

S. MANJRA

S. REMMAL

Rayon de convergence générique des équations différentielles à coefficients polynomiaux sur un corps de nombres

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 8, n° 2 (2001), p. 89-105

http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2001__8_2_89_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Rayon de convergence générique des équations différentielles à coefficients polynomiaux sur un corps de nombres

S. Manjra, S. Remmal

Introduction

La fonction "Rayon de convergence générique" $R(\mathcal{M}, r)$ ($r > 0$) d'un module différentiel p -adique \mathcal{M} introduite par Dwork-Robba a joué un rôle fondamental dans le développement de la théorie des équations différentielles p -adiques ainsi que dans ses applications arithmétiques : sommes exponentielles, fonctions L d'une variété algébrique, théorie de transcendance, etc... (Cf. [CR], [Bo], [Re1], [A1], [A2]...). Le calcul de $R(\mathcal{M}, r)$ est en général très difficile si on n'a pas une base cyclique et si la matrice de dérivation est petite [CD1]. Cependant, lorsque \mathcal{M} est un $k(x)$ -module différentiel (où k est un corps de nombres) les résultats de Christol- Dwork et Pons ainsi qu'une évaluation de cette fonction au voisinage des singularités ([RC]) nous ont permis de montrer que l'ensemble des pentes de tous les graphes des fonctions $R_\nu(\mathcal{M}, r)$ (avec ν décrivant les places finies de k) est fini (théorème 3.1). Nous trouvons également des relations de comparaisons entre $R_\nu(\mathcal{M}, 1)$ et le rayon de convergence $R_\nu(Y)$ de la matrice uniforme Y des solutions formelles de Turrittin de \mathcal{M} en 0 dans le cas où \mathcal{M} est un module différentiel non soluble à coefficients éléments analytiques sur une couronne (théorème 2.2). Nous concluons ce travail par une application intéressante des résultats précédents aux G -modules. On vérifiera notamment que les propriétés "Bombieri", "local Bombieri" et "local Galochkin" (Cf. [CD2]6) sont équivalentes pour un $k(x)$ -module différentiel régulier en 0 avec des exposants rationnels.

1 Définitions et rappels

Soit K un anneau commutatif muni d'une dérivation D et soit k l'anneau des constantes de D . Un K -module différentiel \mathcal{M} est un module libre de rang n sur K muni d'un opérateur différentiel δ , c'est-à-dire d'un k -endomorphisme de \mathcal{M} qui vérifie pour tout élément a de K et tout vecteur m de \mathcal{M} :

$$\delta(am) = a\delta(m) + D(a)m.$$

Pour respecter la tradition des équations différentielles, nous dirons qu'il est représenté

dans la base $\mathcal{E} = \{e_i\}$ par la matrice $G = (G_{ij})$ définie par :

$$\delta(e_i) = \sum_{j=1}^n G_{ij} e_j \quad \star$$

On notera alors : $G = Mat(\delta, \mathcal{E})$.

Soit maintenant $\mathcal{F} = \{f_i\}$ une autre base de \mathcal{M} et soit $Y = (Y_{ij}) \in GL(n, K)$ la matrice de changement de base définie par : $f_i = \sum_{1 \leq j \leq n} Y_{ij} e_j$, en posant $Y[G] = Mat(\delta, \mathcal{F})$, on trouve facilement :

$$Y[G] = YGY^{-1} + D(Y)Y^{-1}.$$

On appellera solution dans K du module \mathcal{M} toute application K -linéaire s de \mathcal{M} dans K telle que : $s(\delta(m)) = D(s(m))$; $\forall m \in \mathcal{M}$ c'est à dire :

$$D(s(e_i)) = s(\delta(e_i)) = \sum_{j=1}^n G_{ij} s(e_j) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Autrement dit, le vecteur $(s(e_1), \dots, s(e_n))$ est solution du système différentiel :

$$DX = GX.$$

Inversement, étant donné un tel système différentiel (c'est à dire étant donné une matrice G), on peut lui associer le K -module K^n où l'opérateur différentiel est défini dans la base canonique $\{e_i\}$ de K^n par \star .

Si $L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0 \in K[D]$. On lui associe le K -module différentiel $\mathcal{M} = K[D]/K[D].L$. Ce module est libre de rang n , de base $\{1, D, \dots, D^{n-1}\}$ avec $\delta(D^i) = D^{i+1}$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$ et $\delta(D^n) = -a_{n-1}D^{n-1} - \dots - a_0$.

D'autre part, lorsque K est un corps de $car K = 0$, tout K -module différentiel \mathcal{M} de rang n , possède un vecteur cyclique c'est à dire un élément de \mathcal{M} tel que la famille $\{m, \delta(m), \dots, \delta^{n-1}(m)\}$ forme une base de \mathcal{M} . (pour plus de détails voir [De]). La donnée de \mathcal{M} correspond finalement à celle d'un opérateur ou d'un système différentiel.

1.1 Modules différentiels algébriques

Soient k un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique 0 et $K = k((x))$ le corps des séries formelles à coefficients dans k . On sait que la clôture algébrique de K est : $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$ (où $K_m = K(x^{1/m})$) et que la dérivation $D = \frac{d}{dx}$ de K s'étend d'une manière unique sur $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$.

Si G est sous la forme : $\sum_{s \geq l} G_s x^{s/m}$ avec $G_l \neq 0$; $G_s \in k$ (resp. $G_s \in M(n, k)$); on posera : $ord_x G = l/m$.

Définition 1.1 Soient \mathcal{M} un K -module différentiel de rang n , \mathcal{E} une base de \mathcal{M} , et $G = Mat(\delta, \mathcal{E})$. On appelle rang de Poincaré-Katz de \mathcal{M} le nombre :

$$rpk_0(\mathcal{M}) = \sup_{m \in \mathbb{N}^*} \sup_{Y \in GL(n, K_m)} \{ \min\{-1, ord_x Y[G]\} \}.$$

Remarque: Par construction, le nombre $rpk_0(\mathcal{M})$ ne dépend pas de la base choisie, de plus on a : $rpk_0(\mathcal{M}) = rpk_0(K_m \otimes_K \mathcal{M})$.

Si $rpk_0(\mathcal{M}) = -1$ (resp. $rpk_0(\mathcal{M}) < -1$) on dira que \mathcal{M} a une singularité régulière (resp. irrégulière) en 0.

On dira qu'une matrice G de $M(n, K)$ a une singularité régulière (resp. irrégulière) en 0, si le module associé a une singularité régulière (resp. irrégulière) en 0.

Proposition 1.1 [Ka]-[BV]

Soit \mathcal{M} un K -module de rang n . Soit $G \in M(n, K)$ une matrice qui représente la dérivation $\frac{d}{dx}$ dans une base de \mathcal{M} .

1) S'il existe une matrice $H \in GL(n, K_m)$ telle que $\alpha = ord_x H[G] < -1$ et $(x^{-\alpha} H[G])(0)$ soit non nilpotente alors $rpk_0(\mathcal{M}) = \alpha$.

2) Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $H \in GL(n, k(x^{1/m}))$ telle que :

$$ord_x H[G] = rpk_0(\mathcal{M}).$$

3) Si $\{m, \delta(m), \dots, \delta^{n-1}(m)\}$ est une base de $\mathcal{M} : \delta^n(m) + a_{n-1}\delta^{n-1}(m) + \dots + a_0 = 0$, alors :

$$rpk_0(\mathcal{M}) = \inf_i \left\{ \frac{ord(a_i)}{n-i}, -1 \right\}.$$

Soit $L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0 \in K[D]$. on dit que L possède une singularité régulière (resp. irrégulière) en 0 si

$$rpk_0(L) = \inf_i \left\{ \frac{ord(a_i)}{n-i}, -1 \right\} = -1$$

(resp. $rpk_0(L) < -1$). D'autre part; on notera $rpk_\zeta(L)$ (resp. $rpk_\infty(L)$) le rang de Poincaré-Katz de l'opérateur obtenu à partir de L par le changement :

$x \rightarrow x - \zeta = z$ (resp. $x \rightarrow 1/x = z$) en 0, autrement dit $rpk_\zeta(L)$ (resp. $rpk_\infty(L)$)

caractérise la nature de la singularité de L en ζ (resp. à l'infini). L peut s'écrire sous

la forme : $x^n L = (x \frac{d}{dx})^n + b_{n-1}(x \frac{d}{dx})^{n-1} + \dots + b_0 \in k[[x]][x \frac{d}{dx}]$ si $rpk_0(L) = -1$. Dans ce

cas le K -module $K[D]/K[D]L$ possède une base dans laquelle $\frac{d}{dx}$ est représentée par

une matrice G de $\in M(n, \frac{1}{x}k[[x]])$.

Décomposition de Krull-Turrittin:

Proposition 1.2 [Ba] et [RC]

Soit G une matrice de $M(n, K)$, alors :

1) Si G a une singularité régulière en 0, il existe une matrice $Y \in GL(n, K)$ et une matrice $C \in M(n, k)$ telles que :

$$Y^{-1}[G] = \frac{1}{x}C$$

Ce qui revient à dire que $Y \exp(C \log(x))$ est une solution formelle de l'équation différentielle $\frac{d}{dx}(Z) = G(x)Z$.

2) Si G a une singularité irrégulière en 0 telle que $rpk_0(G) = -l < -1$, il existe un entier m diviseur de $n!$, des matrices $Y \in GL(n, K_m)$, $C \in M(n, k)$ triangulaire supérieur

et des matrices C_{r_i} de $M(n, k)$ diagonales commutant deux à deux et commutant avec C tels que :

$$Y^{-1}[G] = C_{r_1}x^{r_1} + \dots + C_{r_q}x^{r_q} + \frac{1}{x}C$$

$r_1 = \text{rpk}_0(\mathcal{M}) < \dots < r_q < -1$ et $mr_i \in \mathcal{E}$ pour $i = 1, \dots, q$. Autrement dit, la matrice $Y \exp(\frac{C_{r_1}}{r_1+1}x^{r_1+1} + \dots + \frac{C_{r_q}}{r_q+1}x^{r_q+1} + C \log x)$ est solution du système $\frac{d}{dx}(Z) = G(x)Z$.

Soient m un entier naturel non nul, \mathcal{M} un K -module différentiel de rang n et $G(x)$ une matrice représentant $\frac{d}{dx}$ dans une base de \mathcal{M} . Posons $\mathcal{M}_m = K_m \otimes_K \mathcal{M}$ le module différentiel obtenu à partir de \mathcal{M} par le changement de variables : $x \rightarrow x^{1/m} = z$ c'est à dire le $k((z))$ -module différentiel de rang n tel que la matrice $mz^{m-1}G(z^m)$ représente la dérivation $\frac{d}{dz} = mz^{m-1}\frac{d}{dx}$ dans une base de \mathcal{M}_m .

Remarques 1.1

1) Si $\text{rpk}_0(\mathcal{M}) < -1$, la proposition(1.2) montre que la dérivation $\frac{d}{dx}$ est représentée dans une base de \mathcal{M}_m par une matrice $F = Y^{-1}(z)[mz^{m-1}G(z^m)]$ telle que :

$$F = mC_{r_1}z^{s_1} + \dots + mC_{r_q}z^{s_q} + m\frac{1}{z}C \text{ avec } s_i = mr_i + m - 1 \in \mathcal{E} \text{ pour } i = 1, \dots, q .$$

2) Si $G \in M(n, \frac{1}{x}K[[x]])$ alors :

a) il existe une matrice $H \in GL(n, K[x, \frac{1}{x}])$ (transformation de Schearing) telle que les valeurs propres de $(xH[G])(0)$ n'aient pas des différences dans \mathcal{E}^* .

b) si $F \in M(n, \frac{1}{x}K[[x]])$ est une autre matrice qui représente la dérivation $\frac{d}{dx}$ dans une autre base de \mathcal{M} , les matrices $(xG)(0)$ et $(xF)(0)$ auront les mêmes valeurs propres modulo \mathcal{E} .

Définitions 1.1

1) Les valeurs propres de la matrice C de la proposition 1.2 seront appelées les exposants de G .

2) La matrice Y de la même proposition sera appelée matrice de réduction.

1.2 Modules différentiels p -adiques

Soient \mathcal{O}_p le complété de la clôture algébrique de \mathcal{Q} pour la valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$ associée à p et Ω_p une extension de \mathcal{O}_p complète, algébriquement close, dont l'ensemble $|\Omega_p|$ des valeurs absolues est \mathbb{R}_+^* et dont le corps résiduel est transcendant sur celui de \mathcal{O}_p .

Définition : On dit que $t_r \in \Omega_p$ est un point générique de valeur absolue r ; ($r \in \mathbb{R}_+^*$), si $|t_r| = r$ et $D^-(t_r, r) \cap \mathcal{O}_p = \emptyset$.

Un tel point existe pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle $D^-(t_r, r)$ un disque générique.

Soient $0 \leq r_1 < r_2$. On note $\mathcal{H}_{|r_1, r_2|}$ l'anneau des éléments analytiques dans la couronne $\mathcal{C}(|r_1, r_2|) = \{x \in \Omega_p \mid r_1 < |x| < r_2\}$ c'est à dire le complété pour la norme :

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{C}} |f(x)|$$

de l'anneau des fractions rationnelles à coefficients dans \mathcal{C}_p sans pôles dans \mathcal{C} . C'est un sous-anneau de l'anneau des fonctions analytiques dans \mathcal{C} :

$$\mathcal{A}_{]r_1, r_2[} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i \mid a_i \in \mathcal{C}_p \text{ et } \forall r \in]r_1, r_2[: \lim_{i \rightarrow \pm\infty} |a_i| r^i = 0 \right\}.$$

Dans le cas d'un intervalle fermé, on a $\mathcal{H}_{[r_1, r_2]} = \mathcal{A}_{[r_1, r_2]}$.

On note $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$, $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$ respectivement les corps des quotients des anneaux: $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ et $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$. Pour chaque élément a de $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ il existe un polynôme P de $\mathcal{C}_p[x]$ tel que $Pa \in \mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$.

Pour tout $r \in]r_1, r_2[$, on définit une valeur absolue $|\cdot|_r$ sur $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$ en posant :

$$|f|_r = |f(t_r)|.$$

et une norme $\|\cdot\|_r$ sur $M(n, \mathcal{A}_{]r_1, r_2[})$ en posant : $\|G\|_r = \sup_{ij} |G_{ij}|_r$ où

$$G = (G_{ij}) \in M(n, \mathcal{A}_{]r_1, r_2[}).$$

La dérivation $\frac{d}{dx}$ de $\mathcal{C}_p(x)$ se prolonge en une dérivation continue des anneaux $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$, $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$, $\mathcal{H}_{[r_1, r_2]}$ et $\mathcal{A}_{[r_1, r_2]}$. De plus on a, pour tout $r \in]r_1, r_2[$ et $f \in \mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$, l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (f) \right|_r \leq r^{-n} |f|_r ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Remarques 1.2

1) Si $f \in \mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$, alors la fonction : $\rho \mapsto \log |f|_{e^\rho}$ est continue, affine par morceaux sur l'intervalle $] \log r_1, \log r_2[$, et convexe si $f \in \mathcal{A}_{[r_1, r_2]}$.

2) Si $f \in \mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$, alors la fonction : $\rho \mapsto \log |f|_{e^\rho}$ est continue même aux extrémités.

(Cf. [CR]).

1.3 Rayon de convergence générique

La grande différence entre la théorie des équations différentielles complexes et la théorie des équations différentielles p -adiques est qu'une solution p -adique ne converge pas jusqu'à la première singularité contrairement à une solution complexe. Ceci nous amène à introduire le rayon de convergence des solutions au voisinage d'un point.

Soient \mathcal{M} un $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$ -module différentiel de rang n , $G = \text{Mat}(\delta, \mathcal{E})$ et $G_s = \text{Mat}(\delta^s, \mathcal{E})$, les matrices $(G_s)_{s \geq 0}$ sont alors liées par la formule de récurrence :

$$G_0 = I, \quad G_{s+1} = D(G_s) + G_s G.$$

Si t est un point générique de la couronne \mathcal{C} , on vérifie aisément que la matrice :

$$\mathcal{U}_{G,t}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} G_s \frac{(x-t)^s}{s!}$$

est (l'unique) solution de l'équation différentielle : $\frac{d}{dx} \mathcal{U}_{G,t} = G \mathcal{U}_{G,t}$ avec

$\mathcal{U}_{G,t}(t) = I$. En particulier, si z est dans le disque de convergence de $\mathcal{U}_{G,t}$, on aura :

$$\mathcal{U}_{G,z}(x) = \mathcal{U}_{G,t}(x) \mathcal{U}_{G,t}^{-1}(z).$$

Par définition, la matrice $\mathcal{U}_{G,t}$ est analytique dans le disque "ouvert" de centre t_r et de rayon $\liminf_{s \rightarrow \infty} \|G_s/s!\|_r^{-1/s}$.

Posons :

$$R(G, r) = \inf(\liminf_{s \rightarrow \infty} \|G_s/s!\|_r^{-1/s}, r).$$

Soit maintenant $Y = (Y_{ij}) \in GL(n, \mathcal{A}_{|r_1, r_2|})$, alors $:R(G, r) = R(Y[G], r)$; autrement dit ce rayon ne dépend pas de la base dans laquelle on le calcule. Pour plus de détails voir [CD].

Nous sommes amenés à définir le rayon de convergence de \mathcal{M} au bord du disque $D(0, r^-)$ en posant :

$$R(\mathcal{M}, r) = \min(\liminf_{s \rightarrow \infty} \|G_s/s!\|_r^{-1/s}, r).$$

Remarques:

- 1) On dira que \mathcal{M} est soluble en r si $\liminf_{\rho \rightarrow r} R(\mathcal{M}, \rho) = r$.
- 2) Par le théorème de Lutz on a $:R(\mathcal{M}, r) > 0$ pour tout $r > 0$.

Proposition 1.3

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{A}_{|r_1, r_2|}$ -module.

- 1) Soit \mathcal{M}_h le $\mathcal{A}_{|r_1| |h|, |r_2| |h|}$ -module obtenu à partir de \mathcal{M} par le changement : $x \rightarrow xh = z$, $h \in \mathcal{C}_p$, alors pour tout $r \in]r_1, r_2[$, $R(\mathcal{M}_h, r|h|) = R(\mathcal{M}, r)|h|$.
- 2) Soit \mathcal{M}_∞ le $\mathcal{A}_{|r_2^{-1}, r_1^{-1}|}$ -module obtenu à partir de \mathcal{M} par le changement : $x \rightarrow 1/x = z$, alors pour tout $r \in]r_1, r_2[$, $R(\mathcal{M}_\infty, r^{-1}) = R(\mathcal{M}, r)r^{-2}$.
- 3) Soit \mathcal{M}_m le $\mathcal{A}_{|r_1^m, r_2^m|}$ -module obtenu à partir de \mathcal{M} par le changement : $x \rightarrow x^{1/m} = z$, $m \in \mathbb{N}^*$, $|m|_p = 1$, alors pour tout $r \in]r_1, r_2[$ $R(\mathcal{M}_m, r^m) = R(\mathcal{M}, r)r^{m-1}$.
- 4) Soit \mathcal{M}_a le $\mathcal{A}_{|r_1, r_2|}$ -module obtenu à partir de \mathcal{M} par le changement : $x \rightarrow x - a = z$, $a \in \mathcal{C}_p$ et $|a|_p \leq r_1$, alors $R(\mathcal{M}_a, r) = R(\mathcal{M}, r)$ pour tout $r \in]r_1, r_2[$.

La démonstration de cette proposition est simple.

Remarque : Dans le cas où \mathcal{M} est un $\mathcal{H}_{|r_1, r_2|}$ -module, d'après le théorème ci-dessous, l'égalité dans 4) de la proposition précédente reste valide même en r_1 .

On trouve dans les travaux de Christol-Dwork et E. Pons (Cf. [CD1] et [Po]) les propriétés essentielles du rayon de convergence générique qu'on peut résumer dans le théorème ci-dessous :

Théorème 1.1

Soient $0 \leq r_1 < r_2$ deux réels.

- 1) Soit \mathcal{M} un $\mathcal{A}_{|r_1, r_2|}$ -module, alors la fonction : $r \mapsto \log R(\mathcal{M}, \exp(r))$ est définie continue sur $] \log r_1, \log r_2[$ et son graphe $\mathcal{P}_{|r_1, r_2|}$ est un polygone dont les côtés ont des pentes rationnelles à dénominateurs inférieurs ou égaux au rang de \mathcal{M} .
- 2) Si \mathcal{M} est un $\mathcal{A}_{|r_1, r_2|}$ -module, alors ce graphe est concave.
- 3) Si \mathcal{M} est un $\mathcal{H}_{|r_1, r_2|}$ -module, alors la fonction $r \mapsto \log R(\mathcal{M}, \exp(r))$ est continue sur $[\log r_1, \log r_2]$ et son graphe est un polygone à un nombre fini de côtés.

La propriété 2) de la proposition 1.3 montre que le théorème ci-dessus reste vrai même dans le cas $r_2 = \infty$.

Soit $Y \in M(n, \mathcal{C}_p((x)))$, on note $r(Y)$ le plus grand nombre réel positif r tel que les coefficients de la matrice Y soient analytiques dans la couronne $\mathcal{C}(|0, r|)$. Et si en particulier $Y \in GL(n, \mathcal{C}_p((x)))$, on appellera rayon de convergence de Y le nombre : $R(Y) = \inf(r(Y), r(Y^{-1}))$.

Remarques 1.3

Soient \mathcal{M} un $\mathcal{C}_p(x)$ -module de rang n , G une matrice qui représente $\frac{d}{dx}$ dans une base de \mathcal{M} et $Y \in GL(n, \mathcal{C}_p[[x^{1/m}]])$ ($m \leq n!$) une matrice de réduction de G en 0 (voir proposition 1.2 avec $k = \mathcal{C}_p$), alors on a :

- 1) $R(Y) > 0$ Si les exposants de G sont des nombres algébriques (Cf. [Ba]).
- 2) $R(Y)$ est indépendant de la matrice G , autrement dit si G' est une autre matrice qui représente $\frac{d}{dx}$ dans une autre base de \mathcal{M} et Z une matrice de réduction associée à G' en 0, alors $R(Y) = R(Z)$ (Cf. [Ch],[RC]).

2 Comparaison entre $R(Y_G)$ et $R(G, 1)$ dans le cas non soluble

Dans ce paragraphe nous donnerons une comparaison entre le rayon de convergence d'une matrice de réduction d'un module \mathcal{M} au voisinage d'un point singulier régulier et le rayon de convergence générique de \mathcal{M} en 1. Pour cela nous aurons besoin du principe de transfert au voisinage d'un point singulier régulier.

Un élément de \mathcal{C}_p est appelé nombre de Liouville s'il existe un nombre $r < 1$ pour lequel l'inégalité : $|\lambda - n|_p < r^{|n|^\infty}$ se produit pour une infinité d'entier n de \mathbb{Z} .

Remarque : Tout élément algébrique sur \mathbb{Q} n'est pas un nombre de Liouville.

Théorème 2.1 *principe de transfert*[Ch]

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{C}_p(x)$ -module de dimension n . Soit $G \in M(n, \mathcal{C}_p(x))$ une matrice qui représente la dérivation $x \frac{d}{dx}$ dans une base de \mathcal{M} qui n'a pas de singularités dans le disque $D^-(0, R)$. Supposons que les valeurs propres de $G(0)$ soient dans \mathbb{Z}_p et leurs différences ne soient pas des nombres de Liouville, alors il existe $Y \in GL(n, \mathcal{C}_p[[x]])$ telle que : $Y[G] = G(0)$ et pour $0 < r < R$ on a :

$$R(\mathcal{M}, r) = r \text{ ssi } R(Y) \geq r.$$

Autrement dit, $R(Y) = \sup\{0 < r < R \mid R(\mathcal{M}, r) = r\}$.

Théorème 2.2 (cas singulier régulier)

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{C}_p(x)$ -module de dimension n . Soit G une matrice de $M(n, \mathcal{C}_p(x))$, n'ayant pas de singularités dans le disque $D^-(0, 1)$, qui représente $x \frac{d}{dx}$ dans une base de \mathcal{M} telle que les exposants de $G(0)$ soient dans \mathbb{Z}_p et leur différences ne soient pas des nombres de Liouville. Soit $Y \in GL(n, \mathcal{C}_p[[x]])$ une matrice de réduction de G en 0 telle

que $R(Y) < 1$. Soient β (resp. β') la plus grande pente différente de 1 (resp. la plus petite pente) du graphe $\mathcal{P}_{]0,1[}$, alors:

$$1) R(Y) \geq R(\mathcal{M}, 1)^{1/\beta}$$

$$2) R(\mathcal{M}, 1) \geq R(Y)^{1-\beta'}$$

Démonstration: la condition : $R(Y) < 1$ entraîne que le polygone $\mathcal{P}_{]0,1[}$ possède au moins deux pentes. D'après les théorèmes 1.1 et 2.1, il existe des nombres réels : r_i , C_i et des nombres rationnels à dénominateurs dans $[1, n]$: β_i , $i = 1, \dots, m$ tels que :

$$0 < r_0 = R(Y) < r_1 \leq \dots \leq r_m = 1 \text{ et } C_m = R(\mathcal{M}, 1)$$

et

$$R(\mathcal{M}, r) = \begin{cases} r & \text{si } r \in]0, r_0] \\ r^{\beta_{i+1}} C_{i+1} & \text{si } r \in [r_i, r_{i+1}[; 0 \leq i < m. \end{cases}$$

La concavité de la fonction $R(\mathcal{M}, \cdot)$ entraîne que :

$$\beta' = \beta_m \leq \dots \leq \beta_1 = \beta < 1.$$

Par continuité de la fonction $R(\mathcal{M}, \cdot)$ sur $]0, 1]$, on aura en tout point r_i ($0 \leq i < m$) :

$$r_i^{\beta_i - \beta_{i+1}} C_i = C_{i+1}.$$

Donc d'une part, on a :

$$C_1 \geq C_2 \geq \dots \geq C_m = R(\mathcal{M}, 1).$$

Or :

$$R(Y) = r_0^{\beta_1} C_1$$

d'où :

$$R(Y) = C_1^{\frac{1}{1-\beta_1}} \geq R(G, 1)^{\frac{1}{1-\beta_1}}.$$

Et d'autre part, on a :

$$R(Y) = r_0 = r_0^{\beta_1} C_1$$

et

$$C_{i+1} = r_i^{\beta_i - \beta_{i+1}} C_i \geq R(Y)^{\beta_{i+1} - \beta_i} C_i \text{ pour } i \geq 1.$$

En particulier : $R(\mathcal{M}, 1) = C_m \geq R(Y)^{1-\beta'}$.

corollaire 2.1

En particulier on a : $R(Y) \geq R(\mathcal{M}, 1)^n$.

Démonstration:

-Si $\beta \leq 0$ alors par la concavité du graphe et le principe de transfert, on aura :

$$R(Y) = R(\mathcal{M}, R(Y)) \geq R(\mathcal{M}, 1) \geq R(\mathcal{M}, 1)^n.$$

-Si $0 < \beta < 1$ alors par définition : $\beta \leq \frac{n-1}{n}$ et comme $R(\mathcal{M}, 1) \leq 1$, alors :

$$R(Y) \geq R(\mathcal{M}, 1)^{\frac{1}{1-\beta}} \geq R(\mathcal{M}, 1)^n.$$

corollaire 2.2

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{O}_p(x)$ -module de dimension n . Soit G une matrice de $M(n, \mathcal{O}_p(x))$ ($r > 0$), n'ayant pas de singularités dans le disque $D^-(0, r)$, qui représente $x \frac{d}{dx}$ dans une base de \mathcal{M} telle que les exposants de $G(0)$ soient dans \mathcal{E}_p et leurs différences ne soient pas des nombres de Liouville. Soit $Y \in GL(n, \mathcal{O}_p[[x]])$ une matrice de réduction de G en 0 telle que: $R(Y) < r$. Soient β (resp. β') la plus grande pente (resp. la plus petite pente) du graphe $\mathcal{P}_{|0, r[}$, alors :

- 1) $R(Y)r^{-1} \geq (R(\mathcal{M}, r)r^{-1})^{1/1-\beta}$.
- 2) $R(\mathcal{M}, r)r^{-1} \geq (R(Y)r^{-1})^{1-\beta'}$.

la démonstration se déduit du théorème précédent et de la proposition (1.3).

3 Polygone de convergence

On suppose dorénavant que k est un corps de nombres. On notera S l'ensemble de toutes les places finies ν normalisées sur k . On note $|\pi|_\nu$ la valeur absolue d'une solution dans $\overline{\mathbb{Q}}$ de l'équation : $x^{p-1} = -p$ où p est le seul nombre premier tel que: $|p|_\nu < 1$.

Si \mathcal{M} est un $k(x)$ -module différentiel alors, pour chaque place finie ν de k , \mathcal{M} peut être considéré comme un $\mathcal{O}_p(x)$ -module (où $|p|_\nu < 1$). Les quantités : $R_\nu(\mathcal{M}, \cdot)$, $R_\nu(Y)$, $\mathcal{H}_{\nu, |r_1, r_2[}$ et $\mathcal{P}_{\nu, |r_1, r_2[}$ désigneront alors respectivement le rayon de convergence générique, le rayon de convergence de la matrice de réduction Y , l'anneau des éléments analytiques sur la couronne $C_\nu(|r_1, r_2|) = \{x \in \Omega_p \mid r_1 < |x|_\nu < r_2\}$ et le graphe de la fonction $r \rightarrow \log R_\nu(\mathcal{M}, e^r)$ associés à la place finie ν de k définies précédemment pour chaque p .

Dans ce paragraphe, nous montrerons que si \mathcal{M} est un $k(x)$ -module différentiel alors, sauf pour un nombre fini de places finies de k , les polygones de convergence de \mathcal{M} associés aux différentes places finies ν de k ont la même première pente qui est égale à $-rp k_0(\mathcal{M})$. Ensuite nous donnerons une minoration de la variation de la pente du polygone de convergence d'un $\mathcal{H}_{\nu, |r_1, r_2[}$ -module au voisinage d'un point singulier fini non nul. Ce qui nous permettra de prouver que l'ensemble des pentes des polygones de convergence d'un $k(x)$ -module associés aux différentes places finies ν est fini.

Proposition 3.1

Soit \mathcal{M} un $k(x)$ -module de rang n associé au système différentiel $\frac{d}{dx} - \frac{1}{x}C$ où $C \in M(n, k)$, alors pour toute place $\nu \in S$ il existe une constante $0 < c_\nu \leq 1$, dépendant seulement des valeurs propres de la matrice C , telle que :

$$R_\nu(\mathcal{M}, r) = rc_\nu ; \forall r > 0$$

Proposition 3.2

Soit \mathcal{M} un $k(x)$ -module de rang n associé au système différentiel $\frac{d}{dx} - G$ où $G = C_{s_1}x^{s_1} + \dots + C_{s_q}x^{s_q} + \frac{1}{x}C$ telle que :

- 1) les C_{s_i} sont des matrices carrées diagonales non nulles, à coefficients dans k , commutant deux à deux et commutant avec la matrice $C \in M(n, k)$.

2) $s_q < \dots < s_1 < -1$ et $s_i \in \mathbb{Z}$ $i = 1, \dots, q$.

Alors il existe un sous-ensemble $S_0 \subset S$ fini, tel que pour toute place finie $\nu \in S - S_0$, il existe $0 < c_\nu \leq 1$ tel que :

$$R_\nu(\mathcal{M}, r) = \inf \left\{ \inf_{1 \leq i \leq q} \{r^{-s_i} |\pi|_\nu \|C_{s_i}\|_\nu^{-1}\}, rc_\nu \right\}; \forall r > 0.$$

L'évaluation du rayon de convergence générique, dans les propositions 3.1 et 3.2, résulte du calcul de rayon de convergence des opérateurs différentiels de la forme : $\frac{d}{dx} - \frac{\alpha}{x^s}$ où $\alpha \in \mathcal{O}_p^*$ et $s \in \mathbb{N}^*$:

Lemme 3.1 [RC]

Soient $\alpha \in \mathcal{O}_p^*$, $s \in \mathbb{N}^*$ et $r > 0$. Alors

$$R\left(\frac{d}{dx} - \frac{\alpha}{x^s}, r\right) = \begin{cases} rc \text{ où } 0 < c \leq 1 & \text{si } s = 1 \\ \inf(r, r^s |\pi| |\alpha|^{-1}) & \text{si } s > 1 \text{ et } |s-1|_p = 1 \end{cases}$$

Dans tout le reste de ce travail, S_0 désignera l'ensemble fini des places de la proposition 3.2.

Considérons la matrice de réduction Y de la proposition 1.2. Comme pour tout $r < R_\nu(Y)$, le rayon de convergence générique $R_\nu(\mathcal{M}, r)$ peut être calculé à partir de n'importe quelle base de \mathcal{M} puisque le disque générique $D^-(t_r, r)$ (où $|t_r|_p = r$; $|p|_\nu < 1$) est contenu dans la couronne $\mathcal{C}([0, R_\nu(Y)])$. Nous pouvons donc choisir une base e de \mathcal{M} telle que $\text{mat}\left(\frac{d}{dx}, e\right)$ soit une matrice canonique.

Les propositions 3.1, 3.2 et la propriété 3) de la proposition 1.3 permettent d'avoir:

corollaire 3.1

Soit \mathcal{M} un $k(x)$ -module de rang n .

1) Si $\text{rpk}_0(\mathcal{M}) = -l < -1$, alors il existe une matrice $A \in M(n, \overline{\mathbb{Q}})$ et un sous-ensemble $S_0 \subset S$ fini de sorte que pour toute place finie $\nu \in S - S_0$, il existe $0 < \epsilon_\nu < R_\nu(Y)$ tels que :

$$R_\nu(\mathcal{M}, r) = r^l |\pi|_\nu |A|_\nu; \forall 0 < r < \epsilon_\nu.$$

2) Si $\text{rpk}_0(\mathcal{M}) = -1$, alors pour toute place finie ν , il existe $0 < \epsilon_\nu < R_\nu(Y)$ et une constante $0 < c_\nu \leq 1$ tels que :

$$R_\nu(\mathcal{M}, r) = rc_\nu; \forall 0 < r < \epsilon_\nu.$$

Remarques 3.1

1) Soit \mathcal{M} un $k(x)$ -module de rang n tel que $\text{rpk}_0(\mathcal{M}) < -1$, alors, sauf pour un nombre fini de places, il existe $\epsilon_\nu > 0$ tel que l'on ait : $R_\nu(\mathcal{M}, r) = r^l |\pi|_\nu$ pour $0 < r < \epsilon_\nu$.

2) Si \mathcal{M} est un $k(x)$ -module de rang n , alors pour toute place finie $\nu \in S - S_0$, il existe $\epsilon_\nu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{d \log R_\nu(\mathcal{M}, e^\rho)}{d\rho}(\rho) = -\text{rpk}_0(\mathcal{M}); \forall \rho < \epsilon_\nu.$$

En particulier si \mathcal{M} n'a pas de singularités dans $C_\nu(]0, r[)$ où $\nu \in S - S_0$, alors :

$$\frac{d^- \log R_\nu(\mathcal{M}, e^\rho)}{d\rho}(\log r) \leq -rpk_0(\mathcal{M}).$$

3) Si \mathcal{M} est un $k(\frac{1}{x})$ -module n'a pas de singularités dans $C_\nu(]r, \infty[)$ de rang n où $\nu \in S - S_0$, on trouve :

$$\frac{d^+ \log R_\nu(\mathcal{M}, e^\rho)}{d\rho}(\log r) \geq 2 + rpk_\infty(\mathcal{M}).$$

La démonstration se déduit du théorème 1.1, de 2) proposition 1.3 et du corollaire 3.1.

Cette remarque nous permet de retrouver une forme affaiblie du théorème de Katz [Ka]:

corollaire 3.2

Soit \mathcal{M} un $k(x)$ -module tel que $R_\nu(\mathcal{M}, 1) > |\pi|_\nu$ pour presque toute les places finies ν , alors \mathcal{M} n'a que des singularités régulières.

Démonstration : Supposons que \mathcal{M} ait une singularité irrégulière en $\zeta \in \bar{\mathbb{Q}}$. La proposition 1.3 permet de supposer que $\zeta = 0$. Soit S' le sous-ensemble de S contenant toutes les places finies ν pour lesquelles toutes les singularités finies non nulle ont la valeur absolue 1 avec $R_\nu(\mathcal{M}, r) = r^l |\pi|_\nu (l = -rpk_0(\mathcal{M}))$ pour r assez petit. Clairement $S - S'$ est fini. Soit maintenant $\nu \in S'$, \mathcal{M} est alors un $\mathcal{H}_{\nu,]0, 1[}$ -module. D'après la concavité de la fonction : $\rho \mapsto \log R_\nu(\mathcal{M}, e^\rho)$ sur l'intervalle $] - \infty, 0[$ et la remarque précédente on aura : $R_\nu(\mathcal{M}, 1) \leq |\pi|_\nu$, ce qui contredit les hypothèses.

Lemme 3.2

Soient p un nombre premier fixé et $G \in M(n, \mathcal{H}_{]r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon[})$ ($0 < \epsilon < r_0$) telle que toutes les singularités de G , dans $\{x \in \Omega_p \mid r_0 - \epsilon < |x| < r_0 + \epsilon\}$, aient la valeur absolue r_0 . Soit m le degré du polynôme unitaire minimal $P(x)$ tel que $P(x)G \in M(n, \mathcal{H}_{]r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon[})$. Soit β (resp. β') la plus petite pente du graphe $\mathcal{P}_{]r_0 - \epsilon, r_0[}$ (resp. la plus grande pente du graphe $\mathcal{P}_{]r_0, r_0 + \epsilon[}$), alors :

- 1) Si $R(G, r_0) < r_0$, $\beta \geq \beta' - m$.
- 2) Si $R(G, r_0) = r_0$, $\beta \geq \beta'$.

Autrement dit, si $R(G, r_0) < r_0$, alors :

$$\frac{d^- \log R(G, e^\rho)}{d\rho}(\log r_0) - \frac{d^+ \log R(G, e^\rho)}{d\rho}(\log r_0) \geq -m.$$

Dans le cas où $R(G, r_0) = r_0$, le graphe $\mathcal{P}_{]r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon[}$ est concave.

Démonstration: 1) Par construction de P on a :

$$|P|_r = \begin{cases} r_0^m & \text{si } r \leq r_0 \\ r^m & \text{si } r \geq r_0. \end{cases}$$

Comme $R(G, r_0) < r_0$, alors par continuité, il existe $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ tel que :

$$R(G, r) = \liminf_{s \rightarrow \infty} \|G_s/s!\|_r^{-1/s} ; \forall r \in]r_0 - \epsilon_0, r_0 + \epsilon_0[.$$

Posons $F_1 = P(x)G_1 = P(x)G$ et $F_s = P(x)^s G_s \quad \forall s \in \mathbb{N}$. Clairement $F_s \in M(n, \mathcal{H}_{|r_0 - \epsilon_0, r_0 + \epsilon_0|})$ pour tout entier s . Et comme l'enveloppe supérieure de fonctions convexes est convexe, il en résulte que les fonctions :

$$\rho \mapsto \log \|F_s\|_{e^\rho} = \max_{ij} \log |(F_s)_{ij}|_{e^\rho}$$

sont convexes sur $]\log(r_0 - \epsilon_0), \log(r_0 + \epsilon_0)[$. La fonction :

$$h(\rho) = \limsup_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s} \log \|F_s/s!\|_{e^\rho} \right)$$

qui est limite supérieure de fonctions convexes est également convexe. D'autre part :

$$h(\rho) = \begin{cases} m \log r_0 + \limsup_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s} \log \|G_s/s!\|_{e^\rho} \right) & \text{si } \rho \leq \log r_0 \\ m\rho + \limsup_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s} \log \|G_s/s!\|_{e^\rho} \right) & \text{si } \rho \geq \log r_0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$h(\rho) = \begin{cases} m \log r_0 - \log R(G, e^\rho) & \text{si } \rho \leq \log r_0 \\ m\rho - \log R(G, e^\rho) & \text{si } \rho \geq \log r_0 \end{cases}$$

et puisque

$$\frac{d^- \log R(G, e^\rho)}{d\rho}(\rho) \quad \text{et} \quad \frac{d^+ \log R(G, e^\rho)}{d\rho}(\rho)$$

existent et sont finis en tout point de l'intervalle $]\log(r_0 - \epsilon_0), \log(r_0 + \epsilon_0)[$, alors en vertu de la convexité de la fonction h sur le même intervalle on aura :

$$-\frac{d^- h(\rho)}{d\rho}(\rho) + \frac{d^+ h(\rho)}{d\rho}(\rho) = \frac{d^- \log R(G, e^\rho)}{d\rho}(\rho) - \frac{d^+ \log R(G, e^\rho)}{d\rho}(\rho) + m \geq 0$$

pour tout $\rho \in]\log(r_0 - \epsilon_0), \log(r_0 + \epsilon_0)[$ et en particulier en $\log r_0$. D'où 1).

2) Si $R(G, r_0) = r_0$, alors du fait que $R(G, r)$ est toujours inférieur à r , il est clair qu'on a : $\beta \geq 1 \geq \beta'$.

Théorème 3.1 Soit \mathcal{M} un $k(x)$ -module de rang n , alors l'ensemble contenant les pentes des polygones de convergence de \mathcal{M} associés aux différentes places finies ν est fini.

Démonstration: Soit $G \in M(n, k(x))$ une matrice qui représente la dérivation $\frac{d}{dx}$ dans une base de \mathcal{M} . Soit ν une place finie fixée dans S . Désignons par $r_{i,\nu}$; $i = 1, \dots, q$ les valeurs absolues (associées à ν) des singularités finies non nulles de G telles que : $0 < r_{1,\nu} \leq r_{2,\nu} \leq \dots \leq r_{q,\nu}$. Posons :

$$m_{i,\nu} = \inf \{ \deg P \mid P \in k[x], PG \in M(n, \mathcal{H}_{\nu, |r_{i-1,\nu}, r_{i+1,\nu}|}) \} ; i = 2, \dots, q-1 ;$$

$$m_{1,\nu} = \inf \{ \deg P \mid P \in k[x], PG \in M(n, \mathcal{H}_{\nu, |0, r_{2,\nu}|}) \};$$

$$m_{q,\nu} = \inf \{ \deg P \mid P \in k[x], PG \in M(n, \mathcal{H}_{\nu, |r_{q-1,\nu}, \infty|}) \};$$

et

$$\beta_{i,\nu}^- = \frac{d^- \log R_{\nu}(\mathcal{M}, e^{\rho})}{d\rho}(\log r_{i,\nu}) \quad \text{et} \quad \beta_{i,\nu}^+ = \frac{d^+ \log R_{\nu}(\mathcal{M}, e^{\rho})}{d\rho}(\log r_{i,\nu})$$

pour $i = 1, \dots, q$.

D'après le lemme précédent, on a : $\beta_{i,\nu}^- \geq \beta_{i,\nu}^+ - m_i$ pour $i = 1, 2, \dots, q$.

Soit β_{j_0} une pente d'un côté du polygone $\mathcal{P}_{\nu, |r_{j,\nu}, r_{j+1,\nu}|}$, donc par concavité sur chaque intervalle $] \log(r_{i,\nu}), \log(r_{i+1,\nu})[$, on a d'une part :

$$\beta_{j_0} \leq \beta_{j,\nu}^+ \leq \beta_{1,\nu}^- + \sum_{i=1}^j m_{i,\nu} \leq \beta_{1,\nu}^- + \sum_{i=1}^q m_{i,\nu}$$

et d'autre part :

$$\beta_{j_0} \geq \beta_{j+1,\nu}^- \geq \beta_{q,\nu}^+ - \sum_{i=j+1}^q m_{i,\nu} \geq \beta_{q,\nu}^+ - \sum_{i=1}^q m_{i,\nu}.$$

Comme l'entier

$$m = \sum_{i=1}^q m_{i,\nu} = \inf \{ \deg P \mid P \in k[x], PG \in M(n, k[x]) \}$$

est indépendant de la place ν , alors :

$$\beta_{q,\nu}^+ - m \leq \beta_{j_0} \leq \beta_{1,\nu}^- + m.$$

-Si maintenant $\nu \in S - S_0$, alors d'après la remarque 3.1 on a : $\beta_{1,\nu}^- \leq -rpk_0(\mathcal{M})$ et $\beta_{q,\nu}^+ \geq 2 + rpk_{\infty}(\mathcal{M})$. D'où :

$$2 - m + rpk_{\infty}(\mathcal{M}) \leq \beta_{j_0} \leq m - rpk_0(\mathcal{M}).$$

Or les pentes du polygone de convergence \mathcal{P}_{ν} sont rationnelles à dénominateurs dans $[1, n]$, l'ensemble :

$$\{ \beta_{\nu} \in \mathbb{R} \mid \beta_{\nu} \text{ est une pente de } \mathcal{P}_{\nu}, \nu \in S - S_0 \}$$

est donc fini d'après la théorème 1.1. Et comme l'ensemble S_0 est fini, il sera de même pour :

$$\{ \beta_{\nu} \in \mathbb{R} \mid \beta_{\nu} \text{ est une pente de } \mathcal{P}_{\nu}, \nu \in S \}.$$

Conséquence: en particulier si \mathcal{M} n'a que 0 et ∞ comme singularités, alors toute pente β_{ν} de $\{ \mathcal{P}_{\nu} \mid \nu \in S - S_0 \}$ est comprise entre $-rpk_0(\mathcal{M})$ et $2 + rpk_{\infty}(\mathcal{M})$.

4 G -modules et G -fonctions

Soit $(a_s)_{s \geq 0}$ une suite de nombres algébriques vérifiant les conditions suivantes :

(G) : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout s :

(G_1) : les conjugués de a_s sont de valeurs absolues (archimédienne) inférieure à C^s .

(G_2) : le dénominateur commun à a_0, a_1, \dots, a_s est de valeur absolue (archimédienne) inférieure à C^s .

Définition 4.1 Une fonction f , solution d'un opérateur de $k[x, \frac{d}{dx}]$, est dite une G -fonction si elle est de la forme : $\sum_{s \geq 0} a_s x^s$, où les a_s vérifient les conditions précédentes.

Notons que les G -fonctions forment une $\overline{\mathbb{Q}}[x]$ -sous-algèbre de $\overline{\mathbb{Q}}[[x]]$ stable par dérivation.

Soit $\phi \in k(x)[\frac{d}{dx}]$. On dit que ϕ est un G -opérateur s'il vérifie la condition suivante $\prod_{\nu \in S} R_\nu(\phi, 1) \neq 0$ (Cf. [A1]V5.2).

Techniquement, il est parfois plus commode de travailler avec des modules différentiels sur $\overline{\mathbb{Q}}(x)$ plutôt qu'avec des opérateurs différentiels. Les définitions sont compatibles au sens où $\overline{\mathbb{Q}}(x)[\frac{d}{dx}]/\overline{\mathbb{Q}}(x)[\frac{d}{dx}]\phi$ est G -module si et seulement si ϕ l'est.

Si ϕ est un G -opérateur, on aura : $R_\nu(\phi, 1) > |\pi|_\nu$ pour toute place ν au-dessus d'un ensemble de nombres premiers de densité 1. En vertu du théorème de Katz ([A1]V5.2), ϕ n'a que des singularités régulières à exposants rationnels.

Théorème 4.1 (Chudnovsky) [A1]

Soit $f \in \overline{\mathbb{Q}}[[x]]$ une G -fonction, et soit $\phi \in k(x)[\frac{d}{dx}]$ un opérateur non nul d'ordre minimal tel que $\phi f = 0$. Alors ϕ est un G -opérateur.

Lemme 4.1

Soit \mathcal{M} un $k(x)$ -module de rang n , et soit \mathcal{N} le $k(x)$ -module obtenu à partir de \mathcal{M} par un des changements figurant dans la proposition 1.3, alors :

$$R_\nu(\mathcal{M}, 1) = R_\nu(\mathcal{N}, 1)$$

sauf pour un nombre fini de places finies ν .

La démonstration est une conséquence immédiate de la proposition 1.3 et la remarque qui la suit.

Théorème 4.2

Soit \mathcal{M} un G -module de rang n . Soit $Y \in GL(n, \overline{\mathbb{Q}}[[x]])$ une matrice de réduction de \mathcal{M} en $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$. Alors pour tout sous-ensemble non vide $S' \subset S$ on a :

$$\prod_{\nu \in S'} R_\nu(Y) \neq 0.$$

Démonstration : D'une part, on sait que les G -modules sont stables par des changements rationnels de la variable x (lemme 4.1), donc on peut supposer que $\zeta = 0$. D'autre part, soit T l'ensemble des $\nu \in S'$ tel que toutes les éventuelles singularités non nulles ζ de \mathcal{M} vérifient $|\zeta|_\nu = 1$ et tous les exposants sont dans \mathcal{Z}_p ; où $|p|_\nu < 1$. D'où nécessairement $S' - T$ est fini. Notons S_1 le sous ensemble de T tel que l'on a pour chaque $\nu \in S_1$, $R_\nu(Y) \geq 1$ de telle sorte que \mathcal{M} est un $\mathcal{H}_{\nu|0,1}$ -module pour toute $\nu \in T - S_1$. D'après le corollaire (2.1) on a :

$$\prod_{\nu \in T} R_\nu(Y) \geq \prod_{\nu \in T - S_1} R_\nu(Y) \geq \prod_{\nu \in T - S_1} R_\nu(\mathcal{M}, 1)^n \geq \prod_{\nu \in S} R_\nu(\mathcal{M}, 1)^n \neq 0$$

car $R_\nu(\mathcal{M}, 1) \leq 1$. Et comme $S' - T$ est fini et $R_\nu(Y) > 0$ pour tout $\nu \in S$ alors : $\prod_{\nu \in S'} R_\nu(Y) \neq 0$.

En particulier, si on note S' l'ensemble de toutes les places $\nu \in S$ telles que $R_\nu(Y) \leq 1$, on obtiendra : $\prod_{\nu \in S} \inf(R_\nu(Y), 1) = \prod_{\nu \in S'} R_\nu(Y) \neq 0$.

corollaire 4.1

1) Soit S' un sous-ensemble de S , alors si f est une G -fonction, on aura :

$$\prod_{\nu \in S'} r_\nu(f) \neq 0.$$

2) Soit $Y \in GL(n, \overline{\mathbb{Q}}[[x]])$ telle que les coefficients de Y et Y^{-1} soient des G -fonctions, alors : $\prod_{\nu \in S} R_\nu(Y) \neq 0$.

Démonstration : 1) se déduit des théorèmes 4.1 et 4.2

2)-a) Posons : $r_\nu(Y) = \inf_{ij} r_\nu(Y_{ij})$, alors $\prod_{\nu \in S'} r_\nu(Y) \neq 0$ pour tout $S' \subset S$.

En effet, si on munit l'ensemble $[1, n] \times [1, n]$ de l'ordre lexicographique \geq et si on pose $S_{1,1} = \{\nu \in S' \mid r_\nu(Y) = r_\nu(Y_{11})\}$ et pour $(i, j) \geq (1, 1)$:

$$S_{ij} = \{\nu \in S' - \bigcup_{(i,j) \geq (u,v)} S_{u,v} \mid r_\nu(Y) = r_\nu(Y_{ij})\},$$

la famille $(S_{ij})_{ij}$ formera une partition de S' . D'où :

$$\prod_{\nu \in S'} r_\nu(Y) = \prod_{i,j} \prod_{\nu \in S_{i,j}} r_\nu(Y) = \prod_{i,j} \prod_{\nu \in S_{i,j}} r_\nu(Y_{i,j}).$$

Or, d'après 1), on a $\prod_{\nu \in S_{i,j}} r_\nu(Y_{i,j}) \neq 0 \forall i, j \in [1, n]$. Par suite $\prod_{\nu \in S'} r_\nu(Y) \neq 0$.

Et par la même démarche, on montre que : $\prod_{\nu \in S'} r_\nu(Y^{-1}) \neq 0$.

-b) Si on note S' l'ensemble de toutes les places $\nu \in S$ telles que : $r_\nu(Y) > r_\nu(Y^{-1})$, on obtiendra à partir de a) :

$$\prod_{\nu \in S} R_\nu(Y) = \prod_{\nu \in S - S'} r_\nu(Y) \prod_{\nu \in S'} r_\nu(Y^{-1}) \neq 0.$$

Théorème 4.3

Soit \mathcal{M} un $k(x)[\frac{d}{dx}]$ -module de rang n , ayant 0 comme singularité régulière à exposants rationnels. Soit $Y \in GL(n, \overline{\mathbb{Q}}[[x]])$ une matrice de réduction de \mathcal{M} en 0. Si

$$\prod_{\nu \in S} R_{\nu}(Y) \neq 0$$

alors \mathcal{M} est un G -module.

Démonstration : soit T le sous-ensemble de toutes les places $\nu \in S$ pour lesquelles, toutes les éventuelles singularités finies non nuls de \mathcal{M} sont de valeurs absolues (associées à ν)1, tous les exposants en 0 sont dans \mathcal{E}_p avec $|p|_{\nu} < 1$. Nécessairement $S - T$ est fini. Désignons par S_1 le sous-ensemble de toutes les places $\nu \in T$ pour lesquelles : $R_{\nu}(Y) \geq 1$ et par β la borne inférieure de l'ensemble fini des pentes des polygones de convergence de \mathcal{M} associées aux différentes places de S (théorème 3.1). \mathcal{M} est alors un $\mathcal{H}_{\nu,0,1}$ -module pour toute place $\nu \in T - S_1$. D'après le théorème (2.2), on aura :

$$\prod_{\nu \in T} R_{\nu}(\mathcal{M}, 1) = \prod_{\nu \in T - S_1} R_{\nu}(\mathcal{M}, 1) \geq \prod_{\nu \in T - S_1} R_{\nu}(Y)^{1-\beta} \neq 0$$

car par le principe de transfert on a : $R_{\nu}(\mathcal{M}, 1) = 1 \quad \forall \nu \in S_1$. Et comme $S - T$ est fini et $R_{\nu}(\mathcal{M}, 1) > 0$ pour tout $\nu \in S$ alors : $\prod_{\nu \in S} R_{\nu}(\mathcal{M}, 1) \neq 0$. Par suite \mathcal{M} est un G -module.

Remarques 4.1

1) Les théorèmes 4.1 et 4.2 montrent que les conditions "Bombieri" (B) et "local Bombieri" (LB) (Cf. [CD2]6) sont équivalentes en un point singulier régulier à exposants rationnels.

2) Le corollaire 4.1 montre que la condition "local Galochkin" (LG) entraîne (LB) (Cf. [CD2]6).

3) Une conséquence importante de ce travail est de donner une caractérisation p -adique des E -opérateurs. On montrera notamment dans [MR] une version d'une conjecture d'Yves André (Cf. [A2]).

References

- [A1] Y. ANDRÉ, *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics E13, View-Braunschweig/Wiesbaden(1989)
- [A2] Y. ANDRÉ, *Séries Geurey de type arithmétique(I:théorème de pureté et de dualité*, Annals of mathematics, Vol 151, N: 2, January 2000, 705-740
- [Ba] F. BALDASSARRI, *Differential modules and singular points of p -adic differential equations*, ADV in Mathematics, 155-179, 1982
- [Bo] E. BOMBIERI, *On G-functions*, Recent progress in Analytic number theory, Academic Press, 1981; 1-67

- [BS] E. BOMBIERI, S. SPERBER, *On the p -adic analyticity of linear differential equations*, Illinois Journal of Mathematics, Volume 26, Number 1, Spring 1982
- [BV] DG. BABITT, V.S VARADARAJAN, *Formal reduction of meromorphic differential equation, a group theoretic view*, Pacific J. Math 108-1983
- [CD1] G. CHRISTOL, B. DWORK, *Modules différentiels sur des couronnes*, Ann. Inst. Fourier, Academic Press, 44:663-701, 1994
- [CD2] G. CHRISTOL, B. DWORK, *Effective p -adic bounds at regular singular points*, Duke Mathematical Journal Vol62, N3 1991
- [Ch] G. CHRISTOL, *Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers*, Astérisque 119-120, Société Mathématique de France 1984, pp 151-164
- [Cl] D. CLARK, *A note on the p -adic convergence of solution of linear differential equations*, Progr. Am. Math. Soc 17(1966)262-269
- [CR] G. CHRISTOL, P. ROBBA, *Equation différentielles p -adiques. Application aux sommes exponentielles*, Actualités Mathématiques. Hermann 1994
- [De] P. DELIGNE, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, lecture notes in Math., 163(1970)
- [MR] S. MANJRA, S. REMMAL, *E -opérateurs*, en préparation
- [Po] E. PONS, *Polygone de convergence d'un module différentiel p -adique*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.327, Série I, p.77-80, 1998
- [RC] S. REMMAL, G. CHRISTOL, *irregular p -adic differential equation*, lecture notes in algebra and number theory, Marcel Dekker, volume, 208.1999
- [Re1] S. REMMAL, *Problème de transcendance liés aux E -fonctions et aux G -fonctions p -adiques*, G.E.A.D. Revue d'analyse diophantienne Paris. 1981
- [Re2] S. REMMAL, *Équations différentielles p -adiques à point singuliers irréguliers et Principe de transfert*, thèse de doctorat d'état. (Fès, Maroc, 1991)

U.F.R : Géométrie arithmétique
Département de mathématiques et informatiques
Faculté des sciences de Fès
B.P : 1976. Atlas-Fes. Maroc
E-mail : remmal@wanadoo.net.ma