ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

J. JOUVIN

Solution du problème II de la page 17 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 124-126

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__124_1>

Solution du problème II de la page 17 de ce volume;

Par M. J. Jouvin, ancien élève de l'école impériale polytechnique.

Énoncé. Déterminer l'équation la plus générale des courbes planes qui jouissent de cette propriété, savoir : que toutes celles de leurs cordes dont la direction passe par un certain point de leur plan sont d'une longueur donnée et constante ?

Construction. Soit P le point donné, et $2r$ la longueur constante de toutes les cordes dont la direction passe par ce point. Soit tracé à volonté une courbe continue ou discontinue que nous désignerons par A ; soit mené par le point P une suite de droites D coupant A en une suite de points C ; enfin, de chacun de ces points C comme centre, et avec le rayon constant r, soit décrit une suite de cercles ; chacun de ces cercles coupera celle des droites D sur laquelle son centre C se trouvera situé, en deux points M et N ; alors tous les points M et tous les points N se trouveront sur deux branches d'une courbe unique qui satisfera, dans toute son étendue, aux conditions du problème ; et cette courbe sera continue ou discontinue, suivant la nature de la courbe arbitraire A.

Analise. Soit rapporté la courbe arbitraire A à deux axes rectangulaires passant par P, et supposons qu'alors son équation soit :

$$y=f(x)\,;$$

l'équation générale des droites D sera :

$$y=\alpha x\,,$$

α étant une indéterminée.

On obtiendra ensuite les équations de tous les points C, en combinant entre elles les deux équations

$$y=f(x)\,,\; y=\alpha x\,;$$

d'où on conclura d'abord : $f(x)=\alpha x$. Si l'on suppose que cette équation, résolue par rapport à x, donne $x=\varphi(\alpha)$, les points C auront pour leurs équations :

$$x=\varphi(\alpha)\,;\; y=\alpha\varphi(\alpha).$$

Les cercles qui auront ces points pour centres et r pour rayon, auront donc pour équation générale :

$$[x-\varphi(\alpha)]^2+[y-\alpha\varphi(\alpha)]^2=r^2\,;$$

en sorte que la combinaison de cette équation avec l'équation $y=\alpha x$ de D fera connaître les points M et N qui répondent à chaque valeur particulière de l'indéterminée α.

Éliminant donc cette indéterminée entre ces deux équations, l'équation résultante en x et y sera celle du lieu géométrique de tous les points M et N ; elle sera donc l'équation de la courbe cherchée. L'équation la plus générale des courbes qui satisfont aux conditions du problème proposé est donc :

$$\left\{x-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2+\left\{y-\frac{y}{x}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2=r^2$$

dans laquelle φ désigne une fonction absolument arbitraire.

Remarque. Nous avons supposé qu'on s'était donné la fonction f, et nous avons vu que, dans ce cas, la fonction φ n'était autre chose que la fonction de α qu'on obtenait pour valeur de x, en résolvant l'équation :

$$f(x)=\alpha x.$$

Si, au contraire, c'était la fonction φ qui fût donnée, et qu'on voulût en déduire la fonction f, cette dernière fonction ne serait autre chose que la fonction de x qu'on obtiendrait, en éliminant α entre les deux équations :

$$x=\varphi(\alpha), \qquad y=\alpha\varphi(\alpha);$$

et en résolvant ensuite l'équation résultante par rapport à y.

Nous ne nous arrêterons pas aux applications qu'on peut faire des résultats auxquels nous sommes parvenus, attendu que ces applications ne peuvent présenter de difficultés.