Annales mathématiques Blaise Pascal

M. Eddahbi

M. Erraoui

EDPS paraboliques à coefficients non-lipschitziens avec réflexion

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 5, n° 2 (1998), p. 7-19

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1998__5_2_7_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 5, N° 2, 1998, pp.7-19

EDPS Paraboliques à coefficients non–lipschitziens avec réflexion

M. Eddahbi
Université Cadi Ayyad, Département de Mathématiques
et d'Informatique, Faculté des Sciences et Techniques
B.P. 618, Guéliz, Marrakech, Maroc.
E–mail fstg@cybernet.net.ma

M. Erraoui
Université Cadi Ayyad, Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences Semlalia B.P. S 15 Marrakech, Maroc.
E–mail fssm.math@cybernet.net.ma

Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles stochastiques paraboliques (EDPS) avec réflexion dirigées par un bruit blanc spatio–temporel ayant des coefficients non–lipschitziens. Pour montrer l'existence d'une solution, nous avons établi un théorème de comparaison pour les EDPS avec des coefficients non–lipschitziens et un théorème d'existence pour les EDPS lorsque les coefficients dépendent du passé de la solution.

Classification AMS (1991), 60H15, 35R30.
Mots clés. Equations aux dérivées partielles stochastiques paraboliques, bruit blanc spatio–temporel.

1. Introduction

Dans [3], nous avons étudié l'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles stochastiques paraboliques dirigées par un bruit blanc spatio–temporel avec des coefficients non lipschitziens. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude d'existence de solutions réfléchies sous les mêmes hypothèses. Le problème de réflexion a été étudié par [7] lorsque le coefficient de diffusion est constant et par [2] dans le cas général. L'outil souvent utilisé est le résultat de comparaison pour les solutions d'EDPS que nous utiliserons par la suite. La comparaison assure la monotonie de la suite (u^ϵ) des solutions pénalisées et la solution est obtenue comme limite de la suite (u^ϵ). La Section 2 est consacrée aux préliminaires et l'hypothèse **H** avec laquelle nous allons travailler. Sous cette hypothèse, nous prouvons, dans la Section 3, un théorème de comparaison. La Section 4 est consacrée à prouver un résultat d'existence et d'unicité pour les EDPS dont les coefficients dépendent du passé de la solution. Dans la Section 5, on construit une solution (u, η) par pénalisation.

2. Préliminaires et hypothèses

Soit $W(t,x)$, $t \in [0,1]$, $x \in [0,1]$, le drap brownien défini sur l'espace canonique $\Omega = \mathcal{C}_0([0,1] \times [0,1])$ (l'espace des fonctions continues sur $[0,1] \times [0,1]$, nulles sur les axes), muni de la tribu borélienne $\mathcal{F}$ et de la mesure de Wiener $\mathbb{P}$. On note $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s,x), s \leq t,\ x \in [0,1])$.
Soit u_0 une fonction positive sur $[0,1]$ qui s'annule en 0 et 1.
Soit f et σ deux fonctions à valeurs réelles définies sur $[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse **H** suivante :

$$\begin{aligned}
&(i) && |f(t,x,r) - f(t,x,z)|^p &&\leq \mathcal{K}(|r-z|^p) \\
&(ii) && |\sigma(t,x,r) - \sigma(t,x,z)|^p &&\leq \mathcal{K}(|r-z|^p) \\
&(iii) && |f(t,x,r)| + |\sigma(t,x,r)| &&\leq C(1+|r|)
\end{aligned}$$

pour un $p > 20$ et $\mathcal{K}$ est une fonction continue, concave croissante telle que

$$\mathcal{K}(0) = 0,\ \mathcal{K}(u) > 0 \text{ si } u > 0 \text{ et } \int_{0+} \frac{du}{\mathcal{K}(u)} = +\infty.$$

Maintenant nous donnons quelques exemples de fonctions $\mathcal{K}$ qui satisfont **H**. Soit $\delta \in]0,1[$ assez petit et $L > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(u) &= Lu \text{ si } u \geq 0, \\
\mathcal{K}_2(u) &= \begin{cases} u \log\left(\frac{1}{u}\right) & \text{si } 0 \leq u \leq \delta \\ \mathcal{K}_2(\delta) + \mathcal{K}_2'(\delta-)(u-\delta) & \text{si } u > \delta, \end{cases} \\
\mathcal{K}_3(u) &= \begin{cases} u \log\left(\frac{1}{u}\right) \log\log\left(\frac{1}{u}\right) & \text{si } 0 \leq u \leq \delta \\ \mathcal{K}_3(\delta) + \mathcal{K}_3'(\delta-)(u-\delta) & \text{si } u > \delta\ , \end{cases}
\end{aligned}$$

Ces fonctions sont décroissantes concaves vérifiant

$$\int_{0+} \frac{du}{\mathcal{K}_i(u)} = +\infty \text{ pour } i = 1,\ 2,\ 3.$$

Nous dirons que le couple (u, η) est solution de l'équation réfléchie s'il vérifie les propriétés suivantes :
(i) u est un processus continu sur $[0,1] \times [0,1]$; pour tout $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$, $u(t,x)$ est $\mathcal{F}_t$–mesurable et $u(t,x) \geq 0$ p.s..
(ii) η est une mesure aléatoire sur $[0,1] \times [0,1]$ telle que

$$\begin{aligned}
&- \ \eta(\{t\} \times (0,1)) = 0 \\
&- \int_0^t \int_0^1 x(1-x)\eta(ds,dx) < \infty \quad p.s. \\
&- \ \eta \text{ est adaptée.}
\end{aligned}$$

(iii) (u,η) est solution de l'EDPS

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(u)(t,x) + \sigma(u)(t,x)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} + \eta(t,x) \\ u(0,x) &= u_0(x), \ \ u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases}$$

au sens suivant :
$\forall\ t \in [0,1]$, $\varphi \in C^2([0,1])$ avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$,

$$\begin{aligned} (u(t,\cdot),\varphi) &= (u_0,\varphi) + \int_0^t \left(u(s,\cdot), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) ds + \int_0^t (f(u)(s,\cdot),\varphi)\, ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \sigma(u)(s,x)\varphi(x) W(ds,dx) + \int_0^t \int_0^1 \varphi(x)\eta(ds,dx), \end{aligned}$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L^2([0,1])$ et $f(u)(t,x) = f(t,x,u(t,x))$ et $\sigma(u)(t,x) = \sigma(t,x,u(t,x))$.
(iv) $\int_0^1 \int_0^1 u d\eta = 0$.

Considérons l'équation aux dérivées partielles stochastique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(u)(t,x) + \sigma(u)(t,x)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \\ u(0,x) &= u_0(x), \ \ u(t,0) = u(t,1) = 0, \ \forall\, t > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $u_0 \in C_0([0,1])$.
On dit que u est une solution de (2.1) si elle vérifie l'équation intégrale

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^1 G_t(x,y)\, u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\, f(u)(s,y)\, dyds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\, \sigma(u)(s,y)\, W(dy,ds) \end{aligned}$$

où $G_t(x,y)$ est la solution de l'équation de la chaleur sur $[0,1] \times [0,1]$ avec les conditions de Dirichlet.
Sous l'hypothèse **H**, l'équation (2.1) admet une unique solution continue (voir [3]).

3. Théorème de comparaison pour les EDPS

Le but de cette section est de prouver un théorème de comparaison pour les solutions d'EDPS sous l'hypothèse **H**.

Théorème 3.1. *Soit (f,σ) et (g,σ) des coefficients qui vérifient* **H** *avec $f \leq g$. On note par u (resp. v) la solution de (2.1) avec (f,σ) pour coefficients (resp. (g,σ)) et u_0 pour donnée initiale. Alors p.s. pour tout $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$, $u(t,x) \leq v(t,x)$.*

Preuve. Soit $(e_k)_{k\geq 0}$ un système orthonormal de $H = L^2([0,1])$ tel que :
$\|e_k\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |e_k(x)| < C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $W_t^k = \int_0^t \int_0^1 e_k(x) W(ds,dx)$ une famille de mouvements browniens indépendants.
Soit $B_t^n = \sum_{k=1}^n W_t^k e_k$ un processus de Wiener à valeurs dans H.
On considère l'équation suivante

$$\begin{cases} du_t^n &= \dfrac{\partial^2 u_t^n}{\partial x^2} dt + f(u_t^n)\, dt + \sum(u_t^n)\, dB_t^n \\ u_0^n(\cdot) &= u_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $\sum(u)\, h(x) = \sigma(u)(x) h(x)$ pour tout $h \in H$.
D'après Gatarek et Gołdys [4] l'équation (3.1) admet une solution faible. Sous l'hypothèse **H**, il est facile de voir que (3.1) admet la propriété d'unicité trajectorielle. Il en résulte d'après le théorème de Yamada et Watanabe [5] que l'équation (3.1) admet une unique solution forte.

Puisque f et g sont continues à croissance au plus linéaire on montre par un argument d'approximation standard que la solution u^n appartient à $L^2([0,1]\times\Omega; V)$, où $V := \{u \in L^2([0,1]),\ \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2([0,1])$ et $u(0) = u(1) = 0\}$.

On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi_p &: H \longrightarrow \mathbb{R} \\ & h \longrightarrow \Phi_p(h) = \int_0^1 \varphi_p(h(x))\, dx = \int_0^1 (h^+(x))^p\, dx. \end{aligned}$$

φ_p est une fonction de classe C^2 pour $p > 2$. On note $w^n = u^n - v^n$ où u^n et v^n sont les solutions de (3.1) avec les coefficients (f,σ) et (g,σ). Par la formule de Itô (voir Pardoux [8] Théorème 3.2 p. 147), il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Phi_p(w_t^n) &\leq \int_0^t \int_0^1 \mathbb{E}\varphi_p'(w_s^n(y)) \left(f(u_s^n(y)) - g(v_s^n(y))\right) dyds \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_0^t \int_0^1 \mathbb{E}\varphi_p''(w_s^n(y)) \left(\sigma(u_s^n(y)) - \sigma(v_s^n(y))\right)^2 e_k^2(y)\, dyds, \\ \mathbb{E}\Phi_p(w_t^n) &\leq \int_0^t \int_0^1 \mathbb{E}\varphi_p'(w_s^n(y)) \left(f(u_s^n(y)) - f(v_s^n(y))\right) dyds \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_0^t \int_0^1 \mathbb{E}\varphi_p''(w_s^n(y)) \left(\sigma(u_s^n(y)) - \sigma(v_s^n(y))\right)^2 e_k^2(y)\, dyds, \\ \mathbb{E}\Phi_p(w_t^n) &\leq \int_0^t \int_0^1 \mathbb{E}\varphi_p'(w_s^n(y)) \left(\mathcal{K}\left(\left(w_s^n(y)^+\right)^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} dyds \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_0^t \int_0^1 \mathbb{E}\varphi_p''(w_s^n(y)) \left(\mathcal{K}\left(\left(w_s^n(y)^+\right)^p\right)\right)^{\frac{2}{p}} e_k^2(y)\, dyds. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de φ_p', φ_p'' et e_k, l'inégalité $|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et l'inégalité de Jensen, nous obtenons

$$\mathbb{E}\Phi_p(w_t^n) \leq C_{p,n} \int_0^t \left(\bar{\mathcal{K}}\left(\mathbb{E}\Phi_p(w_s^n)\right)\right) ds,$$

où $\bar{\mathcal{K}}(x) = x + \mathcal{K}(x)$. Comme $\bar{\mathcal{K}}$ satisfait les mêmes hypothèses que $\mathcal{K}$, il en résulte d'après le lemme de Bihari [1] que $\mathbb{E}\Phi_p(w_t^n) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Par continuité de w^n,

$$p.s\ \forall\ (t,x) \in [0,1] \times [0,1],\ u^n(t,x) \leq v^n(t,x).$$

La solution u^n satisfait l'équation intégrale

$$\begin{aligned} u^n(t,x) &= \int_0^1 G_t(x,y)\, u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\, g(u^n)(s,y)\, dyds \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_0^t \left(\int_0^1 \sigma(u^n)(s,y)\, G_{t-s}(x,y)\, e_k(y) dy \right) dW_s^k. \end{aligned}$$

Nous avons besoin du lemme suivant qui assure la convergence de u^n vers u.

Lemme 3.2. *Sous l'hypothèse* **H** *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{(x,t)\in[0,1]^2} \mathbb{E}\left|u^n(t,x) - u(t,x)\right|^p = 0.$$

Preuve. $u(t,x) - u^n(t,x) = A_n + B_n + D_n$
avec

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \left[g(u)(s,y) - g(u^n)(s,y)\right] dyds, \\ B_n &= \sum_{k=1}^n \int_0^t \left(\int_0^1 \left[\sigma(u)(s,y) - \sigma(u^n)(s,y)\right] G_{t-s}(x,y)\, e_k(y) dy \right) dW_s^k, \\ D_n &= \int_0^t \int_0^1 \left(\sigma(u)(s,y)\, G_{t-s}(x,y) - \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \sigma(u)(s,y)\, G_{t-s}(x,y)\, e_k(z) dz \right) e_k(y) \right) W(dy,ds). \end{aligned}$$

Soit $F^n(t) = \sup_{x\in[0,1]} \mathbb{E}\left|u^n(t,x) - u(t,x)\right|^p$. Nous savons d'après [2] que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ telle que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \sup_{0\leq x\leq 1} \mathbb{E}\left|D_n(t,x)\right|^2 < \varepsilon \text{ pour } n > N.$$

Par conséquent en utilisant les mêmes estimations que [3], nous aurons

$$F^n(t) \leq C_p \int_0^t \mathcal{K}(F^n(s)) ds + \varepsilon C_p.$$

A l'aide de l'inégalité de Bihari (lemme 5.5 dans l'appendice), on obtient

$$F^n(t) \leq \mathcal{H}^{-1}\left[\mathcal{H}(\varepsilon C_p) + t\right] \leq \mathcal{H}^{-1}\left[\mathcal{H}(\varepsilon C_p) + 1\right],$$

où

$$\mathcal{H}(r) = \int_1^r \frac{du}{\mathcal{K}(u)}.$$

Afin de compléter la preuve du lemme il suffit de voir que

$$\mathcal{H}^{-1}(r) \longrightarrow 0 \text{ si } r \longrightarrow \infty.$$

Pour finir la preuve du théorème, il suffit de voir que pour chaque (t,x) appartenant à $[0,1]\times[0,1]$, il existe une suite n_k telle que

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \lim_{k\longrightarrow\infty} u^{n_k}(t,x) \\ v(t,x) &= \lim_{k\longrightarrow\infty} v^{n_k}(t,x). \end{aligned}$$

Or $u^{n_k}(t,x) \leq v^{n_k}(t,x)$, il en résulte de même pour u et v. Le résultat est alors obtenu par continuité.

4. Existence et unicité pour les EDPS avec coefficients qui dépendent du passé de la solution

Le but de cette section est de montrer un résultat d'existence et d'unicité pour une EDPS avec des coefficients non-lipschitziens qui dépendent du passé de la solution. Ce type d'équations a été étudié par [2] et [6] dans le cas où les coefficients sont lipschitziens.

Pour tout $u \in \mathcal{C}([0,1]\times[0,1])$, $t\geq 0$, u^t désigne la restriction de u à $[0,t]\times[0,1]$. Soit f et σ deux applications de $[0,1]\times[0,1]\times\mathcal{C}([0,1]\times[0,1])$ à valeurs dans $I\!R$ qui vérifient les conditions **H'**

Pour tout $u,\, v\in\mathcal{C}([0,1]\times[0,1])$, $(t,x)\in[0,1]\times[0,1]$, tel que $u^t=v^t$

(i) $f(t,x,u) = f(t,x,v)$ et $\sigma(t,x,u) = \sigma(t,x,v)$.

Pour tout $u,\, v\in\mathcal{C}([0,1]\times[0,1])$, $(t,x)\in[0,1]\times[0,1]$

(ii) $$|f(t,x,u)-f(t,x,v)|^p+|\sigma(t,x,u)-\sigma(t,x,v)|^p \leq \mathcal{K}\left(\sup_{s\leq t,\,0\leq y\leq 1}|u(s,y)-v(s,y)|^p\right)$$

(iii) $$|f(t,x,u)|^p+|\sigma(t,x,u)|^p \leq C\left(1+\sup_{s\leq t,\,0\leq y\leq 1}|u(s,y)|^p\right)$$

pour un $p>20$.

On considère l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x,u)+\sigma(t,x,u)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t\partial x} \\[2ex] u(0,x)=u_0(x),\ \ u(t,0)=u(t,1)=0\ \forall\, t>0, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

qui peut être interpréter

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^1 G_t(x,y)\,u_0(y)\,dy+\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,f(s,y,u)\,dyds \\ &\quad + \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,\sigma(s,y,u)\,W(ds,dy). \end{aligned}$$

Théorème 4.1. *Sous l'hypothèse* **H'** *et pour* $u_0 \in C_0([0,1])$ *l'équation (4.1) admet une unique solution* u, $\mathcal{F}_t$*-adaptée.*

Preuve. Par une simple application du lemme de Kolmogorov et de la condition **H' (iii)** on montre de la même façon que [2] la non explosion de la solution u.
Unicité. Soit $\{u(t,x),\ (t,x) \in [0,1] \times [0,1]\}$ et $\{v(t,x),\ (t,x) \in [0,1] \times [0,1]\}$ deux solutions avec la même donnée initiale u_0. On pose $\bar{u} = u - v$.

$$\begin{aligned} \bar{u}(t,x) &= \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,(f(u)(s,y) - f(v)(s,y))\,dyds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,(\sigma(u)(s,y) - \sigma(v)(s,y))\,W(dy,ds). \end{aligned}$$

D'après la condition **H' (ii)** et l'inégalité de Jensen, il existe C_p tel que

$$\mathbb{E}\,|\bar{u}(t,x)|^p \ \leq\ C_p \int_0^t \mathcal{K}\left(\mathbb{E} \sup_{y,r\leq s} |\bar{u}(r,y)|^p\right) ds.$$

On peut montrer comme dans [2] que

$$\mathbb{E}\,|\bar{u}(t,x) - \bar{u}(s,y)|^p \ \leq\ C_p\,|(t,x) - (s,y)|^{\frac{p}{4}-3} \left[\int_0^{t\vee s} \mathcal{K}\left(\mathbb{E} \sup_{z,\alpha\leq r} \left|\bar{u}(\alpha,z)\right|^p\right) dr\right].$$

D'après le lemme de Kolmogorov et le lemme de Garsia–Rodemich–Rumsey, il existe une constante C_p telle que

$$\mathbb{E} \sup_{x,s\leq t} |\bar{u}(s,x)|^p \ \leq\ C_p \int_0^t \mathcal{K}\left(\mathbb{E} \sup_{z,r\leq s} |\bar{u}(r,z)|^p\right) ds,$$

d'où $\bar{u}= 0$ d'après l'inégalité de Bihari.

Existence. Considérons l'application $\mathcal{S}$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(u)(t,x) &= \int_0^1 G_t(x,y)\,u_0(y)\,dy + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,f(s,y,u)\,dyds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,\sigma(s,y,u)\,W(ds,dy). \end{aligned}$$

On montre de la même façon que précédemment qu'il existe une constante C_p telle que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{x,s\leq t} |\mathcal{S}(u)(s,x) - \mathcal{S}(v)(s,x)|^p\right) \ \leq\ C_p \int_0^t \mathcal{K}\left[\mathbb{E}\left(\sup_{x,r\leq s} |u(r,x) - v(r,x)|^p\right)\right] ds.$$

On construit la solution par approximations successives.
On définit la suite u^n par

$$u^0(x,t) \ =\ u_0(x) \quad \text{et} \quad u^{n+1}(t,x) \ =\ \mathcal{S}(u^n)(t,x).$$

On montre de la même façon que pour les EDPS voir [3], la convergence de la suite (u^n). La solution u est obtenu comme limite de la suite u^n.

5. Existence de la solution réfléchie

On considère le problème pénalisé

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} + f(u^\varepsilon)(t,x) + \sigma(u^\varepsilon)(t,x)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} + \dfrac{1}{\varepsilon}(u^\varepsilon(t,x))^- \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0(x), \ u^\varepsilon(t,0) = u^\varepsilon(t,1) = 0 \ \forall\, t > 0. \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on a l'existence d'une solution u^ε qui satisfait

$$\mathbb{E}\sup_{x,t}|u^\varepsilon(t,x)|^p < +\infty, \quad \forall\, p \geq 1.$$

D'après le théorème de comparaison (Théorème 3.1), si $\varepsilon \leq \varepsilon'$ alors $u^{\varepsilon'} \leq u^\varepsilon$.

Théorème 5.1. *La suite u^ε converge p.s. vers un processus u lorsque ε tend vers 0. Si de plus la fonction $r \to f(t,x,r)$ est décroissante, alors u est continu.*

Preuve. La suite u^ε est une suite croissante quand $\varepsilon \to 0$, on note

$$u = \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon = \sup_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon.$$

1^{ere} étape: Nous allons encadrer la suite u^ε par deux suites v^ε et w^ε définies ci–après. Soit v^ε l'unique solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^\varepsilon(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v^\varepsilon(t,x)}{\partial x^2} + f(v^\varepsilon)(t,x) + \sigma(u^\varepsilon)(t,x)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \\ v^\varepsilon(0,x) = u_0(x), \ v^\varepsilon(t,0) = v^\varepsilon(t,1) = 0 \ \forall\, t > 0. \end{cases}$$

Soit $z_t^\varepsilon(x) = v^\varepsilon(t,x) - u^\varepsilon(t,x)$, l'unique solution dans $L^2([0,1]\times[0,1])$ de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_t^\varepsilon}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 z_t^\varepsilon}{\partial x^2} + f(v^\varepsilon)(t,x) - f(u^\varepsilon)(t,x) - \dfrac{1}{\varepsilon}(u^\varepsilon(t,x))^- \\ z_0^\varepsilon(x) = 0, \ z_t^\varepsilon(0) = z_t^\varepsilon(1) = 0 \ \forall\, t > 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Lemme 5.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, $z^\varepsilon \in L^2([0,1], V)$.*

Preuve. En multipliant l'équation (5.1) par z^ε, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (z_t^\varepsilon(x))^2 dx + \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial z_s^\varepsilon(x)}{\partial x}\right)^2 dxds =$$

$$\int_0^t\int_0^1 \left(f\left(v^\varepsilon\right)(s,x)-f\left(u^\varepsilon\right)(s,x)\right)z_s^\varepsilon(x)\,dxds-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^1\left(u^\varepsilon(s,x)\right)^- z_s^\varepsilon(x)\,dxds.$$

En utilisant l'inégalité $|xy|\leq \delta^2x^2+\frac{1}{\delta^2}y^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1\left(z_t^\varepsilon(x)\right)^2dx+\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial z_s^\varepsilon(x)}{\partial x}\right)^2dxds &\leq C(\varepsilon)+2\delta^2\int_0^t\int_0^1\left(z_s^\varepsilon(x)\right)^2dxds\\ &+\frac{1}{\delta^2}\int_0^t\int_0^1\left[\mathcal{K}\left(|z_s^\varepsilon(x)|^p\right)\right]^{\frac{2}{p}}dxds.\end{aligned}$$

où $C(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{\delta^2}\sup_{x,t}\left(u^\varepsilon(t,x)\right)^2<+\infty$. Nous utilisons le fait qu'il existe deux constantes positives a et b telle que $\mathcal{K}(u)\leq a+bu$ et que la fonction $x\longrightarrow x^{\frac{2}{p}}$ est concave pour $p\geq 2$, par suite elle est sous additive, pour avoir

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left(z_t^\varepsilon(x)\right)^2dx+\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial z_s^\varepsilon(x)}{\partial x}\right)^2dxds \leq C(\varepsilon)+2\delta^2a^{\frac{2}{p}}+2\delta^2b^{\frac{2}{p}}\int_0^t\int_0^1\left(z_s^\varepsilon(x)\right)^2dxds.$$

L'application du lemme de Gronwall donne le résultat.
Multiplions l'équation (5.1) par $p\left(\left(z^\varepsilon\right)^+\right)^{p-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\left(z_t^\varepsilon(x)\right)^+\right)^pdx+\int_0^t\int_0^1 p(p-1)\left(\left(z_s^\varepsilon(x)\right)^+\right)^{p-2}\left(\frac{\partial z_s^\varepsilon(x)}{\partial x}\right)^2dxds &=\\ p\int_0^t\int_0^1\left(f\left(v^\varepsilon\right)(s,x)-f\left(u^\varepsilon\right)(s,x)\right)\left(\left(z_s^\varepsilon(x)\right)^+\right)^{p-1}dxds&\\ -\frac{p}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^1\left(u_s^\varepsilon(x)\right)^-\left(\left(z_s^\varepsilon(x)\right)^+\right)^{p-1}dxds.&\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $|xy|\leq\frac{1}{p}|x|^p+\frac{1}{q}|y|^q$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et l'hypothèse **H (ii)**, on tire

$$\int_0^1\left(\left(z_t^\varepsilon(x)\right)^+\right)^pdx \leq C_p\int_0^t\int_0^1\bar{\mathcal{K}}\left(\left(\left(z_s^\varepsilon(x)\right)^+\right)^p\right)dxds.$$

où C_p est une constante strictement positive. L'inégalité de Bihari entraîne que $(z_t^\varepsilon)^+=0$. Il en résulte par continuité que $v^\varepsilon(t,x)\leq u^\varepsilon(t,x)$ pour tout $(t,x)\in[0,1]\times[0,1]$.
D'après le théorème 4.1 l'équation

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x^2}+f\left(w^\varepsilon+\sup\limits_{s\leq t,x}\left(w^\varepsilon(t,x)\right)^-\right)+\sigma\left(u^\varepsilon\right)\dfrac{\partial^2W}{\partial t\partial x}\\ w^\varepsilon(0,x) = 0,\ w^\varepsilon(t,0)=w^\varepsilon(t,1)=0,\end{cases}$$

admet une unique solution w^ε.
On pose $\bar{w}^\varepsilon = w^\varepsilon+\sup_{s\leq t,x}\left(w^\varepsilon(t,x)\right)^- = w^\varepsilon+\Phi_t^\varepsilon\cdot w^\varepsilon\geq 0$, p.s. et Φ_t^ε est un processus croissant. $\bar{z}^\varepsilon=u^\varepsilon-w^\varepsilon$, est l'unique solution de l'équation

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\,\bar{z}^\varepsilon}{\partial t} = \dfrac{\partial^2\,\bar{z}^\varepsilon}{\partial x^2}+f\left(u^\varepsilon\right)-f\left(\bar{w}^\varepsilon\right)-\dfrac{d\Phi_t^\varepsilon}{dt}+\dfrac{1}{\varepsilon}\left(u^\varepsilon(t,x)\right)^-\\ \bar{z}^\varepsilon(0,x) = 0,\ \bar{z}^\varepsilon(t,0)=\bar{z}^\varepsilon(t,1)=-\Phi_t^\varepsilon.\end{cases}\tag{5.2}$$

En multipliant l'équation (5.2) par $p\left((z_s^\varepsilon(x))^+\right)^{p-1}$, on conclut de la même façon que précédemment que $u^\varepsilon(t,x) \leq w^\varepsilon(t,x)$ pour tout $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$. Il en résulte alors

$$|u^\varepsilon(t,x)| \leq |v^\varepsilon(t,x)| + \sup_{s\leq t, y\in[0,1]} |w^\varepsilon(s,y)|.$$

Puisque f et g sont à croissance au plus linéaire, il en résulte d'après [2] que pour tout $p > 20$ on a

$$\sup_\varepsilon \mathbb{E}\left[\sup_{x,t} |v^\varepsilon(t,x)|^p\right] < \infty$$

$$\sup_\varepsilon \mathbb{E}\left[\sup_{x,t} |w^\varepsilon(t,x)|^p\right] < \infty,$$

ce qui implique

$$\sup_\varepsilon \mathbb{E}\left[\sup_{x,t} |u^\varepsilon(t,x)|^p\right] < \infty. \tag{5.3}$$

Par conséquent $u = \sup_\varepsilon u^\varepsilon$ est borné sur $[0,1] \times [0,1]$ p.s.

$2^{ème}$ *étape :* Continuité de u.

Dans cette partie on supposera de plus que $r \to f(t,x,r)$ est décroissante. Soit $\bar{v}^\varepsilon$ la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{v}^\varepsilon}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 \bar{v}^\varepsilon}{\partial x^2} + \sigma(u^\varepsilon)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \\ \bar{v}^\varepsilon(0,x) &= 0,\ \bar{v}^\varepsilon(t,0) = \bar{v}^\varepsilon(t,1) = 0, \end{cases}$$

et $\bar{v}$ la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \sigma(u)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \\ \bar{v}(0,x) &= 0,\ \bar{v}(t,0) = \bar{v}(t,1) = 0. \end{cases}$$

En utilisant le fait que σ est à croissance au plus linéaire et l'estimation (5.3) il s'ensuit d'après le critère de Kolmogorov que les solutions $\bar{v}^\varepsilon$ et $\bar{v}$ sont continues.

En suivant la même démarche que dans [2] (Appendice, Lemme 6.2) on montre à l'aide de l'inégalité de Bihari et une application du lemme de Kolmogorov que $\|\bar{v} - \bar{v}^\varepsilon\|_\infty$ tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Soit $z^\varepsilon = u^\varepsilon - \bar{v}^\varepsilon$ la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z^\varepsilon}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 z^\varepsilon}{\partial x^2} + f(z^\varepsilon + \bar{v}^\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon}(z^\varepsilon + \bar{v}^\varepsilon)^- \\ z^\varepsilon(0,x) &= 0,\ z^\varepsilon(t,0) = z^\varepsilon(t,1) = 0, \end{cases}$$

et $\bar{z}^\varepsilon$, la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{z}^\varepsilon}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 \bar{z}^\varepsilon}{\partial x^2} + f(\bar{z}^\varepsilon + \bar{v}) + \dfrac{1}{\varepsilon}(\bar{z}^\varepsilon + \bar{v})^- \\ \bar{z}^\varepsilon(0,x) &= 0,\ \bar{z}^\varepsilon(t,0) = \bar{z}^\varepsilon(t,1) = 0. \end{cases}$$

On procède de la même façon que dans [2] et on utilise le fait que f est décroissante pour établir l'estimation suivante

$$\|\bar{z}^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}\|_{\infty} \leq \|\bar{v} - \bar{v}^{\varepsilon}\|_{\infty}. \tag{5.4}$$

Nualart et Pardoux ont montré dans [7] la convergence uniforme de la suite $\bar{z}^{\varepsilon}$ vers une fonction continue $\bar{z}$ sur $[0,1] \times [0,1]$ quand ε tend vers 0, lorsque le coefficient de dérive f est simplement continu et décroissant. En utilisant l'estimation (5.4) et la convergence de $\|\bar{v} - \bar{v}^{\varepsilon}\|_{\infty}$ vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ on voit que $u = \bar{z} + \bar{v}$ est une fonction continue. Ce qui termine la preuve du théorème.

Théorème 5.3. *Supposons que l'hypothèse* **H** *est satisfaite et que $r \to f(t,x,r)$ est décroissante, alors le problème de réflexion admet une solution (u, η).*

Preuve. Soit u^{ε} la solution du problème pénalisé et $u = \lim_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}$. Soit φ une fonction de classe C^{∞} à support compact dans $[0,1] \times [0,1]$

$$\begin{aligned}(u_t^{\varepsilon}, \varphi_t) - (u_0, \varphi_0) - \int_0^t \left(u_s^{\varepsilon}, \frac{\partial \varphi_s}{\partial s}\right) ds - \int_0^t \left(u_s^{\varepsilon}, \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2}\right) ds - \int_0^t (f(u_s^{\varepsilon}), \varphi_s)\, ds \\ = \int_0^t \int_0^1 \sigma(u_s^{\varepsilon}(x)) \varphi(s,x) W(dx, ds) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t ((u_s^{\varepsilon})^-, \varphi_s)\, ds \text{ p.s..}\end{aligned} \tag{5.5}$$

où $u_s^{\varepsilon}(x) = u^{\varepsilon}(s,x)$.

On note par η_{ε} la mesure aléatoire $\eta_{\varepsilon}(dx, dt) = \frac{1}{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t,x))^- dx dt$ sur $[0,1] \times [0,1]$. Il est facile de voir que tous les termes de gauche de (5.5) convergent p.s. quand ε tend vers 0.

La convergence p.s., et la croissance au plus linéaire de σ donnent

$$\int_0^t \int_0^1 \sigma(u_s^{\varepsilon}) \varphi(s,x) W(dx, ds) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p} \int_0^t \int_0^1 \sigma(u_s) \varphi(s,x) W(dx, ds).$$

On peut supposer que la convergence est p.s. quitte à prendre une sous suite. Ce qui entraîne la convergence au sens des distributions de η_{ε} vers la distribution η sur $[0,1] \times [0,1]$ p.s. η est une distribution positive donc elle induit une mesure sur $[0,1] \times [0,1]$.

Pour tout $\varphi \in C^{\infty}([0,1] \times [0,1])$ à support compact on a :

$$\begin{aligned}(u_t, \varphi_t) &= (u_0, \varphi_0) + \int_0^t \left(u_s, \frac{\partial \varphi_s}{\partial s}\right) ds + \int_0^t \left(u_s, \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2}\right) ds + \int_0^t (f(u_s), \varphi_s)\, ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \sigma(u_s(x)) \varphi(s,x) W(dx, ds) + \int_0^t \int_0^1 \varphi(s,x) \eta(ds, dx) \ \ p.s.\end{aligned}$$

Multiplions (5.5) par ε et faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\int_0^t \left(u_s^-, \varphi_s\right) ds = 0 \ \ p.s.$$

pour toute fonction $\varphi \in C^{\infty}$ à support compact dans $[0,1] \times [0,1]$. Ceci implique $u(t,x) \geq 0$ p.p. sur $[0,1] \times [0,1]$ p.s., par continuité, $u(t,x) \geq 0$ sur $[0,1] \times [0,1]$ p.s.

Pour $\varepsilon \leq \varepsilon'$, $u^{\varepsilon'} \leq u^{\varepsilon}$ *p.s*, il s'ensuit $\operatorname{supp} \eta_{\varepsilon} \subset \operatorname{supp} \eta_{\varepsilon'}$ et $\operatorname{supp} \eta \subset \operatorname{supp} \eta_{\varepsilon}$. On sait que $u^{\varepsilon} \leq 0$ sur $\operatorname{supp} \eta_{\varepsilon}$ il en résulte $\int_0^1 \int_0^1 u^{\varepsilon} d\eta \leq 0$, $\int_0^1 \int_0^1 u d\eta = 0$, se déduit de la même façon que [2], ainsi que toutes les autres propriétés.

Remarque 5.4. *La solution (u,η) est minimale dans le sens suivant : si $(v,\bar{\eta})$ est une solution du problème réfléchie, alors $u \leq v$ p.s.*

Nous avons omis la démonstration puisque elle est analogue à celle donnée dans [2] avec quelques modifications mineures.

Appendice.

Nous rappellerons l'inégalité de Bihari [1] et le lemme de Kolmogorov.

Lemme 5.5. *Soit $T > 0$ et $\theta_0 \geq 0$. Soit $\theta(t)$ et $\vartheta(t)$ deux fonctions mesurables positives sur $[0,T]$; et $\mathcal{K} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue croissante telle que $\mathcal{K}(r) > 0$ pour $r > 0$ et $\int_0^T \vartheta(t)\, dt$ existe. Si*

$$\theta(t) \leq \theta_0 + \int_0^t \vartheta(s) \mathcal{K}(\theta(s))\, ds, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Alors

$$\theta(t) \leq \mathcal{H}^{-1}\left(\mathcal{H}(\theta_0) + \int_0^t \vartheta(s)\, ds\right)$$

pour $t \in [0,T]$ tel que $\mathcal{H}(\theta_0) + \int_0^t \vartheta(s)\, ds \in \mathrm{Dom}(\mathcal{H}^{-1})$,
où $\mathcal{H}(r) = \int_1^r \frac{ds}{\mathcal{K}(s)}$ et $\mathcal{H}^{-1}$ est l'inverse de $\mathcal{H}$.

Lemme 5.6. *Soit Γ un cube de $\mathbb{R}^n$ et $\{X_t, t \in \Gamma\}$ un processus stochastique à valeurs réelles. Supposons qu'il existe des constantes $k > 1$, $K > 0$, $\mu > 0$ vérifiant*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^k\right] \leq K|t-s|^{n+\mu}.$$

Alors
(i) X admet une version continue,
(ii) Il existe des constantes θ et β, dépendant seulement de n, k et μ, et une variable aléatoire Y positive telle que

$$|X_t - X_s| \leq Y\, |t-s|^{\frac{\mu}{k}} \left(\log\left(\frac{\theta}{|t-s|}\right)\right)^{2/k} \quad \text{p.s. pour tout } t,s \in \Gamma^2$$

et

$$\mathbb{E}Y^k \leq \beta K.$$

Remerciement
Nous remercions le referee pour ses remarques et suggestions qui ont permis l'amélioration du présent travail.

Bibliographie

[1] BIHARI, I. A generalization of a Lemma of Bellman and its application to uniqueness problem of differential equations. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **7** (1956), 71–94.

[2] DONATI–MARTIN, C. AND PARDOUX, E. White noise driven SPDEs with reflection, *Probab. Theory Relat. Fields.* **95** (1993), 1–24.

[3] EDDAHBI, M. AND ERRAOUI, M. On quasi–linear parabolic SPDEs with non–Lipschitz coefficients *Random Opera. and Stoc. Equations,* **6** (2) (1998), 101–122.

[4] GATAREK, D. AND GOŁDYS, B. On weak solutions of stochastic equations in Hilbert space. *Stochastics and Stochactics Reports,* **46** (1992), 41–51.

[5] IKEDA, N AND WATANABE, S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* North–Holland (1989).

[6] MANTHEY, R. AND STIEVE, C. Existence and uniqueness of solutions to Volterra's population equation with diffusion and noise. (*Preprint*).

[7] NUALART, D. AND PARDOUX, E. White noise driven quasi–linear SPDEs with reflection. *Probab. Theory Relat. Fields.* **93** (1992), 77–89.

[8] PARDOUX, E. Stochastic partial differential equation and filtering of diffusion processes. *Stochastics.* **3** (1979), 127–167.