'un médiateur de n bases, a donc pour expression

$$1+\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}+\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-5}{3}+\ldots\ldots;$$

série qui se termine d'elle-même si, comme cela doit toujours être, n est entier et positif, et dont la somme des termes peut d'ailleurs être mise sous cette forme finie:

$$\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

(*Note des éditeurs.*)

teur s'évanouit, il perdra, à la fois, ses deux premières bases dans le premier cas, et ses deux dernières dans le second ; de sorte que le degré auquel il appartiendra, sera diminué de deux unités. Par exemple, le médiateur (AN) étant égal à n(AM)+(AL), aussi bien qu'à a(NB)+(NC), devient (AL) dans le cas de $n=0$, et (NC) dans le cas de $a=0$.

6. *Théorème III.* En quelque endroit qu'on partage en deux le médiateur donné (AN), comme, par exemple, entre les bases f et g, il sera égal au produit des deux médiateurs (AF) et (GN), *plus* le produit des deux médiateurs (AE) et (HN), qu'on obtient des deux précédens, en supprimant la dernière base de l'un et la première de l'autre. On aura donc généralement (AN)=(AF)(GN)+(AE)(HN).

7. *Théorème IV.* Si du médiateur (AN) on forme les trois médiateurs (AM), (BN), (BM) ; en supprimant pour l'un la première des bases, pour l'autre la seconde, et pour le troisième les deux bases extrêmes, à la fois ; la différence de produits (AN)(BM)—(AM)(BN) sera constamment égale à l'unité ; et cette unité sera *positive* ou *négative*, suivant que le nombre des bases du médiateur proposé sera *pair* ou *impair*.

8. *Théorème V.* On peut donner au théorème précédent une généralité beaucoup plus grande, en l'énonçant comme il suit : soient les deux médiateurs (AV) et (HO), tels que les bases du dernier soient entièrement comprises parmi celles du premier, et qu'elles s'y succèdent dans le même ordre. Si du premier des deux on retranche les bases excédentes, depuis p jusqu'à v, et qu'on les ajoute à l'autre, il en résultera les deux nouveaux médiateurs (AO) et (HV), entièrement compris dans le premier, et comprenant le second. Alors, l'excès du produit des deux premiers médiateurs sur le produit des deux derniers, c'est-à-dire, (AV)(HO)—(AO)(HV), sera, dans tous les cas, égal au simple produit des deux médiateurs (AF)(QV), affecté du signe *plus* ou du signe *moins*, suivant que le nombre des bases du médiateur intermédiaire (HO) sera *pair* ou *impair*.

9. *Théorème VI.* La fraction-continue

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \ldots\ldots$$

reçoit successivement les expressions littérales qui suivent, selon qu'on s'arrête à la *première* base, à la *seconde*, à la *troisième*,...., savoir :

à la première .... a ou (A) : 1 ;

à la seconde .... (AB) : (B) ;

à la troisième .... (AC) : (BC) ;

à la quatrième .... (AD) : (BD) ;

à la cinquième .... (AE) : (BE) :

et ainsi des autres.

10. Nous appellerons *fractions-continues périodiques* celles dans lesquelles, après un certain nombre de bases initiales qui ne sont soumises à aucune loi, on remarque, parmi les suivantes, une périodicité constante, revenant sans cesse à l'infini : telle serait, par exemple, la fraction-continue

$$\alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots\ldots$$

Ici l'on remarque d'abord les bases α, β, γ, qui peuvent être des nombres quelconques ; viennent ensuite les *bases périodiques* a et b, lesquelles sont supposées se reproduire constamment à l'infini. Nous nommerons *tête de la fraction*, la partie par laquelle elle commence, et qui fait exception à la loi de la période ; elle sera comptée inclusivement jusqu'à la base après laquelle la période devient sensible. Les bases qui composent la tête de la fraction seront nommées *bases initiales*, et nous les désignerons par les lettres de l'alphabet *grec* ; tandis que les lettres de l'alphabet *latin* seront réservées pour désigner les *bases périodiques*.

11. Pour fixer les idées, supposons que les bases initiales aussi

bien que les bases périodiques de la fraction-continue soient au nombre de *six*. Les premières étant désignées par α, β, γ, δ, ε, ζ; et les dernières par les lettres a, b, c, d, e, f; la partie de la fraction qui s'étend à l'infini, depuis le commencement de la période, et que nous représenterons par x, sera

$$x=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{x}.$$

Et, si nous exprimons par y la fraction-continue entière, prolongée à l'infini, à partir de la tête, nous aurons

$$y=\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{x}.$$

La partie de la fraction-continue x qui se termine à la base f sera égale à

$$\frac{(AF)}{(BF)}=\frac{f(AE)+(AD)}{f(BE)+(BD)}.$$

Pour avoir la valeur de la fraction-continue, prolongée à l'infini, il faudra remplacer, dans cette dernière expression, la lettre f par $f+\frac{1}{x}$ ce qui donnera, après les réductions,

$$x=\frac{(AE)+x(AF)}{(BE)+x(BF)};$$

ainsi, la valeur x de la fraction-continue sera l'une des deux racines de l'équation du second degré qui suit :

$$(BF)x^2-\{(AF)-(BE)\}x-(AE)=0.$$

Et, pour exprimer la fraction-continue entière, que nous avons désignée par y, on aura de même :

$$y=\frac{x(\alpha\zeta)+(\alpha\varepsilon)}{x(\beta\zeta)+(\beta\varepsilon)};$$

ce qui donne $$x=\frac{(\alpha\varepsilon)-(\beta\varepsilon)v}{(\beta\zeta)y-(\alpha\zeta)}.$$

12. Substituant cette dernière fraction littérale à la place de x, dans l'équation du second degré en x, la valeur totale de la fraction-continue se trouvera être encore racine d'une équation du second degré, mais beaucoup plus générale que la première.

Faisons, pour abréger,

$$\begin{array}{ll} (AE)=A, & (\alpha\varepsilon)=P, \\ (AF)=B, & (\alpha\zeta)=Q, \\ (BE)=C, & (\beta\varepsilon)=R, \\ (BF)=D, & (\beta\zeta)=S; \end{array}$$

et, de plus, désignons généralement l'unité par u pour les bases *initiales*, et par v pour les bases *périodiques*, ce qui donne (7)

$$QR-PS=u, \qquad BC-AD=v.$$

On aura donc, dans tous les cas, tant $u=1$ que $v=1$; et cette unité sera *positive* ou *négative*, suivant que le nombre des bases sera *pair* ou *impair*.

On aura de même, $uv=1$; *positif*, si le nombre des bases initiales et celui des bases périodiques sont *tous deux pairs* ou *tous deux impairs*, et *négatif*, si l'un de ces nombres est *pair* et l'autre *impair*.

En employant ces notations, les deux équations précédemment obtenues deviendront :

$$Dx^2-(B-C)x-A=0,$$

et $$x=\frac{P-Ry}{Sy-Q};$$

et, en substituant, dans la première, la valeur de x donnée par la seconde, elle deviendra

$$\begin{aligned} 0= &\ (AQ+CP)Q-(BQ+DP)P, \\ &-(AQ+CP)Sy+(BQ+DP)Ry, \\ &-(AS+CR)Qy+(BS+DR)Py, \\ &+(AS+CR)Sy^2-(BS+DR)Ry^2; \end{aligned}$$

or,

or, comme (6)

$$AQ+CP=(\alpha\zeta)(AE)+(\alpha\varepsilon)(BE)=(\alpha E)\ ,$$
$$AS+CR=(\beta\zeta)(AE)+(\beta\varepsilon)(BE)=(\beta E)\ ,$$
$$BQ+DP=(\alpha\zeta)(AF)+(\alpha\varepsilon)(BF)=(\alpha F)\ ,$$
$$BS+DR=(\beta\zeta)(AF)+(\beta\varepsilon)(BF)=(\beta F)\ ;$$

on voit que l'équation en y pourra être mise sous cette autre forme plus simple :

$$\begin{aligned}o=&+(\alpha\varepsilon)(\alpha F)\ -(\alpha\zeta)(\alpha E)\\&-(\alpha\varepsilon)(\beta F)y+(\alpha\zeta)(\beta E)y\\&-(\beta\varepsilon)(\alpha F)y+(\beta\zeta)(\alpha E)y\\&+(\beta\varepsilon)(\beta F)y^2-(\beta\zeta)(\beta E)y^2\ ;\end{aligned}$$

donc, si l'on fait, pour abréger

$$L=(\alpha\varepsilon)(\alpha F)-(\alpha\zeta)(\alpha E)\ ,$$
$$M=(\alpha\varepsilon)(\beta F)-(\alpha\zeta)(\beta E)\ ,$$
$$N=(\beta\varepsilon)(\alpha F)-(\beta\zeta)(\alpha E)\ ,$$
$$O=(\beta\varepsilon)(\beta F)-(\beta\zeta)(\beta E)\ ;$$

il en résultera l'équation

$$o=L-(M+N)y+Oy^2.$$

13. Les quatre coefficiens de cette équation, savoir L, M, N, O, sont liés entre eux par quelques relations générales qu'il importe de connaître.

Examinons d'abord la différence des deux coefficiens du milieu, savoir $-M+N$; on a

$$-M+N=-(\alpha\varepsilon)(\beta F)+(\beta\varepsilon)(\alpha F)+(\alpha\zeta)(\beta E)-(\beta\zeta)(\alpha E)\ ;$$

$$\text{or}\left\{\begin{array}{l}(\beta\varepsilon)(\alpha F)-(\alpha\varepsilon)(\beta F)=\ \ (AF)u\\(\beta\zeta)(\alpha E)-(\alpha\zeta)(\beta E)=-(BE)u\end{array}\right\}(7)\ ;$$

donc

$$-M+N=u\{(AF)-(BE)\}.$$

Ainsi, la différence $-M+N$ des deux coefficiens moyens est indépendante des bases initiales de la fraction et dépend simplement des bases périodiques; elle est égale, dans tous les cas, à $(AF)-(BE)$, affecté du signe *plus* ou du signe *moins*, suivant que le nombre des bases initiales est *pair* ou *impair*. La valeur *absolue* de cette différence dépend donc des bases périodiques, et son *signe* de la parité ou de l'imparité du nombre des bases initiales.

Examinant de même la différence de produits LO—MN, on la trouvera égale au produit des deux facteurs qui suivent :

$$(\alpha\zeta)(\beta\varepsilon)-(\alpha\varepsilon)(\beta\zeta)=\pm u,$$

et

$$(\alpha F)(\beta E)-(\alpha E)(\beta F)=\pm uv.$$

Chacun de ces facteurs est, dans tous les cas, égal à l'unité. Cette unité, pour le premier facteur, est *positive* ou *négative*, suivant que le nombre des bases initiales est *pair* ou *impair*. Et, pour le second facteur, cette même unité est *positive* ou *négative* suivant que le nombre total, tant des bases initiales que des bases périodiques, est *pair* ou *impair*. On voit par là que la différence LO—MN, toujours égale à l'unité, dépendra, quant à son signe, de la parité ou de l'imparité du nombre des bases *périodiques*; de manière que, dans le premier cas, on aura $LO-MN=+1$, tandis qu'on aura, dans le second, $LO-MN=-1$.

14. Dans la notation que nous avons employée, il ne faut pas perdre de vue que les lettres ε et ζ désignent toujours *l'avant-dernière* et la *dernière* des bases initiales, et que les lettres e et f désignent, de même, *l'avant-dernière* et la *dernière* des bases périodiques. Ainsi, l'application des notations $(\alpha\varepsilon)$, $(\alpha\zeta)$, $(\beta\varepsilon)$, $(\beta\zeta)$, n'aura jamais de difficulté, tant que le nombre des bases ne sera pas au-dessous de quatre.

Dans le cas de *trois* bases, désignées par les lettres α, β, γ, ou a, b, c, on aura :

$$(\alpha\varepsilon)=(\alpha\beta), \qquad (AE)=(AB),$$
$$(\alpha\zeta)=(\alpha\gamma), \qquad (AF)=(AC),$$
$$(\beta\varepsilon)=(\beta), \qquad (BE)=(B),$$
$$(\beta\zeta)=(\beta\gamma); \qquad (BF)=(BC).$$

Dans le cas de *deux* bases, désignées par les lettres α, β, ou a, b, on aura :

$$(\alpha\varepsilon)=(\alpha), \qquad (AE)=(A),$$
$$(\alpha\zeta)=(\alpha\beta), \qquad (AF)=(AB),$$

$$(\beta\varepsilon)=1\ , \qquad (\mathrm{BE})=1\ ,$$
$$(\beta\zeta)=(\beta)\ ; \qquad (\mathrm{BF})=(\mathrm{B})\ .$$

Enfin, dans le cas *d'une* seule base, désignée par la lettre α ou a, on aura :

$$(\alpha\varepsilon)=1\ , \qquad (\mathrm{AE})=1\ ,$$
$$(\alpha\zeta)=\alpha\ , \qquad (\mathrm{AF})=a\ ,$$
$$(\beta\varepsilon)=0\ , \qquad (\mathrm{BE})=0\ ,$$
$$(\beta\zeta)=1\ ; \qquad (\mathrm{BF})=1\ .$$

Il peut importer encore d'examiner le cas d'une seule base initiale α, combinée avec un nombre quelconque de bases périodiques. On a alors

$$\mathrm{L}=-\alpha^2(\mathrm{AE})+\alpha(\mathrm{AF})-\alpha(\mathrm{BE})+(\mathrm{BF})\ ,$$
$$\mathrm{M}=-\alpha\,(\mathrm{AE})+(\mathrm{AF})\ ,$$
$$\mathrm{N}=-\alpha\,(\mathrm{AE})-(\mathrm{BE})\ ,$$
$$\mathrm{O}=-(\mathrm{AE}).$$

15. Étant donnée une équation quelconque du second degré

$$0=p-qy+ry^2\ ,$$

on peut la comparer à

$$0=\mathrm{L}-(\mathrm{M}+\mathrm{N})y+\mathrm{O}y^2\ ,$$

moyennant les deux proportions et l'équation qui suivent :

$$p:\mathrm{L}=q:\mathrm{M}+\mathrm{N}\ , \qquad p:\mathrm{L}=r:\mathrm{O}\ , \qquad \mathrm{LO}-\mathrm{MN}=\nu.$$

On en tire

$$\left.\begin{aligned} p\mathrm{M}^2-q\mathrm{LM}+r\mathrm{L}^2&=p\nu\ ,\\ p\mathrm{N}^2-q\mathrm{LN}+r\mathrm{L}^2&=p\nu\ ,\\ r\mathrm{M}^2-q\mathrm{OM}+p\mathrm{O}^2&=r\nu\ ,\\ r\mathrm{N}^2-q\mathrm{ON}+p\mathrm{O}^2&=r\nu\ ;\end{aligned}\right\}(*)$$

(*) Les deux proportions ci-dessus équivalent aux deux équations

$$p(\mathrm{M}+\mathrm{N})=q\mathrm{L}\ , \qquad p\mathrm{O}=r\mathrm{L}\ ,$$

desquelles on déduit encore, par l'élimination de L,

$$r(\mathrm{M}+\mathrm{N})=q\mathrm{O}.$$

Si maintenant, au moyen de l'équation $p\mathrm{O}=r\mathrm{L}$, on élimine successivement O et L de l'équation $\mathrm{LO}-\mathrm{MN}=\nu$, il viendra

$$(\mathrm{A})\quad r\mathrm{L}^2-p\mathrm{MN}=p\nu\ , \qquad (\mathrm{B})\quad p\mathrm{O}^2-r\mathrm{MN}=r\nu\ ;$$

mais, en multipliant successivement par M et par N chacune des deux équations $p(\mathrm{M}+\mathrm{N})=q\mathrm{L}$ et $r(\mathrm{M}+\mathrm{N})=q\mathrm{O}$, elles deviendront, en transposant, d'où l'on déduit, en faisant, pour abréger, $h=q^2-4pr$,

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{h\mathrm{L}^2+4p^2\varphi}=2p\mathrm{M}-q\mathrm{L}=q\mathrm{L}-2p\mathrm{N}\ , \\ \sqrt{h\mathrm{O}^2+4r^2\varphi}=2r\mathrm{M}-q\mathrm{O}=q\mathrm{O}-2r\mathrm{N}\ , \\ \sqrt{h\mathrm{M}^2+4pr\varphi}=q\mathrm{M}-2r\mathrm{L}=q\mathrm{M}-2p\mathrm{O}\ , \\ \sqrt{h\mathrm{N}^2+4pr\varphi}=2r\mathrm{L}-q\mathrm{N}=2p\mathrm{O}-q\mathrm{N}\ . \end{array}\right\} (^*)$$

16. Les deux premières de ces formules servent à déterminer les valeurs entières des y qui peuvent rendre quarrée toute expression de la forme my^2+n^2, dans laquelle m et n sont supposés des nombres entiers quelconques. Comparant, en effet, cette expression à $h\mathrm{O}^2+4r^2$ (**) ou $(q^2-4pr)\mathrm{O}^2+4r^2$, on aura

$$\left.\begin{array}{r} q^2-4pr=m\ , \\ 2r=n\ ; \end{array}\right\} \text{ d'où } 2p=\frac{q^2-m}{n}$$

il en résultera l'équation

$$m=n^2y^2-2nqy+q^2\ (^{***})\ ,$$

qui donne

$$y=\frac{q+\sqrt{m}}{n}.$$

Ici, q pourra être pris à volonté, et la quantité $\mathrm{O}=(\beta\varepsilon)(\beta\mathrm{F})-(\beta\zeta)(\beta\mathrm{E})$ qu'on obtient, en développant en fraction-continue la fraction $\frac{q+\sqrt{m}}{n}$,

---

(C) $p\mathrm{M}^2+p\mathrm{MN}-q\mathrm{LM}=0$, (D) $r\mathrm{M}^2+r\mathrm{MN}-q\mathrm{OM}=0$,
(E) $p\mathrm{M}^2+p\mathrm{MN}-q\mathrm{LN}=0$, (F) $r\mathrm{N}^2+r\mathrm{MN}-q\mathrm{ON}=0$;

formant alors

(A)+(C)=o , (A)+(E)=o , (B)+(D)=o , (B)+(F)=o ,

on obtiendra, en réduisant, les quatre équations de M. Kramp.

(*) Ces résultats s'obtiennent en résolvant successivement chacune des quatre équations par rapport à chacune des deux lettres qui s'y trouvent au quarré.

(**) L'auteur suppose tacitement ici $\varphi=+1$ et conséquemment le nombre des bases périodiques *pair*.

(***) Cette équation s'obtient en substituant, dans l'équation $o=p-qy+ry^2$, les valeurs $p=\frac{q^2-m}{2n}$ et $r=\frac{n}{2}$.

(*Notes des éditeurs.*)

sera l'inconnue y qu'on demandait. Le radical, lui-même, sera

$$nM - qO = qO - nN.$$

17. Comme le coefficient q est entièrement arbitraire, on fera bien de supposer $q=0$; et, dans cette supposition, l'indéterminée y sera simplement égale à la fraction $\frac{\sqrt{m}}{n}$. Développant donc cette fraction en fraction-continue qui, dans tous les cas, sera périodique, on connaîtra ainsi les bases, tant initiales que périodiques; le coefficient $O=(\beta\varepsilon)(\beta F)-(\beta\zeta)(\beta E)$ fera connaître toutes les valeurs de y; et les racines correspondantes de my^2+n^2 seront comprises dans la formule nM ou $-nN$; qui revient à $n\{(\alpha\varepsilon)(\beta F)-(\alpha\zeta)(\beta E)\}$.

18. Dans le cas particulier, mais très-fréquent où $n=1$, on obtient, sur-le-champ et presque sans calcul, les valeurs entières de l'indéterminée y qui peuvent rendre l'expression my^2+1 un quarré parfait. Il suffit, pour cela, de développer en fraction-continue la racine quarrée du coefficient numérique m; et, comme on a $M+N=0$, la seule base initiale sera nécessairement (14)

$$\alpha=\frac{(AF)-(BE)}{2(AE)}\ (^*).$$

On aura de plus $y=(AE)$; et la racine correspondante de my^2+1, sera $(AF)-\alpha(AE)$ ou $(BE)+\alpha(AE)$ ou, enfin, $\frac{1}{2}\{(AF)+(BE)\}$. Les exemples suivans éclairciront cette méthode, et nous apprendrons aussi à rendre quarrée la fonction my^2-1, du moins lorsque cela est possible.

19. *Exemple I.* Déterminer les valeurs entières de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $3y^2+1$?

On a ici $m=3$, d'où

$$\sqrt{m}=\sqrt{3}=1{,}7320508\ldots\ldots=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots;$$

(*) Dans le cas d'une seule base initiale, on a (14)

$$M=-\alpha(AE)+(AF),$$
$$N=-\alpha(AE)-(BE);$$

ainsi, $\alpha=1$, $a=1$, $b=2$; on aura donc les deux séries de médiateurs que voici :

$$\begin{array}{ll}
(AE)=1\,, & (BE)=1\,,\\
(AF)=3\,, & (BF)=2\,,\\
\hline
(AE')=4\,, & (BE')=3\,,\\
(AF')=11\,, & (BF')=8\,,\\
\hline
(AE'')=15\,, & (BE'')=11\,,\\
(AF'')=41\,, & (BF'')=30\,,\\
\hline
(AE''')=56\,, & (BE''')=41\,,\\
(AF''')=153\,, & (BF''')=112 \text{ (*)};
\end{array}$$

ainsi, les valeurs consécutives de y seront celles des médiateurs (AE), c'est-à-dire, 1, 4, 15, 56, ..., et les racines correspondantes de $3y^2+1$ seront $(AF)-(AE)$ ou $(AE)+(BE)$ ou, enfin, $\frac{1}{2}\{(AF)+(BE)\}$, c'est-à-dire, 2, 7, 26, 97, ...

Dans cet exemple, on pourrait aussi regarder les deux bases 1, 1, comme initiales; les bases périodiques seraient alors 2, 1. Ayant donc, dans ce cas,

$$\alpha=1\,,\quad \beta=1\,,\quad a=2\,,\quad b=1\,,$$

on en déduirait les médiateurs que voici :

$$\begin{array}{ll}
(\alpha E)=1\,, & (\beta E)=0\,,\\
(\alpha F)=2\,, & (\beta F)=1\,,\\
\hline
(\alpha E')=5\,, & (\beta E')=3\,,\\
(\alpha F')=7\,, & (\beta F')=4\,,\\
\hline
(\alpha E'')=19\,, & (\beta E'')=11\,,\\
(\alpha F'')=26\,, & (\beta F'')=15\,,
\end{array}$$

---

donc $$o=M+N=-2\alpha(AE)+(AF)-(BE),$$

d'où $$\alpha=\frac{(AF)-(BE)}{2(AE)}.$$

(*) L'auteur emploie ici des lettres accentuées, pour distinguer entre elles les diverses périodes.

(*Notes des éditeurs.*)

$(\alpha E''') = 71$, $(\beta E''') = 41$,
$(\alpha F''') = 97$, $(\beta F''') = 56$,

on aurait alors $y = O = (\beta F) - (\beta E)$; ce qui, appliqué aux cas particuliers, conduit aux nombres précédemment obtenus, savoir : 1, 4, 15, 56,....... Les racines correspondantes seraient comprises sous la formule générale $2(\beta E) - (\beta F)$; ce qui donnerait, comme ci-dessus, les nombres 2, 7, 26, 97,......

Exemple II. Déterminer les valeurs entières de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $7y^2 + 1$?

On a ici $m = 7$, d'où

$$\sqrt{m} = \sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots\ldots ;$$

ce qui donne

$$\alpha = 2 , \quad a = 1 , \quad b = 1 , \quad c = 1 , \quad d = 4 ;$$

en employant les formules du n.° 14, on trouve

$$M = -2(AE) + (AF) ,$$
$$N = -2(AE) - (BE) ,$$
$$O = -(AE).$$

On a, en outre, la suite des médiateurs

$(AE) = 0$,	$(BE) = 1$,
$(AF) = 1$,	$(BF) = 1$,
$(AE') = 3$,	$(BE') = 2$,
$(AF') = 14$,	$(BF') = 9$,
$(AE'') = 48$,	$(BE'') = 31$,
$(AF'') = 223$,	$(BF'') = 144$,
$(AE''') = 765$,	$(BE''') = 494$,
$(AF''') = 3554$,	$(BF''') = 2295$;

les valeurs consécutives de y sont celles de O, savoir : 1, 3, 48, 765,......, et les valeurs correspondantes de la racine quarrée de $7y^2 + 1$ sont celles de M ou de $-N$, c'est-à-dire, 1, 8, 127, 2024....

En considérant comme initiales les bases 1, 1, la période serait 1, 1, 4, 1 ; on aurait donc

$$\alpha=2\,,\quad \beta=1\,,\quad a=1\,,\quad b=1\,,\quad c=4\,,\quad d=1\,;$$

de là résulterait

$$(\alpha\varepsilon)=2\,,\quad (\alpha\zeta)=3\,,\quad (\beta\varepsilon)=1\,,\quad (\beta\zeta)=1\,;$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
L&=2(\alpha F)-3(\alpha E)\,,\\
M&=2(\beta F)-3(\beta E)\,,\\
N&=(\alpha F)-(\alpha E)\,,\\
O&=(\beta F)-(\beta E)\,.
\end{aligned}$$

Les médiateurs seraient ici

$$\begin{array}{ll}
(\alpha E)=2\,, & (\beta E)=1\,,\\
(\alpha F)=3\,, & (\beta F)=1\,,\\
\hline
(\alpha E')=37\,, & (\beta E')=14\,,\\
(\alpha F')=45\,, & (\beta F')=17\,,\\
\hline
(\alpha E'')=590\,, & (\beta E'')=223\,,\\
(\alpha F'')=717\,, & (\beta F'')=271\,,\\
\hline
(\alpha E''')=9413\,, & (\beta E''')=3554\,,\\
(\alpha F''')=11427\,, & (\beta F''')=4319\,,
\end{array}$$

ce qui donnerait pour les valeurs de y, et pour les racines correspondantes de $7y^2+1$, les mêmes nombres que ci-dessus.

Exemple III. Déterminer les valeurs entières de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $107y^2+1$?

En développant $\sqrt{107}$ en fraction-continue, on trouve d'abord la base initiale 10, puis les bases périodiques 2, 1, 9, 1, 2, 20 : d'après quoi on a

$$\begin{aligned}
M&=-10(AE)+(AF)\,,\\
N&=-10(AE)-(BE)\,,\\
O&=-(AE)\,;
\end{aligned}$$

les médiateurs sont

$$\begin{array}{ll}
(AE)=0\,, & (BE)=1\,,\\
(AF)=1\,, & (BF)=1\,,
\end{array}$$

(AE′)

$(AE') = 93$, $(BE') = 32$,
$(AF') = 1892$, $(BF') = 651$,

$(AE'') = 178932$, $(BE'') = 31567$,
$(AF'') = 3640207$, $(BF'') = 642524$;

ce qui donne pour y les valeurs $0, 93, 178932, \ldots$ et, pour les racines correspondantes de $107y^2+1$, $1, 962, 1850887$.

Exemple IV. Déterminer les valeurs entières de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $41y^2+1$?

En développant en fraction-continue, la racine quarrée de 41, on trouve la base initiale 6, suivie des bases périodiques $2, 2, 12$; de manière qu'on a

$$\alpha=6, \quad a=2, \quad b=2, \quad c=12.$$

Le nombre des bases de cette période est *impair*, tandis que nos formules le supposent *pair*; mais, comme cette période revient à l'infini, il est permis de doubler le nombre de ses bases; la période sera ainsi $2, 2, 12, 2, 2, 12$. Le nombre des bases se trouvant alors *pair*, l'application des formules précédentes pourra avoir lieu. En s'arrêtant, au contraire, à trois bases, on trouvera les valeurs de y qui rendent quarrée l'expression $41y^2-1$, puisque, dans ce cas, on a $\varrho=-1$.

Dans l'un et l'autre cas, a désignera toujours la première base périodique, c'est-à-dire, 2; mais, dans le premier, e et f auront les valeurs 2 et 12, tandis que, dans le second, ces lettres se trouveront remplacées par b et c.

Les valeurs de y qui rendront quarrée l'expression $41y^2-1$ seront celles des médiateurs (AE), (AE''), $(AE'''')\ldots$, et les racines correspondantes seront

$$(AF)-6(AE)=(BE)+6(AE),$$

ou $$(AF'')-6(AE'')=(BE'')+6(AE''),$$

ou $$(AF'''')-6(AE'''')=(BE'''')+6(AE''''),$$

et, ainsi des autres. Au contraire, les valeurs de y qui rendront quarrée l'expression $41y^2+1$ seront celles des médiateurs (AE'), (AE'''), ..., et les racines correspondantes seront

$$(AF')-6(AE')=(BE')+6(AE'),$$

ou $$(AF''')-6(AE''')=(BE''')+6(AE'''),$$

et ainsi de autres. Les médiateurs sont ici

(AE) =	5,	(BE) =	2,
(AF) =	62,	(BF) =	25,
(AE′) =	320,	(BE′) =	129,
(AF′) =	3969,	(BF′) =	1600,
(AE″) =	20485,	(BE″) =	8258,
(AF″) =	254078,	(BF″) =	102428,
(AE‴) =	1311360,	(BE‴) =	528641,
(AF‴) =	16264961,	(BF‴) =	6556800.

Ainsi les nombres qui rendent quarrée l'expression $41y^2-1$ sont 5, 20485, ..., et les racines correspondantes sont 32, 131168, ... ; et ceux qui rendent quarrée l'expression $41y^2+1$ sont 320, 1311360,.., et les racines correspondantes sont 2049, 8396801, ...

Cette marche doit être suivie, toutes les fois que, dans le développement de la racine de m, on parvient à un nombre *impair* de bases périodiques ; et l'on voit que notre méthode donne, non-seulement la solution de l'équation $my^2+1=z^2$, mais encore celle de l'équation $my^2-1=z^2$, toutes les fois, du moins, que cette dernière est possible en nombres entiers.

Exemple V. Déterminer les valeurs de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $13y^2-1$?

On a ici

$$\alpha=3\ ,\quad a=1\ ,\quad b=1\ ,\quad c=1\ ,\quad d=1\ ,\quad e=6.$$

Le nombre des bases est ici *impair* ; mais, en le doublant, il devient pair, et on a alors

$$\mathrm{M}=-3(\mathrm{AE})+(\mathrm{AF})\ ,$$
$$\mathrm{N}=-3(\mathrm{AE})-(\mathrm{BE})\ ,$$
$$\mathrm{O}=-(\mathrm{AE})\ ;$$

les médiateurs sont ensuite

(AE) =	5,	(BE) =	3,
(AF) =	33,	(BF) =	20,

$$\begin{array}{llll}
(AE')= & 180, & (BE')= & 109, \\
(AF')= & 1189, & (BF')= & 720, \\
\hline
(AE'')= & 6485, & (BE'')= & 3927, \\
(AF'')= & 42837, & (BF'')= & 25940, \\
\hline
(AE''')= & 233640, & (BE''')= & 141481, \\
(AF''')= & 1543321, & (BF''')= & 934560.
\end{array}$$

Ainsi, les nombres qui rendront quarrée l'expression $13y^2-1$ seront 5, 6485, ..., et les racines de ces quarrés seront 18, 23382, ...; ceux, au contraire, qui rendront quarrée l'expression $13y^2+1$ seront 180, 233640, ..., et les racines correspondantes seront 649, 842401, ...

Exemple VI. Déterminer les valeurs de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $17y^2+1$?

On a simplement ici $\alpha=4$, $a=8$;

la période entière ne consiste donc que dans une base unique. Les médiateurs sont

$$\begin{array}{l}
(AF)=(B)=8, \\
(AF')=(BF)=65, \\
(AF'')=(BF')=528, \\
(AF''')=(BF'')=4289, \\
(AF'''')=(BF''')=34840.
\end{array}$$

les valeurs de y qui rendent $17y^2-1$ un quarré parfait sont donc 65, 4289, ..., et les racines correspondantes sont

$$\begin{array}{l}
(AF'')-4(AF')=(AF)+4(AF')=268, \\
(AF'''')-4(AF''')=(AF'')+4(AF''')=34840,
\end{array}$$

et ainsi des autres; celles qui rendent, au contraire, $17y^2+1$ un quarré parfait sont 8, 528, 34840, ..., et les racines correspondantes sont

$$\begin{array}{l}
(AF')-4(AF)=1+4(AF)=33, \\
(AF''')-4(AF'')=(AF')+4(AF'')=2177, \\
(AF^{v})-4(AF'''')=(AF''')+4(AF'''')=283009,
\end{array}$$

et ainsi des autres.

20. L'équation générale du second degré

$$o=p-qy+ry^2$$

peut être ramenée à

$$o=L-(M+N)y+Oy^2,$$

en déterminant les coefficiens L, M, N, O, de manière à ce qu'ils satisfassent aux quatre équations suivantes

$$L=p\,,\qquad M+N=q\,,\qquad O=r\,,\qquad LO-MN=\varphi\,;$$

la lettre φ désignant toujours l'unité prise en *plus* ou en *moins*, suivant que le nombre des bases périodiques est *pair* ou *impair*. Il en résulte

$$L=p\,,\quad 2M=q+\sqrt{q^2-4pr+4\varphi}\,,$$
$$O=r\,,\quad 2N=q-\sqrt{q^2-4pr+4\varphi}\,.$$

Ainsi, pour que l'équation $o=p-qy+ry^2$ soit réductible à $o=L-(M+N)y+Oy^2$, sans qu'on soit obligé de développer y en fraction-continue périodique, ce qui exige quelquefois qu'on l'évalue d'abord à 40 ou 50 décimales (*), il faudra que $q^2-4pr+4$ ou $q^2-4pr-4$ soit un quarré parfait.

C'est ainsi que l'équation $o=13-21y+3y^2$, dans laquelle on a $q^2-4pr+4=(17)^2$, devient $o=13-19y-2y+3y^2$; on a alors $L=13$, $M=19$, $N=2$, $O=3$; ainsi, dans cet exemple, $LO-MN=+1$. De même l'équation $o=17-19y+y^2$, dans laquelle on a $q^2-4pr-4=(17)^2$, devient $o=17-18y-y+y^2$; on a alors $L=17$, $M=18$, $N=1$, $O=1$; ainsi, dans cet exemple, $LO-MN=-1$.

21. Étant proposée l'équation générale du second degré $o=p-qy+ry^2$, on peut toujours déterminer un facteur k de manière que l'équation $o=kp-kqy+kry^2$ soit réductible à $o=L-(M+N)y+Oy^2$. Il faudra, pour cela que $(q^2-4pr)k^2+4\varphi$ soit un quarré parfait. k

(*) Il est même essentiel d'observer qu'à quelque nombre de chiffres décimaux que l'on pousse l'approximation, on ne saurait jamais avoir une entière confiance dans le résultat qu'on en déduit, si l'on n'a vérifié ce résultat, en remontant à l'équation du second degré dont il doit être une des racines; il peut arriver en effet que la suite, soit des bases initiales, soit des bases périodiques présente, dès les commencemens, une périodicité apparente qui fasse prendre le change sur la véritable loi de la fraction-continue. Au surplus, en procédant par la méthode d'approximation de M. Lagrange, on évite tout embarras sur ce point.

(*Note des éditeurs.*)

étant déterminée de manière à satisfaire à cette condition, on aura

$$\begin{aligned} L&=kp\ ,\\ 2M&=kq+\sqrt{(q^2-4pr)k+4\nu}\ ,\\ 2N&=kq-\sqrt{(q^2-4pr)k+4\nu}\ ;\\ O&=kr. \end{aligned}$$

Soit par exemple l'équation $o=7-14y+4y^2$, qui donne $p=7$, $q=14$, $r=4$, et $q^2-4pr=84$. Il faudra déterminer k de manière que $84k^2+4$, ou $21k^2+1$ soit un quarré parfait; on trouvera d'après cela $k=12$, et l'équation sera $o=84-168y+48y^2$ ou $o=84-139y-29y+48y^2$, d'où $L=84$, $M=139$, $N=29$, $O=48$ et conséquemment $LO-MN=+1$.

22. Étant proposée cette même équation générale du second degré $o=p-qy+ry^2$, qui donne $2ry=q+\sqrt{q^2-4pr}$ aussi bien que $2ry=q-\sqrt{q^2-4pr}$, on en tirera facilement les bases initiales, en développant en fraction-continue la fraction

$$\frac{q+\sqrt{q^2-4pr}}{2r} \quad \text{ou} \quad \frac{q-\sqrt{q^2-4pr}}{2r}.$$

Connaissant ces bases, et par conséquent les médiateurs L, M, N, O, on peut demander les médiateurs A, B, C, D, lesquels conduisent ensuite (11) aux bases périodiques $a, b, c, d, \ldots$; on aura :

$$\left.\begin{aligned} A&=pR^2-qPR+rP^2\ ,\\ B-C&=2pRS-q(PS+QR)+2rPQ\ ,\\ D&=-pS^2+qQS-rQ^2\ ; \end{aligned}\right\}\ (*)$$

et de plus $\quad BC-AD=\nu$, c'est-à-dire $=+1$ ou $=-1$.

Il en résultera

$$A=pR^2-qPR+rP^2\ ,$$

(*) La première équation en y du n.° 14 peut être écrite comme il suit:

$$\begin{aligned} o=&Q^2A-PQ(B-C)-P^2D\\ &-[2QSA-(PS+QR)(B-C)-2PRD]y\\ &+[S^2A-RS(B-C)-R^2D]y^2. \end{aligned}$$

En la comparant à $o=p-qy+ry^2$, il viendra

$$\begin{aligned} Q^2A-PQ(B-C)-P^2D&=p\ ,\\ 2QSA-(PS+QR)(B-C)-2PRD&=q\ , \end{aligned}$$

$$2B = \quad 2pRS - q(PS+QR) + 2rPQ + \sqrt{q^2-4pr+4},$$
$$2C = -2pRS + q(PS+QR) - 2rPQ + \sqrt{q^2-4pr+4},$$
$$D = -pS^2 + qQS - rQ^2.$$

Exemple. Soit proposée l'équation du second degré $0=7-14y+4y^2$. Il faudra déterminer le facteur numérique k de manière que $84k^2+4$ ou $4(21k^2+1)$ devienne un quarré parfait. On trouvera, par les méthodes qui ont été précédemment exposées, $k=12$; multipliant donc l'équation proposée par 12, ce qui donnera $0=84-168y+48y^2$, on aura

$$p=84, \qquad q=168, \qquad r=48;$$

développant alors en fraction-continue la valeur numérique de $y=\frac{1}{4}(7+\sqrt{21})=11,5825757\ldots$, on aura la base initiale $\alpha=2$; et, après elle, commencera la période. Cela donnera

$$P=1, \qquad Q=2, \qquad R=0, \qquad S=1;$$

d'où l'on conclura, par les formules précédentes,

$$A=48, \qquad B=67, \qquad C=43, \qquad D=60;$$

réduisant donc en fraction-continue le rapport $D:B$ ou $60:67$, on aura la suite des bases périodiques, savoir:

$$a=1, \quad b=8, \quad c=1; \quad d=1, \quad e=2, \quad f=1.$$

23. On a vu précédemment que, pour transformer en quarré parfait l'expression my^2+n^2, il faut, en prenant q à volonté, transformer en fraction-continue $y=\frac{q+\sqrt{m}}{n}$: le développement faisant connaître, tant les bases initiales α, β, γ, ..., que les bases périodiques, a, b, c, ..., et par conséquent les médiateurs

$$(\alpha\varepsilon), \quad (\alpha\zeta), \quad (\beta\varepsilon), \quad (\beta\zeta),$$
$$(\alpha E), \quad (\alpha F), \quad (\beta E), \quad (\beta F);$$

et que, déduisant de ces médiateurs les valeurs des coefficiens L, M, N, O, en vertu du N.° 12, les valeurs de y seront celles de O, tandis que les racines correspondantes seront

---

$$S^2A - RS(B-C) - R^2D = r;$$

considérant, dans ces équations, A, B—C, D, comme trois inconnues, et ayant égard à ce que $QR-PS=\pm1$, d'où résulte $(QS-PR)^2=1$, on obtiendra les trois équations de l'auteur; en y joignant ensuite l'équation $BC-AD=\pm1$, on en déduira les valeurs de A, B, C, D, données dans le texte. (*Note des éditeurs.*)

$$nM - qO = qO - nN.$$

Nous en avons fait jusqu'ici l'application au simple cas de $n=1$; voyons actuellement comment il faudra opérer lorsqu'on attribuera à n une valeur entière quelconque, différente de l'unité.

Exemple. Proposons-nous de déterminer les valeurs entières de y qui peuvent rendre quarrée l'expression $11y^2+49$?

On a ici $m=11$, $n=7$; ainsi il faudra développer en fraction-continue la fraction $\frac{q+\sqrt{11}}{7}$. La racine quarrée de 11 est 3,3166247903554.... Quant à la valeur de q, elle est arbitraire, pourvu que q soit entier. On voit, au reste, qu'il suffit de considérer les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; attendu que, passé *six*, les mêmes résultats doivent constamment revenir, et que la différence ne peut tomber que sur la première α des bases initiales, laquelle n'influe en rien sur les valeurs numériques des coefficiens O. Voici une table qui contient, tant les bases initiales que les bases périodiques qui résultent du développement des fractions $\frac{q+\sqrt{11}}{7}$, dans les différentes suppositions qu'on peut faire pour q:

q	α	β	a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	2	9	23	9	4	»	»	»	»
1	0	1	1	1	1	1	1	4	46	4
2	0	1	3	6	»	»	»	»	»	»
3	0	1	9	4	9	23	»	»	»	»
4	1	22	9	4	9	23	»	»	»	»
5	1	5	3	6	»	»	»	»	»	»
6	1	3	46	4	1	1	1	1	1	4

Cette table nous apprend que, dans la recherche des valeurs de y qui peuvent faire devenir l'expression my^2+n^2 un quarré parfait, le choix du nombre arbitraire q n'est pas indifférent. Dans l'exemple actuel, où $m=11$ et $n=7$, les bases initiales sont partout au au nombre de deux ; la première α se reconnaît par la seule inspection des nombres m, n et q. Dans la colonne des secondes bases initiales, désignées par β, on trouve les nombres 1, 2, 3, 5, 22, qui ne paraissent être soumis à aucune loi connue jusqu'ici. Quant aux bases périodiques, les valeurs $q=3$ et $q=4$, dont la somme est 7, nous font connaître la période composée des nombres 9, 4, 9, 23. Ces mêmes bases, quoique disposées dans un ordre différent, sont encore fournies par les valeurs $q=0$, et conséquemment aussi $q=7$, dont la somme est encore 7. Les valeurs $q=1$ et $q=6$, dont la somme est aussi 7, fournissent la période composée des bases 1, 1, 1, 1, 1, 4, 46, 4, quoique disposées dans un ordre différent. Toutes ces périodes nous font connaître certaines valeurs de y, mais elles ne renferment pas la solution complète du problème.

La série complète des valeurs de y résulte des développemens que l'on obtient en supposant $q=2$ ou $q=5$, dont la somme est encore 7. Il en provient les deux bases 3, 6. En adoptant cette période, et la valeur 2 pour q, on a

$$\alpha=0, \quad \beta=1, \quad a=3, \quad b=6,$$

ce qui donne $(\alpha\varepsilon)=0$, $(\alpha\zeta)=1$, $(\beta\varepsilon)=1$, $(\beta\zeta)=1$,

les médiateurs qui en proviennent sont

$$\begin{array}{ll}
(\alpha E)=0, & (\beta E)=1, \\
(\alpha F)=1, & (\beta F)=1, \\
\hline
(\alpha E')=3, & (\beta E')=4, \\
(\alpha F')=19, & (\beta F')=25, \\
\hline
(\alpha E'')=60, & (\beta E'')=79, \\
(\alpha F'')=379, & (\beta F'')=499, \\
\hline
(\alpha E''')=1197, & (\beta E''')=1576, \\
(\alpha F''')=7561, & (\beta F''')=9955.
\end{array}$$

En

En appliquant ensuite les formules du n.° 12, on trouve

$$L=-(\alpha E),$$
$$M=-(\beta E),$$
$$N=(\alpha F)-(\alpha E),$$
$$O=(\beta F)-(\beta E).$$

Les valeurs de y qui renferment la solution du problème sont celles de O, et les racines qui leur répondent sont $7M-2O=2O-7N$. On a donc ainsi;

valeurs de $y=0$, 21, 420, 8379,....
racines.....$=7$, 70, 1393, 27790,....

(*La suite incessamment.*)