Annales mathématiques Blaise Pascal

Y. Ouknine

A. Berkaoui

Sur l'approximation de la solution d'une équation différentielle stochastique anticipative

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 6, nº 2 (1999), p. 29-39

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1999__6_2_29_0>

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 6, N° 2, 1999, pp.29-39

Sur l'approximation de la solution d'une équation différentielle stochastique anticipative

Y. Ouknine* et A. Berkaoui
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques,
B.P.S 15 Marrakech, MAROC.

October 7, 1999

Abstract

Let $X = \{X_t, t \in [0,1]\}$, be the solution of the anticipating stochastic differential equation :

$$X_t = G + \int_0^t \sigma(X_s) odW_s + \int_0^t b(X_s) ds.$$

Using the same methods as in ([1]), we prove the convergence of the classical approximation to X in Liouville's space.

1. Introduction et préliminaires :

Soit $\Omega = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la mesure de Wiener μ et d'une filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ vérifiant les conditions habituelles. Nous considérons l'équation différentielle stochastique anticipative de type Ocone-Pardoux ([5]) :

$$X_t = G + \int_0^t \sigma(X_s) odW_s + \int_0^t b(X_s) ds, \tag{1.1}$$

*Recherche menée dans le cadre du programme PARS MI 37

$t \in [0,1]$, $W = \{W_t, t \in [0,1]\}$ un mouvement brownien linéaire et l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(X_s) o dW_s$ est prise au sens de Stratonovich. On suppose comme hypothèse $(\mathcal{H})$ que les coefficients $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de classe C^2 avec les dérivées de 1^{er} et $2^{\text{ème}}$ ordre bornées. On suppose aussi que $m = \sigma'\sigma$ satisfait les mêmes hypothèses que σ et b. Soit θ le flot adapté correspondant, solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\theta_t(x) \;=\; x + \int_0^t \sigma(\theta_s(x)) o dW_s + \int_0^t b(\theta_s(x))ds\,, \tag{1.2}$$

$x \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$. Il est prouvé dans ([4]) que pour toute variable aléatoire G, le processus $X_t = \theta_t(G)$ est une solution de (1.1). On suppose dans toute la suite que $b = 0$, le cas $b \neq 0$ est étudié de la même manière.

Soit $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ une subdivision de $[0,1]$ et considérons les notations suivantes : $\delta_i = t_{i+1} - t_i, \delta = \sup \delta_i, \Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ et $\widetilde{t} = t_i$ pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$. On définit pour toute fonction f, $\widetilde{f}(t) = f(\widetilde{t})$. Soit W^π l'interpolation linéaire de W donnée par :

$$W_t^\pi \;=\; W_{t_i} + (t - t_i)\frac{\Delta W_i}{\delta_i}\,,$$

pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$. Notons $X^\pi = \{X_t^\pi, t \in [0,1]\}$ l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$X_t^\pi \;=\; G + \int_0^t \sigma(X_s^\pi)dW_s^\pi\,, \tag{1.3}$$

et ρ^π le flot correspondant :

$$\rho_t^\pi(x) \;=\; x + \int_0^t \sigma(\rho_s^\pi(x))dW_s^\pi\,, \tag{1.4}$$

on a alors comme auparavant $X^\pi = \rho^\pi(G)$.

Ce schéma a été déjà étudié par D. Feyel et A. de La Pradelle ([1]) dans le cas où $G = x_0$ est une constante réelle. Ils ont prouvé que $\rho^\pi(x_0)$ converge vers $\theta(x_0)$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{J}_{\alpha,p})$ pour $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{2}$, où $\mathcal{J}_{\alpha,p}$ est un espace de Liouville, en adoptant une méthode basée essentiellement sur l'intégrale de Liouville et ses propriétés. Le but de ce papier est de généraliser ce résultat en montrant la convergence de X^π vers X dans le même espace. On obtient le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soient X, X^π respectivement les solutions des équations (1.1) et (1.3). Supposons que l'hypothèse $(\mathcal{H})$ est satisfaite et que $\sigma, \sigma', \phi = m' \in L^p(\mathbb{R})$. Alors X^π converge vers X dans $L^p(\Omega, \mathcal{J}_{\alpha,p})$ pour $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{2}$.*

Remarque 1.2. *Dans le cas où la fonction b est non nulle, elle doit satisfaire les mêmes conditions que σ.*

Soit $(L^p, N_{o,p}), 1 \leq p \leq \infty$, l'espace des fonctions réelles définies sur $[0,1]$ et p-intégrables. On définit pour toute fonction mesurable $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, l'intégrale de Liouville par :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt ,$$

$\alpha \in]0,1], x \in [0,1]$. Rappelons que $I^\alpha(L^p) \subset L^p$ et que l'espace de Liouville défini par $\mathcal{J}_{\alpha,p} = I^\alpha(L^p)$, est un espace de Banach séparable muni de la norme suivante $N_{\alpha,p}(I^\alpha f) = N_{o,p}(f)$. De plus I^α est inversible de L^p dans $\mathcal{J}_{\alpha,p}$ et son inverse, noté D^α, est donné par :

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x t^{-\alpha-1}(f(x-t) - f(x)) dt + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} f(x) . \quad (1.5)$$

On note par $\mathcal{H}_\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, l'espace de fonctions höldériennes d'ordre α, nulles en zéro et muni de sa norme naturelle notée $\| \ . \ \|_\alpha$. Pour $\alpha > \frac{1}{p} \geq 0$ et $\beta > \gamma \geq 0$, on a les inclusions suivantes (voir [2],[3],[6]) :

$$\mathcal{J}_{\alpha,p} \subset \mathcal{H}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_\beta \subset \mathcal{J}_{\gamma,\infty} . \quad (1.6)$$

Pour tout espace mesuré U et tout espace de Banach B, on note par $L^p(U,B)$ (ou $L^p(U)$ si $B = \mathbb{R}$), l'espace de fonctions définies sur U, à valeurs dans B et p-intégrables. On désignera par R_p, E_p, N_p les normes associées respectivement aux espaces $L^p(\mathbb{R}), L^p(\Omega)$ et $L^p(\Omega \times \mathbb{R})$. On remarque que pour toute fonction $g \in L^p(\Omega \times \mathbb{R})$, on a :

$$N_p(g) = E_p(R_p(g)) = R_p(E_p(g)) .$$

Dans ([1]), D. Feyel et A. de la Pradelle ont établi un nombre de résultats sur le flot $\theta_t(x)$, solution de l'équation (1.2). On en rappelle quelques uns qui nous seront utiles par la suite. Par analogie avec ([1]), on donne pour $\varepsilon > 0$, la définition d'une ε-approximée de la solution d'une équation de type (1.2) dans l'espace $L^p(\Omega \times \mathbb{R})$ comme étant tout processus $\xi_t(x)$ vérifiant

$$N_p\left\{\xi_t(x) - x - \int_0^t \sigma(\widehat{\xi}_s(x))dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'\sigma(\widehat{\xi}_s(x))ds - \int_0^t b(\widehat{\xi}_s(x))ds\right\} \leq \varepsilon,$$

pour tout $t \in [0,1]$ et $\widehat{\xi}_t$ désigne la projection adaptée de ξ_t par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On reprend la proposition 5, le lemme 6 et la formule (2) dans ([1]) de la façon suivante en supposant toujours que $b = 0$.

Proposition 1.3. *Soit ε_n une suite tendant vers 0 et ξ^n une suite de ε_n-approximées de la solution de (1.2). Si σ et $\sigma'\sigma$ sont lipschitziennes, alors ξ^n_t converge vers θ_t dans $L^p(\Omega \times \mathbb{R})$. Si de plus, $N_p(\xi^n_t - \xi^n_s) \leq K\,(t-s)^{\frac{1}{2}}$, pour tout $t, s \in [0,1]$, alors ξ^n converge vers θ dans $L^p(\Omega \times \mathbb{R}, \mathcal{J}_{\alpha,p})$ avec $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{2}$.*

Preuve : La preuve de la proposition 5 dans ([1]) reste valable. Il suffit de remplacer l'espace Ω par l'espace $\Omega \times \mathbb{R}$.

Lemme 1.4. *Si σ est lipschitzienne et $p > 1$, il existe une constante réelle positive K telle que :*

$$\left|\rho^\pi_t - \rho^\pi_{t_i}\right| \leq \left|\sigma(\rho^\pi_{t_i})\right| |\Delta W_i| \exp K\,|\Delta W_i|\,, \tag{1.7}$$

et

$$E_p(\rho^\pi_t - \rho^\pi_s) \leq K\,|\sigma(x)|\,(t-s)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.8}$$

pour tout $t, s \in [0,1]\,, x \in \mathbb{R}$ et pour toute subdivision π.

2. Démonstration du théorème 1.1 :

On suppose dans toute la suite que l'hypothèse $(\mathcal{H})$ est satisfaite et que les applications σ, σ' et $\phi = m'$ sont dans $L^p(\mathbb{R})$. On notera ρ^π par ρ afin d'alléger les notations et $\rho'_t(x)$ désignera la dérivée de ρ par rapport à x. Comme on va le voir plus tard, on aura besoin de quelques estimations sur ρ'. Notons $z_t(x) = \int_0^t \sigma'(\widetilde{\rho}_s(x))\widetilde{\rho}'_s(x)dW_s$ où $\widetilde{\rho}_s(x) = \rho_{\widetilde{s}}(x)$, et énonçons le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Il existe une constante réelle $K > 0$ indépendante de π, telle que pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :*
(i)

$$\left|\rho'_t(x) - \rho'_{t_i}(x)\right| \leq K\left|\rho'_{t_i}(x)\right| |\Delta W_i| \exp K\,|\Delta W_i|\,.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \left|\rho'_{t_{i+1}}(x) - \rho'_{t_i}(x) - z_{t_{i+1}}(x) + z_{t_i}(x)\right| &\le K\left|\rho'_{t_i}(x)\right| |\Delta W_i|^2 \exp K|\Delta W_i| \\ &\quad \times \left[\left|\sigma'(\rho_{t_i}(x))\right| + \left|\sigma(\rho_{t_i}(x))\right| (|\Delta W_i| + 1)\right]. \end{aligned}$$

Preuve : D'après l'équation (1.4), on trouve :

$$\rho'_t(x) = 1 + \int_0^t \sigma'(\rho_s(x))\rho'_s(x) dW_s^\pi . \tag{2.1}$$

Pour $a, t \in [t_i, t_{i+1}[\,, a < t$, on a :

$$\rho'_t(x) - \rho'_a(x) = \frac{\Delta W_i}{\delta_i} \int_a^t \sigma'(\rho_s(x))\rho'_s(x) ds,$$

donc

$$|\rho'_t(x) - \rho'_a(x)| \le \frac{|\Delta W_i|}{\delta_i} R_\infty(\sigma') \int_a^t |\rho'_s(x)| \, ds,$$

où $R_\infty(\sigma')$ est la norme de σ' dans $L^\infty(\mathbb{R})$. En retranchant et en ajoutant le terme $\rho'_a(x)$ et en appliquant le lemme de Gronwall, on obtient :

$$|\rho'_t(x) - \rho'_a(x)| \le K \frac{(t-a)}{\delta_i} |\rho'_a(x)| \, |\Delta W_i| \exp K |\Delta W_i| \,, \tag{2.2}$$

on prend $a = t_i$ et on retrouve (i). Pour (ii), on trouve d'après (2.1) :

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \left|\rho'_{t_{i+1}}(x) - \rho'_{t_i}(x) - z_{t_{i+1}}(x) + z_{t_i}(x)\right| \\ &\le \frac{|\Delta W_i|}{\delta_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\sigma'(\rho_s(x))\rho'_s(x) - \sigma'(\widetilde{\rho}_s(x))\widetilde{\rho}'_s(x)\right| ds \\ &\le \frac{|\Delta W_i|}{\delta_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big|\sigma'(\rho_{t_i}(x))(\rho'_s(x) - \rho'_{t_i}(x)) \\ &+ (\sigma'(\rho_s(x)) - \sigma'(\rho_{t_i}(x)))((\rho'_s(x) - \rho'_{t_i}(x)) + \rho'_{t_i}(x))\Big| \, ds . \end{aligned}$$

Sachant que σ' est lipschitzienne de constante de Lipschitz inférieure à $R_\infty(\sigma'')$ et en utilisant (i) et (1.7), on obtient (ii). ■

Afin de pouvoir appliquer la proposition 1.3 à ρ', nous donnons dans le lemme qui suit, une estimation de type Kolmogorov en norme $L^p(\Omega \times \mathbb{R})$.

Lemme 2.2. *Il existe une constante $K > 0$ telle que l'on ait :*

$$N_p(\rho'_t - \rho'_s) \leq K(t-s)^{\frac{1}{2}},$$

pour tout $s \leq t \in [0,1]$ et pour toute subdivision π.

Preuve : Soient $a \leq t \in \pi$, alors on a :

$$|\rho'_t(x) - \rho'_a(x) - z_t(x) + z_a(x)| \leq \sum_{a \leq t_i < t} \left|\rho'_{t_{i+1}}(x) - \rho'_{t_i}(x) - z_{t_{i+1}}(x) + z_{t_i}(x)\right|,$$

d'après (ii) du lemme 2.1, on trouve :

$$\begin{aligned} E_p(\rho'_t(x) - \rho'_a(x) - z_t(x) + z_a(x)) &\leq K' \sum_{a \leq t_i < t} E_p(\sigma^*(\rho_{t_i}(x))\rho'_{t_i}(x))\delta_i \\ &\leq K' \int_a^t E_p(\sigma^*(\widetilde{\rho}_s(x))\widetilde{\rho}'_s(x))ds, \end{aligned}$$

où $\sigma^* = |\sigma| + |\sigma'|$. On applique les deux inégalités de Burkholder et de Cauchy-Schwarz et on obtient :

$$E_p\left[(\rho'_t(x) - \rho'_a(x))^2\right] \leq K_1 \int_a^t E_p\left[(\sigma^*(\widetilde{\rho}_s(x))\widetilde{\rho}'_s(x))^2\right] ds. \tag{2.3}$$

Puisque σ^* est bornée, en retranchant et en ajoutant le terme $\rho'_a(x)$ et en appliquant le lemme de Gronwall, on retrouve :

$$E_p\left[(\rho'_t(x))^2\right] \leq K'_1, \tag{2.4}$$

où K'_1 est une constante réelle indépendante de t, x et de π.

On remarque aussi à l'aide de l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$),que l'on a :

$$E_p\left[(\sigma^*(\rho_t(x))\rho'_t(x))^2\right] \leq E_{p_1}\left[(\sigma^*(\rho_t(x)))^2\right] E_{p_2}\left[(\rho'_t(x))^2\right].$$

D'après (1.8), on trouve que $E_{p_1}(\sigma^*(\rho_t(x))) \leq K"\sigma^*(x)$. Par conséquent

$$N_p(\sigma^*(\rho_t)\rho'_t) \leq K\,R_p(\sigma^*). \tag{2.5}$$

La formule (2.3) nous donne alors que :

$$N_p(\rho'_t - \rho'_a) \leq K^*(t-a)^{\frac{1}{2}}.$$

Grâce à (2.2), la dernière inégalité s'étend facilement à tout $t, a \in [0,1]$ avec K^* une constante réelle indépendante de π. ∎

Lemme 2.3. *Soient $m = \sigma'\sigma$ et $\phi = m'$. Il existe une constante réelle $K > 0$ telle que l'on ait pour tout $t \in \pi$:*

$$N_p(\rho'_t - 1 - z_t - \tfrac{1}{2}\sum_{t_i<t} \phi(\rho_{t_i})\rho'_{t_i}(\Delta W_i)^2) \;\leq\; K\,t\sqrt{\delta}\,.$$

Preuve : Posons :

$$L_i \;=\; \rho'_{t_{i+1}} - \rho'_{t_i} - \sigma(\rho_{t_i})\rho'_{t_i}(\Delta W_i) - \tfrac{1}{2}\phi(\rho_{t_i})\rho'_{t_i}(\Delta W_i)^2\,.$$

Par le calcul différentiel ordinaire, on a :

$$L_i \;=\; \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)(\phi(\rho_s)\rho'_s - \phi(\rho_{t_i})\rho'_{t_i})ds\frac{(\Delta W_i)^2}{\delta_i^2}\,,$$

donc

$$N_p(L_i) \;\leq\; \frac{1}{\delta_i^2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)N_p\left[(\phi(\rho_s)\rho'_s - \phi(\rho_{t_i})\rho'_{t_i})(\Delta W_i)^2\right] ds \qquad (2.6)$$

or on voit que :

$$\left|\phi(\rho_s)\rho'_s - \phi(\rho_{t_i})\rho'_{t_i}\right| \;\leq\; \left|\rho'_s - \rho'_{t_i}\right| |\phi(\rho_s)| + \left|\phi(\rho_s) - \phi(\rho_{t_i})\right| \left|\rho'_{t_i}\right|$$

et puisque l'application ϕ est lipschitzienne et par application de l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$) :

$$\begin{aligned} N_p\left[(\phi(\rho_s)\rho'_s - \phi(\rho_{t_i})\rho'_{t_i})(\Delta W_i)^2\right] \;&\leq\; N_{p_1}(\rho'_s - \rho'_{t_i})N_{p_2}(\phi(\rho_s)(\Delta W_i)^2) \\ &+\; C_1 R_p\left\{ E_{p_1}(\rho_s - \rho_{t_i})E_{p_2}(\rho'_{t_i}(\Delta W_i)^2)\right\} \end{aligned}$$

De (1.8) et du lemme 2.2, on a :

$$N_{p_1}(\rho'_s - \rho'_{t_i}) \;\leq\; K(s - t_i)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$E_{p_1}(\rho_s - \rho_{t_i}) \;\leq\; K\,|\sigma|\,(s - t_i)^{\frac{1}{2}}.$$

Reste alors à voir que l'on a :

$$\begin{aligned} N_{p_2}(\phi(\rho_s)(\Delta W_i)^2) \;&\leq\; N_{p_2}(\phi(\rho_s) - \phi(\rho_{t_i}))(\Delta W_i)^2) + N_{p_2}(\phi(\rho_{t_i})(\Delta W_i)^2) \\ &\leq\; C_1\,N_{p_2}((\rho_s - \rho_{t_i})(\Delta W_i)^2) + N_{p_2}(\phi(\rho_{t_i})(\Delta W_i)^2). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}=\frac{1}{p_2}$) et la formule (1.8), on a :

$$\begin{aligned} E_{p_2}((\rho_s-\rho_{t_i})(\Delta W_i)^2) &\leq E_{p_3}(\rho_s-\rho_{t_i})E_{p_4}(\Delta W_i)^2 \\ &\leq K\,|\sigma|\,(s-t_i)^{\frac{1}{2}}\delta_i\,, \end{aligned}$$

par suite

$$N_{p_2}((\rho_s-\rho_{t_i})(\Delta W_i)^2) \leq KR_{p_2}(\sigma)(s-t_i)^{\frac{1}{2}}\delta_i\,,$$

et puisque ρ_{t_i} et ρ'_{t_i} sont $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables donc

$$N_{p_2}(\phi(\rho_{t_i})(\Delta W_i)^2) = N_{p_2}(\phi(\rho_{t_i}))E_{p_2}(\Delta W_i)^2) \leq K_1\delta_i$$

et

$$E_{p_2}(\rho'_{t_i}(\Delta W_i)^2) = E_{p_2}(\rho'_{t_i})E_{p_2}(\Delta W_i)^2) \leq K_2\delta_i\,,$$

grâce à (1.8) et (2.4). En rapportant toutes ces estimations dans (2.6) et en majorant $(t_{i+1}-s)$ par δ_i, on trouve que $N_p(L_i)\leq K'\,\delta_i^{\frac{3}{2}}$. Par suite

$$N_p(\rho'_t-1-z_t-\tfrac{1}{2}\sum_{t_i<t}\phi(\rho_{t_i})\rho'_{t_i}(\Delta W_i)^2) \leq \sum_{t_i<t}N_p(L_i) \leq K\,t\,(\delta)^{\frac{1}{2}}\,,$$

d'où le résultat. ■

Lemme 2.4. *Il existe une constante réelle $C>0$ telle que l'on ait pour tout $t\in\pi$:*

$$N_p\left[\sum_{t_i<t}\phi(\rho_{t_i})\rho'_{t_i}(\Delta W_i)^2-\int_0^t\phi(\widetilde{\rho}_s)\widetilde{\rho}'_s ds\right] \leq C\,(t\,\delta)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Preuve : Posons :

$$H_t = 2\int_0^t\phi(\widetilde{\rho}_s)\widetilde{\rho}'_s(W_s-\widetilde{W}_s)dW_s\,. \qquad (2.7)$$

Pour $t\in\pi$, on vérifie que :

$$H_t = \sum_{t_i<t}\phi(\rho_{t_i})\rho'_{t_i}(\Delta W_i)^2-\int_0^t\phi(\widetilde{\rho}_s)\widetilde{\rho}'_s ds\,,$$

en effet, on a que :

$$H_t = 2\sum_{t_i<t}\phi(\rho_{t_i})\rho'_{t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(W_s-\widetilde{W}_{t_i})dW_s\,,$$

et

$$2\int_{t_i}^{t_{i+1}} (W_s - \widetilde{W}_{t_i})dW_s \;=\; (\Delta W_i)^2 - \delta_i\,.$$

En appliquant l'inégalité de Burkholder sur (2.7) et en tenant compte du fait que les deux variables aléatoires $\phi(\widetilde{\rho}_s)\widetilde{\rho}'_s$ et $W_s - \widetilde{W}_s$ sont indépendantes, il existe une constante C_p telle que :

$$E_p(H_t^2) \;\leq\; C_p \int_0^t (s - \widetilde{s}) E_p((\phi(\widetilde{\rho}_s)\widetilde{\rho}'_s)^2)ds\,,$$

ce qui entraîne que :

$$N_p(H_t^2) \;\leq\; C_p \int_0^t (s - \widetilde{s}) N_p((\phi(\widetilde{\rho}_s)\widetilde{\rho}'_s)^2)ds\,,$$

d'après (2.5), on déduit le résultat. ■

Proposition 2.5. *Il existe une constante réelle $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $t \in [0,1]$:*

$$N_p\left[\widetilde{\rho}'_t - 1 - z_t - \tfrac{1}{2}\int_0^t \phi(\widetilde{\rho}_s)\widetilde{\rho}'_s ds\right] \;\leq\; C\,\inf(\delta^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}})\,. \qquad (2.8)$$

Preuve : Pour $t \in \pi$, l'inégalité (2.8) est vraie d'après les deux lemmes 2.3 et 2.4. Si $t \in [t_i, t_{i+1}[$, on a :

$$\begin{aligned} N_p\left\{\widetilde{\rho}'_t - 1 - z_t - \tfrac{1}{2}\int_0^t \phi(\widetilde{\rho}_s)\widetilde{\rho}'_s ds\right\} \;&\leq\; N_p\left\{\rho'_{t_i} - 1 - z_{t_i} - \tfrac{1}{2}\int_0^{t_i} \phi(\widetilde{\rho}_s)\widetilde{\rho}'_s ds\right\} \\ &+\; N_p\left\{(z_t - z_{t_i}) + \tfrac{1}{2}\int_{t_i}^t \phi(\widetilde{\rho}_s)\widetilde{\rho}'_s ds\right\} \\ &\leq\; K_1(t\delta)^{\frac{1}{2}} + K_2(t - t_i)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq\; C\,\inf(\delta^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}})\,, \end{aligned}$$

ce qu'il faut démontrer. ■

Pour tout processus y, on note $\widehat{y}$ sa projection adaptée et elle est donnée par $\widehat{y}_t = \mathbb{E}(y_t\,|\mathcal{F}_t)$.

Proposition 2.6. *Il existe une constante réelle $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $t \in [0,1]$:*

$$N_p\left[\rho'_t - 1 - \int_0^t \sigma'(\widehat{\rho}_s)\widehat{\rho}'_s dW_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t \phi(\widehat{\rho}_s)\widehat{\rho}'_s ds\right] \;\leq\; C\,\delta^{\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

De plus on a $N_p(\rho'_t - \rho'_s) \leq C\ |t-s|^{\frac{1}{2}}$, donc la suite de processus ρ' converge dans $L^p(\Omega \times \mathbb{R}, \mathcal{J}_{\alpha,p})$ pour $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{2}$.

Preuve : Il suffit de remarquer que :

$$N_p(\widetilde{\rho}'_t - \widetilde{\rho}'_t) \;\leq\; N_p(\rho'_t - \widetilde{\rho}'_t) \;\leq\; C\,(t - \widetilde{t})^{\frac{1}{2}},$$

et d'après la proposition 2.5, on a (2.9). Le reste de la proposition 2.6 est une conséquence de la proposition 1.3. ■

Démonstration du théorème 1.1 :

(i) On montre tout d'abord que pour toute fonction réelle $g_t(x)$ définie sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ telle que $g_0(.) = 0$ et $R_q(N_{\beta,q}(g) + N_{\beta,q}(g')) < \infty$ avec $0 < \beta \leq 1, q \geq 1$, alors :

$$R_\infty(N_{\beta,q}(g)) \;\leq\; R_q(N_{\beta,q}(g) + N_{\beta,q}(g')). \tag{2.10}$$

En effet, on sait par définition que $N_{\beta,q}(g.(x)) = N_{o,q}(D^\beta g.(x))$, et on remarque que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} N_{o,q}(D^\beta g.(x)) \;\leq\; N_{o,q}(\sup_{x\in\mathbb{R}} |D^\beta g.(x)|),$$

donc par application de l'inégalité de Sobolev, on trouve :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |D^\beta g.(x)| \;\leq\; R_q(|D^\beta g.| + |(D^\beta g.)'|).$$

Or d'après (1.5), on déduit que $(D^\beta g)' = D^\beta g'$. L'inégalité (2.10) découle alors de l'application de la formule de Fubini.

(ii) On montre aussi que ρ converge vers θ dans $L^p(\Omega\times\mathbb{R}, \mathcal{J}_{\alpha,p})$ pour $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{2}$ et ceci est une conséquence immédiate de la proposition 1.3 et du théorème 10 dans ([1]). Pour terminer la démonstration, on rappelle que $X = \theta(G)$ et $X^\pi = \rho(G)$, donc d'après (2.10), on déduit que :

$$\begin{aligned} N_{\alpha,p}(X^\pi_. - X_.) &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} N_{\alpha,p}(\rho_.(x) - \theta_.(x)) \\ &\leq R_p(N_{\alpha,p}(\rho - \theta)) + R_p(N_{\alpha,p}(\rho' - \theta')). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$E_p(N_{\alpha,p}(X^\pi - X)) \;\leq\; N_p(N_{\alpha,p}(\rho-\theta)) + N_p(N_{\alpha,p}(\rho'-\theta'))\,,$$

en plus de (ii) et la proposition 2.6, on conclut le résultat. ■

Remarque 2.7. *Le cas multidimensionnel peut être traité sans difficulté de la même façon que le cas unidimensionnel.*

Remerciements : Nous tenons à remercier le referee pour ses nombreuses remarques et suggestions.

Bibliographie

[1] *D. Feyel and A. de La Pradelle* : "On the approximate solutions of the Stratonovich equation". *Electronic journal of Probability*, vol. 3, no. 7, 1-14 (1998).

[2] *D. Feyel and A. de La Pradelle* : "Fractional integrals and Brownian Processes". *Prépublication 39 de l'université d'Evry Val d'Essone*, (1996).

[3] *D. Feyel and A. de La Pradelle* : "On Fractional Brownian processes". To appear in *Potential Analysis*, (1999).

[4] *A. Millet, D. Nualart and M. Sanz-Solé* : "Large deviations for a class of anticipating stochastic differential equations". *Annals of Probability,* 20, 1902-1931 (1992).

[5] *D. Ocone and E. Pardoux* : "A Generalized Itô-Ventzell formula. Applications to a class of anticipating stochastic differential equations". *Annals Inst. H. Poincaré*, 25, 39-71 (1989).

[6] *S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev* : "Fractional integrals and Derivatives (Theory and Applications)". *Gordon and Breach Science Publishers*, (1987).