DE STAINVILLE

Dynamique. Démonstration élémentaire du principe fondamental de la théorie du mouvement uniformément accéléré

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 202-204

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__202_0>

DYNAMIQUE.

Démonstration élémentaire du principe fondamental de la théorie du mouvement uniformément accéléré ;

Par M. de Stainville, répétiteur à l'école impériale polytechnique.

Théorème. Dans le mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus par un mobile sont entre eux comme les quarrés des temps employés à les parcourir, en supposant que la force accélératrice constante agisse sur ce mobile à partir du repos.

Démonstration. Soient E et E' les espaces que parcourrait un corps qui serait soumis pendant les temps t et t' à l'action d'une force accélératrice constante ; n et n' deux nombres entiers aussi grands qu'on voudra, et qui soient entre eux dans le rapport des temps t et t' ; c'est-à-dire, tels qu'ils puissent exprimer le nombre des intervalles de temps égaux contenus dans t et t'. Cela posé, si un corps est soumis à l'action d'une force accélératrice constante, il doit, par la nature de cette force, se trouver sollicité, au commencement de chaque instant de la même manière que lorsqu'il est sorti du repos, et par conséquent acquérir, en temps égaux, des degrés égaux de vitesse ; si donc on désigne par v l'espace parcouru par le mobile dans le premier instant et par e celui qu'il parcourrait dans le second, si à la fin du premier, la force accélératrice cessait d'agir sur lui, $e+v$ sera celui qu'il parcourra dans le second, $2e+v$ celui qu'il parcourra dans le troisième, et ainsi de suite ; par conséquent l'espace total, qui se compose des espaces partiels, sera la somme des deux suites,

$$o+e+2e+3e+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)e\ ,$$
$$v+v+v+v+\ldots\ldots\ldots\ldots+\qquad v\ ;$$

or v, qui exprime l'espace que parcourrait le mobile pendant un instant, s'il était uniquement soumis à l'action de la force accélératrice, est nécessairement moindre que e, qui exprime celui qu'il parcourrait pendant le même temps, s'il se mouvait uniformément avec la vitesse acquise à la fin du premier instant; donc nv est moindre que ne, d'où il suit que l'espace total E, parcouru pendant le temps t, sera plus grand que,

$$e+2e+3e+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)e\ ,$$

mais plus petit que,

$$e+2e+3e+\ldots\ldots\ldots\ldots+\qquad ne\ ;$$

c'est-à-dire, qu'on aura :

$$E>\frac{n(n-1)}{2}e\quad \text{et}\quad E<\frac{n(n+1)}{2}e\ ;$$

on aura de même :

$$E'>\frac{n'(n'-1)}{2}e\quad \text{et}\quad E'<\frac{n'(n'+1)}{2}e\ ;$$

on aura donc,

$$\frac{E}{E'}>\frac{n^2-n}{n'^2+n'}\quad \text{et}\quad \frac{E}{E'}<\frac{n^2+n}{n'^2-n'}\ .$$

Si l'on fait la division des seconds membres de ces inégalités et que, pour abréger, on représente la fraction $\frac{n}{n'}$ par x, on aura :

$$\frac{E}{E'}>x^2-\frac{x(x+1)}{n'+1}\quad \text{et}\quad \frac{E}{E'}<x^2+\frac{x(x+1)}{n'-1}\ ;$$

quelque grand d'ailleurs que soit n'; or, on peut toujours concevoir ce nombre assez grand pour que les seconds termes des seconds membres de ces inégalités soient aussi petits qu'on voudra. Ainsi, on peut conclure de la première inégalité que le rapport $\frac{E}{E'}$ est plus grand que toute quantité moindre que x^2, et de la seconde que ce même rapport est moindre que toute quantité plus grande que x^2; le rapport $\frac{E}{E'}$ ne pouvant ainsi être ni plus grand ni plus petit que x^2, il s'en suit qu'il doit lui être égal; et, comme on a $x^2 = \frac{n^2}{n'^2} = \frac{t^2}{t'^2}$, il en résulte qu'on a, en général,

$$\frac{E}{E'} = \frac{t^2}{t'^2};$$

ce qu'il fallait démontrer.